

现代数学译丛 1

# 应用分支理论基础

〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著
金成桴 译



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3757.0101)



ISBN 978-7-03-026358-2

9 787030 263582 >

定 价：98.00 元

销售分类建议：高等数学

现代数学译丛 11

# 应用分支理论基础

〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著

金成桴 译

科学出版社

北京

图字: 01-2009-7982 号

## 内 容 简 介

本书详细阐述非线性连续和离散动力系统中的分支理论及其在生物数学、化学反应、神经动力学等领域中的应用. 全书共分十章, 主要内容有动力系统介绍, 拓扑等价性、分支与动力系统的结构稳定性, 连续-时间系统平衡点的单参数和双参数分支, 离散-时间系统不动点的单参数和双参数分支, $n$ 维动力系统的平衡点和周期轨道分支, 双曲平衡点的同宿和异宿轨道分支, 连续-时间动力系统中的其他单参数分支和分支的数值方法. 本书尽量避免高深的数学概念和理论, 证明(包括使用适当的计算机软件)详细清楚, 介绍全面, 便于多方面的读者阅读.

本书可作为大学数学、物理、生物等专业高年级大学生和研究生的教材或参考书, 也可供相关专业研究人员阅读参考.



图书在版编目(CIP)数据

应用分支理论基础/(俄)尤里·阿·库兹涅佐夫著, 金成桴译. —北京: 科学出版社, 2010

(现代数学译丛; 11)

ISBN 978-7-03-026358-2

Ⅰ.应… Ⅱ.①尤… ②金… Ⅲ.分支 Ⅳ.O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 004555 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 李奕萱
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本: B5(700×1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张: 37 1/2
印数: 1—2 500 字数: 725 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



# 中 文 版 序

很高兴出版我的《应用分支理论基础》一书的中译本. 中国数学家们在动力系统理论及其应用方面的成果是众所周知的, 并肯定将延续到未来.

近代数学的研究与教育得益于不同国家的数学结果和方法的快速变化与发展. 这样的全球化导致全世界都采用最有效的方法和技巧, 这些方法和技巧也影响着各国的科学、教育并最终影响工业和普通人民的生活.

当然, 学习数学结果和方法的最好途径仍然是用你们自己的母语写成的教科书来学习. 在这里译者的作用不能低估, 读者很幸运能够得到由金成桴翻译的如此质量的中译本.

2004 年, 由 Springer 出版社出版的这本书的第三版改正了所有知道的印刷错误和其他错误, 对参考文献也作了升级. 希望这本书对中国数学家、研究工作者和工程师们有所帮助.

尤里 · 阿 · 库兹涅佐夫

2009 年 2 月于乌脱勒次



# 第一版序

最近几年来, 针对应用数学的研究生, 出现了几本非线性动力学的好教科书, 但是, 对于那些想利用这个理论从事具体问题研究的人来说, 它们中的大多数看起来又太理论化, 并且对许多实际问题的叙述也不够清楚. 本书是为那些即将参加某些应用问题研究的大学数学系高年级学生和研究生设计的, 也将献给那些以动力系统作为模型的物理、生物、工程和经济方面的研究工作者. 对他们仅要求具备中等的几何、线性代数、分析和微分方程等数学知识. 熟知的一般数学术语和结论在本书的结尾有一个简短的介绍. 不管在什么时候, 只要有可能, 我们都会尽量运用初等数学工具. 例如对规范形, 我们并不试图把它叙述得非常一般化, 而仅介绍为我们的目的所够用的技巧部分.

本书的目的是给学生 (或研究者) 提供动力系统理论坚实的基础知识, 以及应用在近代应用数学文献中最必需的途径、方法、结果和术语. 拓扑等价性和余维是两个关键性概念. 或者说, “动力学中在已知个数的参数所允许范围内变化时, 人们能够期待出现什么情况?” 事实上, 书中所包含的材料足以对应用中出现的动力系统进行十分复杂的分支分析. 本书提供的分支理论的基本课题可作为非线性动力系统或系统理论课程的内容. 某些经典结果, 例如二维系统的 Antronov-Hopf 分支和同宿分支, 都作了详细的叙述并给出了自闭式证明. 对于分支理论中更为复杂的课题, 例如高于二维的同宿分支以及双参数的局部分支, 都在证明以后尝试给出清晰的有关几何概念, 但只画出了它们的图像, 或者有时只讨论和叙述一些结果, 指出可以找到证明的参考文献. 这是为了使更广泛的读者可阅读本书, 同时保持本书相对精简以便浏览. 我们也叙述了几个最新的理论结果, 介绍了非双曲平衡点的同宿分支和反射对称系统的单参数极限环分支, 这些结果对于研究生水平的标准教材来说是难了一点, 但在应用中是重要的.

本书力图给读者提供一个将一般的数学定理应用于特殊的研究问题的清晰方法, 特别给出开发技巧的数值方法和一些主要来自生物数学的例子作为说明.

本书源于作者 1991 年春在米兰技术学院为研究生所授的非线性系统课程. 1993 年 2 月也在阿姆斯特丹的数学与计算机科学中心 (CWI, Amsterdam) 的讨论班上作为博士生班课程讲授过. 书中所引用的许多例子和方法曾在俄罗斯科学院计算研究中心 (Pushino, Moscow Region)① 的讨论班上第一次介绍过.

① 1992 年改名为生物学数学问题研究所 (IMPB).

# 第二版序

这本书第一版的良好反映使我确信有关动力系统分支理论这类应用方面的教科书的出版正是时候. 题材的选取实际上覆盖了有限维应用分支理论主要的实用课题. 这一新版本保持了第一版的结构, 同时结合现代理论的发展对内容作了升级. 特别, 对分支分析的数值方法作了改进并添加了新方法. 某些课题的处理也变得更清楚易懂.

主要添加的内容概述如下: 第 3 章给出了对折分支的原系统与截断规范形之间的拓扑等价性的初等证明. 这使得本书对 ODEs 平衡点余维 1 分支的分析是完全的. 这一章也包含了应用 MAPLE、符号操作软件对平面 Hopf 分支分析的例子. 第 4 章包括对时滞逻辑映射的 Neimark-Sacker 分支规范形的详细分析. 第 5 章推导了 $n$ 维迭代映射所有余维 1 分支 (即折分支、翻转分支以及 Neimark-Sacker 分支) 的临界规范形系数的明确公式. 第 6 章对 $n$ 维 ODEs 同宿分支的这一节完全重写, 并引入 Melnikov 积分以验证在参数变化时流形分裂的正则性, 也包括同宿分支附近中心流形存在性结果的现代证明. 就是说, 对 $n$ 维系统中一般余维 1 同宿分支的研究化为对某些二维、三维或四维系统的研究. 二维和三维的情形在正文中处理, 具有同宿于焦-焦点的同宿轨道的四维系统分支分析在新的附录里作了概述. 第 7 章讨论了 "蓝天" 分支的一个具体例子. 讨论分支数值分析的第 10 章作了相当大的改变, 引入了加边方法对双参数的折分支和 Hopf 分支进行延拓. 按照这个方法, 在最小变量系统中对分支定义的函数是用求解线性加边系统来计算的. 这允许对这个函数的梯度明确计算, 当行列式用在定义的函数时这个方法失效. 现在, 正文主要包括 BVP 方法去延拓双参数余维 1 同宿分支和余维 1 极限环分支. 这一章的一个新的附录提供测试函数去探测包括平衡点的单个同宿轨道的所有余维 2 同宿分支. 这一章的最后一个附录中评论的软件升级到最近才出现的程序, 包括带有 HomCont, DsTool, 以及 CONTENT 的 AUTO97, 并给出可使用它们的网站信息.

许多印刷错误和小错误在准备这个版本时得到更正. 我要感谢许多同事, 他们给我发来评论和建议, 其中包括 E. Doedel(Concordia 大学, Montreal), B. Krauskof (VU, Amsterdam), S. van Gils (TU Twente, Enschede), B. Sandstede (WIAS, Berlin), W. -J. Beyn (Bielefeld 大学), F. S. Berezovskaya(生态问题和森林生产中心, Moscow), E. Nikolaev 和 E. E Shnoll (IMPB, Pushchio, Moscow Region), W. Langford(Guelph

扩充并依据 AMS MathSciNet 的参考数据基进行验证. 补充了翻译成英文所知道的参考文献, 所有的图像都得到了修正, 且对有些情形重新计算了有关数据.

我要感谢所有同事的评论、建议和讨论, 使这本书得以改进. 最后, 感谢我的妻子 Liodmila 和女儿 Elena, Ouliana 对我的持续支持.

**尤里 · 阿 · 库兹涅佐夫**
2004 年 4 月于乌脱勒次



# 译 者 序

摆在读者面前的这本由俄罗斯数学家尤里 · 阿 · 库兹涅佐夫著的《应用分支理论基础》一书, 是作者在荷兰工作期间用英文撰写并由 Springer 出版社作为 "应用数学科学丛书" 之一 (*Applied Mathematical Sciences* 112) 出版的. 本书的第一版出版于 1994 年, 2004 年出版了第三版, 受到了大家的一致好评. 正如美国数学评论员的评论: 就我所知, 还没有哪本书能够像这本书那样把基本分支现象解释得如此清楚.

本书的一个特点是尽可能避免高深的数学理论. 书中详细介绍了由常微分方程系统和迭代映射定义的动力系统在低维和高维空间中的余维 1 和余维 2 分支, 其内容基本上涵盖了应用中出现的各类有限维常用分支, 详细推导了它们的拓扑规范形系数. 本书的第二个特点是分支理论的应用. 许多出现在其他学科中的分支问题, 特别是生物数学中的动力学模型问题, 书中都作了详细介绍. 本书的第三个特点是在每一章的末尾都有文献评注. 文献评注介绍了这一章有关课题的发展历史以及对相关工作的简短评论, 使得读者对有关问题的来龙去脉有个系统的认识. 作者选择的直到最新的参考文献非常丰富. 本书最后一个特点是注重分支理论的数值分析 (第 10 章). 在前面还用实例具体阐明如何使用有关计算机软件, 也包括作者针对动力系统分支理论的一些软件的开发. 每章末尾都附有练习, 其中有些是为了使读者巩固所学的内容, 另外还有一些是为了激发读者进一步的兴趣, 这些练习大部分是来自其他文献. 译者认为值得向国内广大的读者推荐这本著作, 相信读过以后会有更深的感受.

在本书的翻译过程中, 译者更正了原书的一些错误, 其中有些是作者新提供的. 书中有些译名在没有得到统一之前都给出了原文, 人名一般就用原名 (包括前苏联人名按原书都用英文名字).

本书可以作为大学数学、物理、生物和工程等专业高年级大学生、研究生非线性动力学的教科书和教学参考书, 也可供相关专业的研究工作者阅读参考.

最后, 感谢作者为中文版写了热情洋溢的序. 感谢科学出版社编辑自始至终的支持与帮助. 另外, 要感谢我的妻子何燕俐对我在翻译这本书的整个过程中所给予的理解、支持、关怀与帮助.

金成桴

2009 年 3 月

# 目　录



# 第 1 章　动力系统引言

本章介绍一些基本术语. 首先, 定义*动力系统*并给出几个包括符号动力系统的例子. 然后, 介绍*轨道*、*不变集*以及它们的*稳定性*等概念. 正如我们将看到的, 当分析 Smale *马蹄*时, 得知不变集可以具有非常复杂的结构. 这与 20 世纪 60 年代人们发现的下列事实密切相关: 即使一个简单的动力系统也会具有 “随机” 现象或 “混沌” 性态. 最后, 讨论微分方程如何才能在有限维空间和无穷维空间定义动力系统.

## 1.1　动力系统的定义

动力系统这个概念是*确定性过程*这个一般科学概念的数学形式化. 许多物理、化学、生物、生态、经济甚至社会系统, 它们的将来状态和过去状态可以用其现在的状态和决定其发展的规律来刻画到某种程度. 如果这些规律不随时间变化, 那么这种系统的性态由初始状态完全确定. 因此, 动力系统这个概念包含它可能状态的集合 (*状态空间*) 和状态按时间的*发展规律*. 下面先分别讨论这些基本概念, 再给出动力系统的正式定义.

### 1.1.1　状态空间

一个系统的所有可能的状态是由某个集合 $X$ 的点来刻画. 这个集合就称为该系统的*状态空间*. 实际上, 点 $x \in X$ 意味着它不仅必须充分刻画系统的流动 “位置”, 而且也决定着它的发展. 不同的科学分支给我们提供适当的状态空间. 按照古典力学的传统, 通常称状态空间为*相空间*.

**例 1.1**(摆)　一个理想摆的状态是由它从铅直位置确定的*角位移* $\varphi(\bmod 2\pi)$ 和相应的*角速度* $\dot{\varphi}$ 所完全刻画 (见图 1.1). 注意, 单独一个角度 $\varphi$ 不足以确定摆的将来状态. 因此, 对这个简单的动力系统, 状态空间是 $X = \mathbb{S} \times \mathbb{R}^1$, 其中 $\mathbb{S}^1$ 为由角度参数化的单位圆, $\mathbb{R}^1$ 是对应于所有可能的速度的实数轴. 集合 $X$ 可以视为 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维光滑*流形*(圆柱面). ◇



图 1.1　古典摆

**例 1.2**(一般力学系统)　古典力学中, 一个具 $s$ 个自由度的孤立系统的状态是由 $2s$ 维实向量

$$(q_1, q_2, \cdots, q_s, p_1, p_2, \cdots, p_s)^{\mathrm{T}}$$

所刻画, 这里 $q_i$ 是广义坐标, $p_i$ 是对应的广义矩. 因此, 在这种情形, $X=\mathbb{R}^{2s}$. 如果 $k$ 个坐标是循环的, 则 $X=\mathbb{S}^k\times\mathbb{R}^{2s-k}$. 在摆的情形, $s=k=1, q_1=\varphi$, 可取 $p_1=\dot{\varphi}$. ◇

**例 1.3**(量子系统) 在量子力学中, 具有两个可观察状态的系统的状态是由向量

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

来刻画, 其中 $a_i, i=1,2$ 是满足条件

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

的复数, 称为振幅, 系统在 $i$ 状态被发现的概率等于 $p_i = |a_i|^2$, $i=1,2$. ◇

**例 1.4**(化学反应器) 一个混合均匀的恒温化学反应器内的状态是由给定容量的 $n$ 个化学反应底物的浓度

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$$

来确定. 显然, 浓度 $c_i$ 必须是非负的. 所以

$$X = \{c : c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, c_i \geqslant 0\}.$$

如果浓度逐点变化, 则反应器内的状态由反应物分布$c_i(x), i=1,2,\cdots,n$ 所确定. 这些函数定义在反应器内部的空间区域 $\Omega$ 内, 刻画点 $x$ 附近底物的局部浓度. 因此, 状态空间 $X$ 在此情形是由满足某些光滑性和边界条件的向量值函数 $c(x)$ 所组成的函数空间. ◇

**例 1.5**(生态系统) 类似于上一个例子, 在某区域 $\Omega$ 内的一个生态群体的状态可由一个具非负分量的向量

$$N = (N_1, N_2, \cdots, N_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

或者由向量函数

$$N(x) = (N_1(x), N_2(x), \cdots, N_n(x))^{\mathrm{T}}, \quad x \in \Omega$$

来刻画, 视空间分布对适当的动力学描述是否是本质而定. 其中 $N_i$ 是第 $i$ 个种群或其他群体 (例如, 捕食或被捕食者) 的个数 (或密度). ◇

**例 1.6**(符号动力学)　为结束我们列举的状态空间, 考虑所有可能的由两个符号, 例如 $\{1,2\}$, 所构成的*双向无穷序列集合* $\Omega_2$, 点 $\omega \in X$ 为序列

$$\omega = \{\cdots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\},$$

其中 $\omega_i \in \{1,2\}$, 注意, 序列中的零位置必须指出, 例如, 存在两个不同周期的序列, 它们都可写为

$$\omega = \{\cdots, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots\}$$

但其中之一 $\omega_0 = 1$, 另一个 $\omega_0 = 2$. 空间 $\Omega_2$ 在以后将起重要作用.

有时识别两个序列的不同仅仅是移位了原点的位置, 这是有用的. 这种序列称为*等价序列*, 等价序列类构成的集合记作 $\tilde{\Omega}_2$. 上面指出的两个周期序列在 $\tilde{\Omega}_2$ 中表示同一点. ◇

在上面所有的例子中, 状态空间具有某种自然结构, 对不同的状态允许进行比较, 更确切地说, 两个状态之间可定义*距离* $\rho$, 使这些集合成为*距离空间*.

在力学以及最简单的化学、生态例子中, 状态空间是某固定 $n$ 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$, 或者是这个空间中的一个 (子) 流形 (超曲面). 两个由点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 参数化的状态之间的距离可由*欧氏范*来测量, 即

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{1.1}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中标准数量积,

$$\langle x, y \rangle = x^{\mathrm{T}} y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

如果有必要, 流形上两个 (靠近) 点之间的距离可用此流形上连接这两点最短曲线的长度来测量. 类似地, 例 1.3 的量子系统中两个状态 $\psi, \varphi$ 之间的距离可用 $\mathbb{C}^n$ 的标准数量积

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}^{\mathrm{T}} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \bar{\psi}_i \varphi_i$$

来定义, 其中 $n = 2$, 且 $\langle \psi, \psi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1$.

当状态空间是函数空间时, 按函数可允许的*光滑性*(可微性) 存在各种可能的距离. 例如, 可用

$$\rho(u,v) = \|u - v\| = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{x \in \Omega} |u_i(x) - v_i(x)|$$

在有解闭区域 $\Omega \in \mathbb{R}^m$ 上引入两个连续向量值实函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 之间的距离.

最后, 例 1.6 中两个序列 $\omega, \theta \in \Omega_2$ 之间的距离可用

$$\rho(\omega, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{\omega_k \theta_k} 2^{-|k|} \tag{1.2}$$

来测量, 其中

$$\delta_{\omega_k \theta_k} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \omega_k = \theta_k, \\ 1, & \text{如果 } \omega_k \neq \theta_k. \end{cases}$$

按照这个公式, 如果两个序列中以零位置为中心有一长段元素重合, 则认为此两序列接近 (验证).

按上面定义的距离, 我们所引入的状态空间是*完备的距离空间*. 宽松地说, 这意味着任何一个状态序列, 如果它的零位置所有充分前的元素被任意小的距离所分开, 则此序列收敛 (此空间没有 "洞").

按照状态空间 $X$ 的维数, 称相应的动力系统是*有限维*或*无穷维*. 通常, 人们对定义在 $X = \mathbb{R}^n$ 中各个流形上的有限维系统加以区别.

### 1.1.2　时间

动力系统的发展意味着该系统的状态随着时间 $t \in T$ 而变化, 其中 $T$ 是数集. 我们将考虑两类动力系统: 连续 (实) 时间 $T = \mathbb{R}^1$ 和离散 (整数) 时间 $T = \mathbb{Z}$. 第一类称为*连续–时间*动力系统, 第二类称为*离散–时间*动力系统. 在生态学和经济学中, 系统在某个时间 $t$ 的状态完全决定着它 1 年后, 即 $t+1$ 时的状态, 这时自然会出现离散–时间动力系统.

### 1.1.3　发展算子

动力系统的一个主要概念是发展规律. 只要*初始状态* $x_0$ 已知, 由发展规律便可确定该系统在时刻 $t$ 的状态 $x_t$. 确定发展规律的最一般方法是对每一个 $t \in T$, 在状态空间 $X$ 中定义一个映射 $\varphi^t$:

$$\varphi^t : X \to X,$$

它将 $x_0 \in X$ 映为时间 $t$ 时的某个状态 $x_t \in X$:

$$x_t = \varphi^t x_0.$$

映射 $\varphi^t$ 通常称为动力系统的*发展算子*. 它可以是明确的已知, 但在大多数情况下, 它只能*间接地*定义, 并且只能近似地计算. 在连续时间情形, 发展算子族 $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ 称为*流*.

注意, $\varphi^t x$ 有可能并不是对所有偶 $(x, t) \in X \times T$ 都有定义. 对 $t \geqslant 0$ 和 $t < 0$ 都有定义的发展算子 $\varphi^t$ 的动力系统称为是*可逆的*. 在这样的系统中, 初始状态 $x_0$

不仅完全确定着系统的将来状态, 也确定着该系统的过去状态. 但是, 考虑下面的系统也是有用的, 它的将来 (对 $t>0$) 性态完全由它在 $t=0$ 的初始状态所完全确定, 而它的过去 (对 $t<0$) 历史则没有确切的结构. 这种 (不可逆) 动力系统的发展算子仅对 $t>0$(即对 $t\in\mathbb{R}_+^1$ 或 $\mathbb{Z}_+$) 有定义, 在连续–时间情形称为半流.

$\varphi^t x_0$ 也有可能只对时间局部有定义, 例如, 仅对 $0\leqslant t<t_0$ 有定义, 这里的 $t_0$ 依赖于 $x_0\in X$. 这种性态的一个重要例子就是 "爆炸", 即 $X=\mathbb{R}^n$ 中的连续时间系统在有限时间内其状态趋于无穷:

$$\|\varphi^t x_0\|\to+\infty,\quad \text{当 } t\to t_0.$$

发展算子有两个自然性质, 它们反映了动力系统的确定性特征. 第一个是

$$\varphi^0=\mathrm{id}, \tag{DS.0}$$

这里 id 是 $X$ 上的恒同映射, 即对所有的 $x\in X, \mathrm{id}\,(x)=x$. 性质 (DS.0) 说明系统不会 "本能地" 改变它的状态. 发展算子的第二个性质是

$$\varphi^{t+s}=\varphi^t\circ\varphi^s. \tag{DS.1}$$

这表明, 对所有的 $x\in X$ 与 $t,s\in T$, 方程

$$\varphi^{t+s}x=\varphi^t(\varphi^s x)$$

的两端都有定义[①]. 事实上, 性质 (DS.1) 说明, 系统从点 $x\in X$ 出发经过 $t+s$ 个时间单位, 它的发展结果状态与系统先从状态 $x$ 仅经过 $s$ 个时间单位到达状态 $\varphi^s x$, 再经过 $t$ 个时间单位的发展的状态是相同的 (见图 1.2). 这个性质表明决定系统状态的规律不随时间而变化: 这个系统是 "自治" 的.

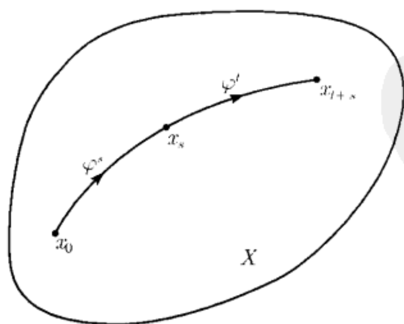



图 1.2　发展算子

① 只要有可能, 我们将避免明确指出 $\varphi^t x$ 的定义域.

对可逆系统, 发展算子对负的 $t$ 和 $s$ 以及对非负的 $t$ 和 $s$ 都满足 (DS.1). 在这种系统中, 发展算子 $\varphi^{-t}$ 是 $\varphi^t$ 的逆, $(\varphi^t)^{-1}=\varphi^{-t}$, 因为

$$\varphi^{-t}\circ\varphi^t=\mathrm{id}.$$

具整数 $t$ 的离散–时间动力系统仅用一个映射 $f=\varphi^1$, 所谓"时间-1-映射"就可完全确定. 事实上, 由 (DS.1) 有

$$\varphi^2=\varphi^1\circ\varphi^1=f\circ f=f^2,$$

其中 $f^2$ 是 $f$ 的第二次迭代. 类似地, 对一切 $k>0$,

$$\varphi^k=f^k.$$

若离散–时间系统可逆, 则上面的方程对 $k\leqslant 0$ 也成立, 其中 $f^0=\mathrm{id}$.

最后指出, 对许多系统, $\varphi^t x$ 是 $x\in X$ 的连续函数, 若 $t\in\mathbb{R}^1$, 则它也是时间的连续函数. 这里, 连续性是关于 $X$ 中对应的距离或范数来定义的. 进一步, 许多定义在 $\mathbb{R}^n$ 中或 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑流形上的动力系统, 如果它们的 $\varphi^t x$ 是 $(x,t)$ 的光滑函数, 这样的系统称为*光滑动力系统*.

### 1.1.4 动力系统定义

现在可以给出动力系统的正式定义.

**定义 1.1** *一个动力系统是一个三元组 $\{T,X,\varphi^t\}$, 其中 $T$ 是时间集, $X$ 是状态空间, 以及 $\varphi^t:X\to X$ 是由 $t\in\mathbb{R}^1$ 参数化且满足性质 (DS.0) 和 (DS.1) 的发展算子族.*

用两个明显的例子来说明这个定义.

**例 1.7**(平面线性系统) 考虑平面 $X=\mathbb{R}^2$ 及其上由依赖于 $t\in\mathbb{R}^1$ 的矩阵

$$\varphi^t=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mu t}\end{pmatrix}$$

所给出的线性非奇异变换族, 其中 $\lambda,\mu\neq 0$ 为实数. 显然, 它确定了 $X$ 上的一个连续–时间动力系统. 此系统可逆, 且对一切 $(x,t)$ 都有定义. 映射 $\varphi^t$ 对 $x$ 和 $t$ 都连续 (且光滑). ◇

**例 1.8**(重温符号动力系统) 取由例 1.6 所引入的两个符号 $\{1,2\}$ 的所有双向无穷序列的空间 $X=\Omega_2$. 考虑映射 $\sigma:X\to X$, 将序列

$$\omega=\{\cdots,\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}\in X$$

映为序列 $\theta = \sigma(\omega)$:

$$\theta = \{\cdots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots\} \in X,$$

其中

$$\theta_k = \omega_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

映射 $\sigma$ 仅仅将序列向左移动了一个位置, 称之为**移位映射**. 这个移位映射定义一个离散–时间动力系统 $\{\mathbb{Z}, \Omega_2, \sigma^k\}$, 称为**符号动力学**. 它是可逆的 (找 $\sigma^{-1}$). 注意, 两个序列 $\theta$ 和 $\omega$ 等价, 当且仅当对某 $k_0 \in \mathbb{Z}$, 有 $\theta = \sigma^{k_0}(\omega)$. ◇

本书后面将遇到许多不同的动力系统例子, 那时将详细研究它们.

## 1.2　轨道与相图

本书应用动力系统的几何观点, 总是力图用图像来叙述它们的性质, 这样做便于对它们的理解. 与动力系统 $\{T, X, \varphi^t\}$ 相应的基本几何对象是这个状态空间中动力系统的**轨道**, 以及由这些轨道所组成的**相图**.

**定义 1.2**　从 $x_0$ 出发的一条轨道是状态空间 $X$ 中的一个有序子集

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0,\ \text{对一切}\ t \in T\ \text{使得}\ \varphi^t x_0\ \text{有定义}\}.$$

具连续发展算子的连续–时间系统的轨道是状态空间 $X$ 中由时间 $t$ 参数化的一条**曲线**, 曲线上的方向为时间增加方向 (见图 1.3). 离散–时间系统的轨道是状态空间 $X$ 中按增加整数计算的点列. 轨道通常称为**轨线**. 若对某个 $t_0$ 有 $y_0 = \varphi^{t_0} x_0$, 则集合 $Or(x_0)$ 和 $Or(y_0)$ 重合. 例如, 两个等价序列 $\theta, \omega \in \Omega_2$ 生成符号动力系统 $\{\mathbb{Z}, \Omega_2, \sigma^k\}$ 的相同轨道. 因此, 符号动力学的所有不同轨道都是由例 1.6 引入的集合 $\tilde{\Omega}_2$ 中的点表示.

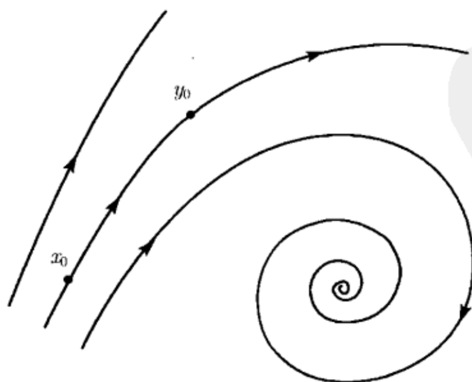



图 1.3　连续–时间系统的相图

最简单的轨道是平衡点.

**定义 1.3** 点 $x^0 \in X$ 称为平衡点 (不动点), 如果对一切 $t \in T$ 有 $\varphi^t x^0 = x^0$.

发展算子映平衡点为它自身. 等价地, 一个系统若处在平衡点, 则它将永远停留在那里, 故平衡点代表该系统性态的最简单模式. 我们将把 "平衡点" 这个名词留给连续–时间动力系统, 而将 "不动点" 给离散–时间动力系统相应的对象. 显然, 例 1.7 中的系统有单个平衡点, 它是原点 $x^0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$. 若 $\lambda, \mu < 0$, 则当 $t \to +\infty$ 时所有轨道均收敛于 $x^0$ (这是长时间渐近性态的最简单模式). 例 1.8 中的符号动力系统只有两个不动点, 它们是序列

$$\omega^1 = \{\cdots, 1, 1, 1, \cdots\}$$

和

$$\omega^2 = \{\cdots, 2, 2, 2, \cdots\}.$$

显然, 移位映射 $\sigma$ 不改变这两个序列: $\sigma(\omega^{1,2}) = \omega^{1,2}$.

轨道另一个相对简单的形式为环.

**定义 1.4** 环是一个周期轨道, 即一条非平衡点轨道 $L_0$, 使得它上面的每一点 $x_0 \in L_0$, 对某个 $T_0 > 0$ 及一切 $t > T$ 均满足 $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$.

具有这个性质的最小 $T_0$ 称为环 $L_0$ 的周期. 若一个系统于环上一点 $x_0$ 开始它的发展, 则每经过 $T_0$ 时间后将刚好回到这一点. 这种系统具有周期振动. 在连续–时间情形, 环 $L_0$ 是一条闭曲线 (见图 1.4(a)).

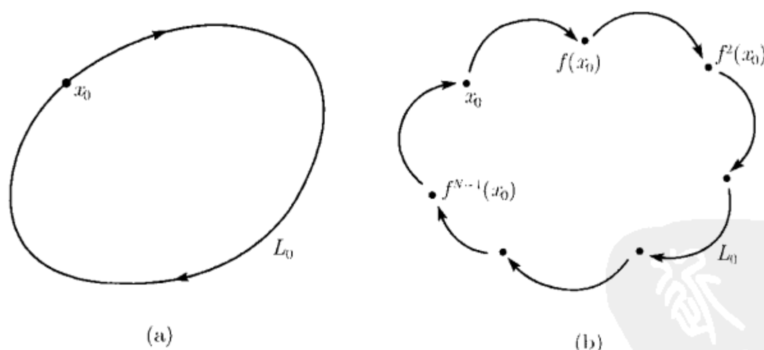



图 1.4 (a) 连续–时间系统的周期轨道; (b) 离散–时间系统的周期轨道

**定义 1.5** 连续–时间动力系统的一个环, 如果它的邻域内没有其他环, 就称为极限环.

在离散–时间情形, 环是一个点集

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{N_0}(x_0) = x_0,$$

其中 $f=\varphi^1$, 且周期 $T_0=N_0$ 显然是一整数 (图 1.4(b)). 注意, 这个集合上的每一点都是映射 $f$ 的 $N_0$ 次迭代 $f^{N_0}$ 的*不动点*. 例 1.7 中的系统没有环. 相反, 符号动力学 (例 1.8) 有无穷多个环. 事实上, 重复长度为 $N_0>1$ 的一段所构成的周期序列代表周期为 $N_0$ 的环, 因为只要应用移位映射刚好 $N_0$ 次即回到此序列自身. 显然, 它有无穷 (可数) 多个这样的周期序列. 等价地, 周期序列定义相同的周期轨道.

我们可以把动力系统的所有轨道粗糙地分为不动点、环以及 "所有其他形式的轨道".

**定义 1.6**　*动力系统的相图是轨道在状态空间中的一个分划.*

相图中包含动力系统性态的许多信息. 观察相图就可确定当 $t\to+\infty$(如果系统可逆, $t\to-\infty$) 时系统的*渐近状态*的类型和数目. 当然, 不可能把所有的轨道都画在图上. 特别, 只要几条关键性轨道画在图上, 就可以扼要地说明相图的面貌 (如图 1.3 所示). 连续–时间动力系统的相图可解释为某流体流的象, 其中轨道表示 "流体质点" 跟随流体流动的路径. 在连续–时间情形用术语 "流" 可对发展算子作类似解释.

# 1.3　不　变　集

## 1.3.1　定义与类型

为了对相图的元素, 特别, 对系统可能的渐近状态作进一步分类, 下面的定义是有用的.

**定义 1.7**　*动力系统 $\{T,X,\varphi^t\}$ 的不变集是子集 $S\subset X$, 使得若 $x_0\in S$, 则对一切 $t\in T$ 有 $\varphi^tx_0\in S$.*

这个定义意味着对一切 $t\in T$ 有 $\varphi^tS\subseteq S$. 显然, 不变集 $S$ 是由动力系统的轨道所组成. 任何一个个别轨道明显是一不变集, 总可以限制系统的发展算子 $\varphi^t$ 于不变集 $S$ 上而考虑动力系统 $\{T,S,\psi^t\}$, 其中 $\psi^t:S\to S$ 是 $\varphi^t$ 在 $S$ 上诱导的映射. 对此限制, 用符号 $\varphi^t$ 代替 $\psi^t$.

如果对状态空间 $X$ 赋予距离 $\rho$, 可考虑 $X$ 中的*闭不变集*. 平衡点 (不动点) 和环显然是闭不变集的最简单例子，还存在其他类型的闭不变集. 接下来更为复杂的是*不变流形*, 即某空间 $\mathbb{R}^K$ 中的有限维超曲面. 图 1.5 所示的是 $\mathbb{R}^3$ 中连续–时间动力系统的二维不变环面 $\mathbb{T}^2$ 以及在这个流形上的典型轨道. 动力系统理论中一个重要发现是认识到一个非常简单、可逆的可微动力系统, 可以具有相当复杂的闭不变集, 它们含有无穷多个周期轨道和无穷多个非周期轨道. Smale 构造了这种系统最著名的例子, 它提供了平面上具不变集 $\Lambda$ 的可逆离散时间动力系统, $\Lambda$ 中的点与所有具两个符号的双向无穷序列一一对应, 这个不变集 $\Lambda$ 并不是一个流形. 此外, 这

个系统在此不变集上的限制, 在某种意义下如例 1.8 所示的符号动力系统. 就是说, 可以验证它是如何具有无穷多个环的. 下面较详细地介绍 Smale 的这个例子.

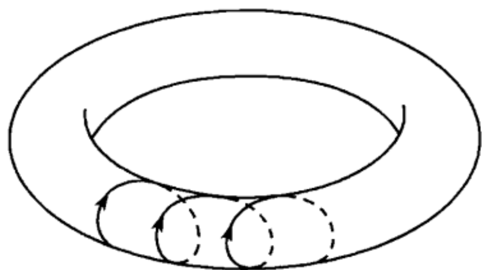


图 1.5　不变环面

### 1.3.2　Smale 马蹄

考虑图 1.6 的几何结构. 在平面上取正方形 $S$(图 1.6(a)), 沿水平方向将它压缩, 沿铅直方向将它拉伸 (图 1.6(b)), 沿中间弯曲 (图 1.6(c)) 并把它放到原正方形 $S$ 内, 使得与 $S$ 相交于两铅直带 (图 1.6(d)). 这个过程定义了一个映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. 正方形 $S$ 在此变换下的象 $f(S)$ 像一个马蹄, 这就是称它为马蹄映射的原因. 图像 $f(S)$ 的确切样子无关紧要. 然而, 为简单起见, 假定压缩和拉伸都是线性的, 使得两条铅直带与 $S$ 相交成两个长方形. 也可以对映射 $f$ 求其逆, 它和它的逆都是光滑的. 逆映射 $f^{-1}$ 将马蹄 $f(S)$ 通过步骤 (d)~(a) 映回正方形 $S$. 逆变换 $f^{-1}$ 映图 1.6(d) 所示的点线正方形 $S$ 为图 1.6(a) 所示的点线水平马蹄, 这里假定交原正方形 $S$ 于两水平长方形.

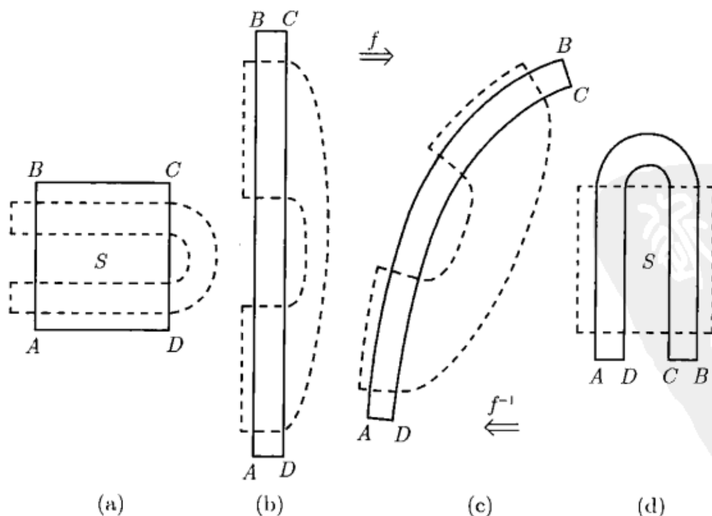



图 1.6　马蹄映射的结构

以 $V_1$ 和 $V_2$ 记交集 $S\bigcap F(S)$ 的两个铅直长条 (图 1.7(a)):

$$S \bigcap F(S) = V_1 \bigcup V_2.$$

现在做最重要的一步: 作映射 $f$ 的第二次迭代. 在这次迭代下, 铅直长条 $V_{1,2}$ 变换成两条 "细马蹄", 它们交正方形 $S$ 于四条窄铅直长条: $V_{11}, V_{21}, V_{22}$ 和 $V_{12}$(见图 1.7(b)). 记这一步为

$$S \bigcap f(S) \bigcap f^2(S) = V_{11} \bigcup V_{21} \bigcup V_{22} \bigcup V_{12}.$$

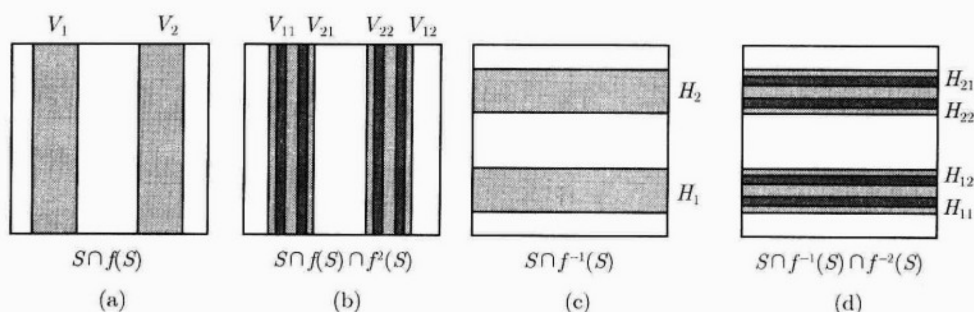



图 1.7　铅直长条和水平长条

类似地

$$S \bigcap f^{-1}(S) = H_1 \bigcup H_2,$$

其中 $H_{1,2}$ 是图 1.7(c) 中的水平长条, 且

$$S \bigcap f^{-1}(S) \bigcap f^{-2}(S) = H_{11} \bigcup H_{12} \bigcup_{22} \bigcup H_{21},$$

它们是四条水平长条 $H_{ij}$(图 1.7(d)). 注意, $f(H_i) = V_i, i = 1, 2$, $f^2(H_{ij}) = V_{ij}$, $i, j = 1, 2$(图 1.8).

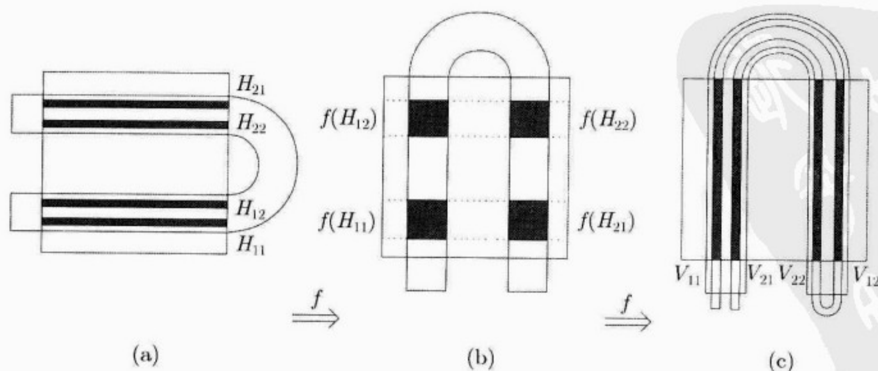



图 1.8　变换 $f^2(H_{ij}) = V_{ij}$, $i, j = 1, 2$

逐次作 $f$ 的迭代, 得到交集 $D\bigcap f^k(S), k=1,2,\cdots$, 它是 $2^k$ 条铅直长条. 类似地, $f^{-1}$ 的迭代给出交集 $S\bigcap f^{-k}(S), k=1,2,\cdots$, 它是 $2^k$ 条水平长条.

在 $f$ 或 $f^{-1}$ 迭代下正方形 $S$ 许多点离开 $S$. 把这些点忘却, 代之以考虑平面上在 $f$ 和 $f^{-1}$ 所有迭代下仍留在正方形内的点构成的集合:

$$\Lambda=\{x\in S: f^k(x)\in S,\ \text{对一切}\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

显然, 如果集 $\Lambda$ 非空, 那么它是由 $f$ 所定义的离散–时间动力系统的一个不变集, 此集可另外表示为一无穷交

$$\Lambda=\cdots\bigcap f^{-k}(S)\bigcap\cdots\bigcap f^{-2}(S)\bigcap f^{-1}(S)\bigcap S\bigcap f(S)\bigcap f^2(S)\bigcap\cdots\bigcap f^k(x)\bigcap\cdots$$

(任一点 $x\in\Lambda$ 必属于它所包含的每一个集合). 显然, 由此表达式, 集合 $\Lambda$ 具有独特的形状. 事实上, 它应该在

$$f^{-1}(S)\bigcap S\bigcap f(S)$$

的内部. 而这是由四个小正方形构成 (图 1.9(a)). 其次, 它又应该在

$$f^{-2}(S)\bigcap f^{-1}(S)\bigcap S\bigcap f(S)\bigcap f^2(S)$$

的内部, 而这又是 16 个更小的正方形的并 (图 1.9(b)), 等等. 在极限情形, 得到一个 Cantor(分形) 集.

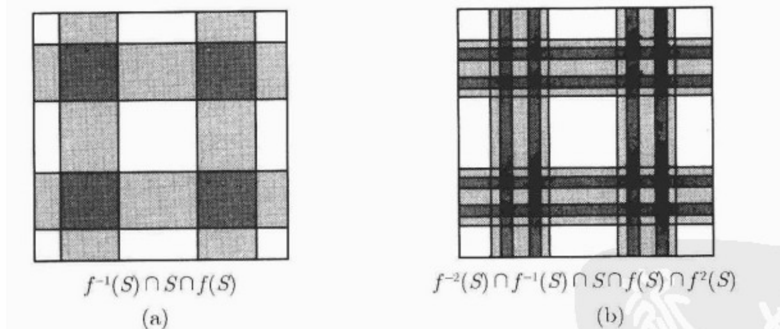



图 1.9　不变集的位置

**引理 1.1**　集合 $\Lambda$ 的点与所有具有两符号的双向无穷序列的点之间存在一一对应:

$$h:\Lambda\to\Omega_2.$$

**证明**　对每一点 $x\in\Lambda$, 定义一个两符号 $\{1,2\}$ 的序列

$$\omega=\{\cdots,\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\},$$

其中

$$\omega_k = \begin{cases} 1, & \text{如果 } f^k(x) \in H_1, \\ 2, & \text{如果 } f^k(x) \in H_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

对 $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. 这里, $f^0 = \mathrm{id}$ 为恒同映射. 显然, 式 (1.3) 定义了映射 $h: \Lambda \to \Omega_2$, 对不变集的每一点指定了一个序列.

为验证此映射可逆, 对固定的 $m > 0$, 取序列 $\omega \in \Omega_2$, 考虑所有点 $x \in S$ 的集合 $R_m(\omega)$, 它们不必属于 $\Lambda$, 使得对 $-m \leqslant k \leqslant m-1$ 有

$$f^k(x) \in H_{\omega_k}.$$

例如, 若 $m = 1$, 则 $\mathbb{R}_1$ 是四个交 $V_j \bigcap H_k$ 中的一个. 一般地, $R_m$ 属于水平长条和铅直长条的交. 当 $m \to \infty$ 时这些长条越来越细, 其极限分别为水平线段和铅直线段, 这两个线段显然交于点 $x$, 满足 $h(x) = \omega$, 因此, $h: \Lambda \to \Omega_2$ 是一一映射. 于是得知 $\Lambda$ 是非空的. □

**注**　若在 $S \subset \mathbb{R}^2$ 上用标准距离 (1.1), $\Omega_2$ 中用距离 (1.2), 则映射 $h: \Lambda \to \Omega_2$ 及其逆连续 (同胚). ◇

现在考虑点 $x \in \Lambda$ 以及与它对应的序列 $\omega = h(x)$, 这里 $h$ 是上面所构造的映射. 接下来考虑点 $y = f(x)$, 即 $x$ 在马蹄映射 $f$ 下的象. 由于 $y \in \Lambda$, 按定义, 存在与 $y$ 对应的序列: $\theta = h(y)$. 两个序列 $\omega$ 和 $\theta$ 是否存在一种关系? 由 (1.3) 易知, 这样的关系存在且非常简单, 即

$$\theta_k = \omega_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

这是因为 $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x)$. 换句话说, 序列 $\theta$ 可由序列 $\omega$ 经例 1.8 中定义的移位映射 $\sigma$ 而得到, 即

$$\theta = \sigma(\omega).$$

因此, $f$ 在其不变集 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ 上的限制等价于序列集合 $\Omega_2$ 上的移位映射 $\sigma$. 把这个结果叙述为下面简短的引理.

**引理 1.2**　对一切 $x \in \Lambda$, 有 $h(f(x)) = \sigma(h(x))$. □

还可以将它写为更简短的形式:

$$f|_\Lambda = h^{-1} \circ \sigma \circ h.$$

结合引理 1.1、引理 1.2 以及在 $\Omega_2$ 上移位动力学的明显性质, 可以得到下面对马蹄映射的性态更为完全描述的定理.

**定理 1.1**(Smale, 1963)　马蹄映射 $f$ 有闭不变集 $\Lambda$, 它包含有可数多个具任意长周期的周期轨道和不可数多个非周期轨道, 在这些轨道中存在任意接近于 $\Lambda$ 内任意点的轨道. □

$\Lambda$ 上的动力学具有某些"随机运动"的特性. 事实上, 可以"随机地"产生两个符号的任何序列, 因此, 指定一个相点, 按某种次序考察水平长条 $H_1$ 和 $H_2$, 在组成 $\Lambda$ 的轨道中存在显示这个特性的轨道.

马蹄例子的一个重要特性, 是对所构造的映射 $f$ 稍作扰动并不定性地改变它的动力学. 显然, Smale 的构造基于相当强的压缩和拉长并结合弯曲. 因此, 一个 (光滑) 扰动 $\tilde{f}$ 将得到类似的水平长条和铅直长条, 它们不再是长方形而是曲线区域. 但是, 只要扰动充分小 (下一章将严格定义), 这些长条缩小到的曲线仅仅稍微偏离水平线和铅直线. 因此, 构造可逐字逐句地进行. 扰动映射 $\tilde{f}$ 将有不变集 $\tilde{\Lambda}$, 其上的动力学将由在序列空间 $\Omega_2$ 上的移位映射 $\sigma$ 完全描述. 正如将在第 2 章讨论的, 这是一个**结构稳定性态**的例子.

**注** 可以按马蹄映射的要求借助 Jacobi 矩阵 $f_x$ 的拉伸锥和压缩锥来精确指出压缩和拉伸的性质 (见本章附录 B 文献译注中所叙述的文献). ◇

**例 1.9**(Hénon 映射) 下面考虑依赖于两个参数的平面二次映射:

$$f_{\alpha,\beta}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

一个与它等价的映射是由 Hénon(1976) 作为具有"随机动力学"的最简单映射而引入. 如果 $\beta \neq 0$, 那么映射 $f_{\alpha,\beta}$ 可逆. 在某些参数范围内, 这个映射具有马蹄映射基本的拉伸和弯曲性质.

例如, 固定 $\alpha = 4.5, \beta = 0.2$, 考虑长方形 $R$ 的开始的两个象 $f_{\alpha,\beta}(R)$ 和 $f^2_{\alpha,\beta}(R)$, 如图 1.10 所示. 类似于图 1.8(c) 的性质是显然的. ◇

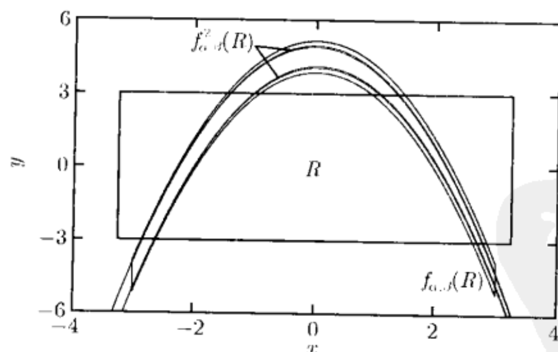



图 1.10 Hénon 映射中的 Smale 马蹄

### 1.3.3 不变集的稳定性

要表述动力系统的一个可观察的渐近状态, 不变集 $S_0$ 必须是稳定的. 换句话说, 它应"吸引"附近的轨道. 假定动力系统 $\{T, X, \varphi^t\}$ 的状态空间 $X$ 是完备的距

离空间, $S_0$ 是闭不变集.

**定义 1.8**　不变集 $S_0$ 称为稳定的, 如果

(i) 对任何充分小的邻域 $U \supset S_0$, 存在邻域 $V \supset S_0$, 使得对一切 $t > 0$ 有 $\varphi^t x \in U$;

(ii) 存在邻域 $U_0 \supset S_0$, 使得对一切 $x \in U_0$, 当 $t \to +\infty$ 时 $\varphi^t x \to S_0$.

如果 $S_0$ 是平衡点或者环, 这个定义就变成平衡点或环的稳定性标准定义. 定义中的性质 (i) 称为 Lyapunov 稳定. 如果 $S_0$ 是 Lyapunov 稳定, 它附近的轨道就不会离开它的邻域. 性质 (ii) 有时称为渐近稳定. 存在不变集, 它是 Lyapunov 稳定但不渐近稳定 (见图 1.11(a)). 相反, 存在不变集, 它是吸引的但不 Lyapunov 稳定, 因为有些轨道从 $S_0$ 附近出发最终趋于 $S_0$, 但它们仅仅到外面游荡了一下就固定在这集合的邻域内 (见图 1.11(b)).

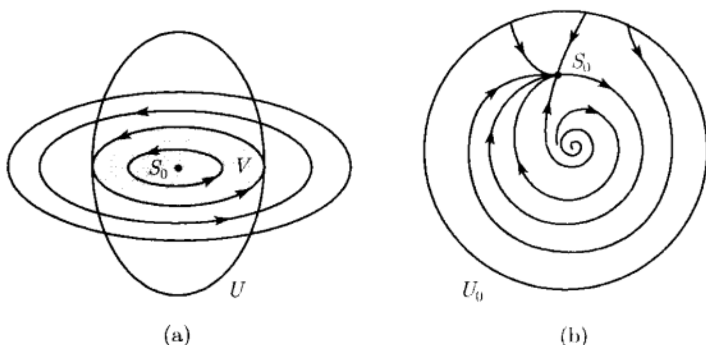



图 1.11　(a) Lyapunov 稳定; (b) 渐近稳定

若 $x^0$ 是有限维离散–时间光滑动力系统的不动点, 则可借助于 $x^0$ 处的 Jacobi 矩阵来叙述稳定性的充分条件.

**定理 1.2**　考虑离散–时间动力系统

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

这里 $f$ 是光滑映射. 假设它有不动点 $x^0$, 即 $f(x^0) = x^0$. 用 $A$ 记 $f(x)$ 在 $x^0$ 的 Jacobi 矩阵 $A = f_x(x^0)$, 则当 $A$ 的所有特征值 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 满足 $|\mu| < 1$ 时不动点是稳定的. □

回忆特征值是特征方程

$$\det(A - \mu I_n) = 0$$

的根, 其中 $I_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵.

不动点的特征值通常称为乘子, 在线性情形, 由 Jordan 标准型, 这个定理是显

然的. 定理 1.2 用在映射 $f$ 于周期轨道上任何点的 $N_0$ 次迭代 $f^{N_0}$, 也可得到 $N_0$ 环稳定性的充分条件.

下面的定理提供离散–时间动力系统不动点稳定性的另一个重要准则.

**定理 1.3**(压缩映射原理)　设 $X$ 是一个完备的距离空间, 距离为 $\rho$. 假如存在连续映射 $f: X \to X$, 使得对一切 $x, y \in X$ 和某个 $0 < \lambda < 1$, 满足

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y),$$

则离散–时间动力系统 $\{\mathbb{Z}_+, X, f^k\}$ 有一个稳定的不动点 $x^0 \in X$. 此外, 从任何点 $x \in X$ 出发的轨道, 当 $k \to +\infty$ 时有 $f^k(x) \to x^0$. □

这个基本定理的证明可以从任何一本数学分析或微分方程教科书中找到. 注意, 本定理对空间 $X$ 的维数没有限制. 例如, 它可以是无穷维函数空间. 与定理 1.2 另一个重要的区别是定理 1.3 保证不动点 $x^0$ 的存在性和唯一性, 而这在定理 1.2 中是必须假设的. 事实上, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 只要引入适当的距离 (范数), 定理 1.2 中的映射 $f$ 在 $x^0$ 附近是压缩的. 压缩原理是一个有用的工具, 用它可以证明隐函数存在定理、反函数定理以及后面的定理 1.4. 在第 4 章将用压缩原理去证明一般的平面映射的不动点在参数变化时的闭不变曲线的存在性、唯一性和稳定性. 还要注意, 定理 1.3 给出了大范围渐近稳定性: $\{\mathbb{Z}_+, X, f^k\}$ 的任一轨道收敛于 $x^0$.

最后指出, 马蹄映射的不变集 $\Lambda$ 是不稳定的. 不过, 存在不变的分形集是稳定的. 这种对象叫奇怪吸引子.

## 1.4　微分方程与动力系统

定义连续–时间动力系统最通常的方法是用微分方程. 假设系统的相空间是以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为坐标的 $X = \mathbb{R}^n$. 如果系统定义在流形上, 就把它们考虑为流形上的局部坐标. 系统的发展规律通常是借助于作为坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函数, 即速度 $\dot{x}_i$:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_2), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或向量形式

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

隐式地给出. 这里的向量值函数 $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 假定足够可微 (光滑). (1.5) 右端的函数视为向量场, 因为对每一点 $x$, 它指定一向量 $f(x)$. 方程 (1.5) 代表含有 $n$ 个自治常微分方程的方程组, 简记 ODEs. 下面重温前面引入的用微分方程生成对应系统的发展的几个例子.

**例 1.1**　一个理想摆的动力学是由 Newton 第二定律来刻画:

$$\ddot{\varphi} = -k^2 \sin\varphi,$$

其中

$$k^2 = \frac{g}{l},$$

这里 $l$ 是摆长, $g$ 是重力加速度常数. 若引入 $\psi = \dot{\varphi}$, 则 $(\varphi, \psi)$ 表示相空间 $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ 中的点, 上面的微分方程则可以写为方程 (1.5) 的形式:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi, \\ \dot{\psi} = -k^2 \sin\varphi, \end{cases} \tag{1.6}$$

这里

$$x = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix},$$

而

$$f\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -k^2 \sin\varphi \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

**例 1.2**　一个具 $s$ 个自由度孤立的能量保守的力学系统是由 $2s$ 个Hamilton *方程*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.7}$$

来确定的, $i = 1, 2, \cdots, s$. 这里纯量函数 $H = H(q, p)$ 是 Hamilton *函数*. 摆的运动方程 (1.6) 是 $(q, p) = (\varphi, \psi)$ 的 Hamilton 方程, 而且

$$H(\varphi, \psi) = \frac{\psi^2}{2} - k^2 \cos\varphi. \qquad \diamondsuit$$

**例 1.3**　有两个不同能量状态的量子系统的性态可以用 “观察值” 之间的 Heisenberg *方程*

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi}{dt} = H\psi$$

来刻画, 这里 $\mathrm{i}^2 = -1$,

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{C}^1.$$

实对称矩阵

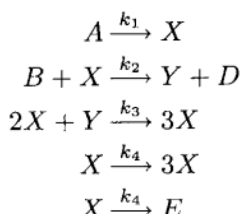
$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}, \quad E_0, A > 0$$

是这个系统的 Hamilton 矩阵, $\hbar$ 是 Plank 常数除以 $2\pi$. 可将 Heisenberg 方程写为下面关于振幅的两个复线性方程

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(E_0 a_1 - A a_2), \\ \dot{a}_2 = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(-A a_1 + E_0 a_2). \end{cases} \tag{1.8}$$

◇

**例 1.4**　作为化学系统的一个例子, 考虑 Brussel 振子(Lefever, Prigogine, 1968). 这个假设系统是由底物通过下面几个不可逆反应步骤组成:



$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_1} X \\ B + X &\xrightarrow{k_2} Y + D \\ 2X + Y &\xrightarrow{k_3} 3X \\ X &\xrightarrow{k_4} 3X \\ X &\xrightarrow{k_4} E \end{aligned}$$

这里的大写字母表示试剂, 箭头上的 $k_i$ 表示对应的反应率, 底物 $D$ 和 $E$ 不再加入反应, $A$ 与 $B$ 假设为常数. 因此, 由质量作用定律, 得下面的两个关于浓度 $[X]$ 和 $[Y]$ 的非线性方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}[X]}{\mathrm{d}t} = k_1[A] - k_2[B][X] - k_4[X] + k_3[X]^2[Y], \\ \dfrac{\mathrm{d}[Y]}{\mathrm{d}t} = k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y]. \end{cases}$$

对变量和时间作线性尺度化得 Brussel 振子方程

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} = bx - x^2 y. \end{cases} \tag{1.9}$$

◇

**例 1.5**　最早的生态系统模型之一是由 Volterra (1931) 提出的两个非线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2, \end{cases} \tag{1.10}$$

其中 $N_1$ 和 $N_2$ 分别是被捕食者和捕食者的个数. 在生态群落里, $\alpha$ 是被捕食者生长率, $\gamma$ 是捕食者的死亡率, $\beta$ 与 $\delta$ 刻画捕食者消耗被捕食者的效率.　◇

在非常一般的条件下, ODEs 的解定义了光滑连续–时间动力系统. 很少几种微分方程可以解析 (用初等函数) 求解. 但是, 对光滑的右端, 按照下面的定理, 保证解存在. 这个定理可以从任何一本常微分方程教科书中找到, 我们只叙述而不给出证明.

**定理 1.4**(存在性、唯一性与光滑依赖性)　考虑常微分方程组

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在开区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 中光滑. 则存在唯一函数 $x = x(t, x_0)$, $x : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 它关于 $(t, x_0)$ 光滑, 且对每一点 $x_0 \in U$, 满足下面条件:

(i) $x(0, x_0) = x_0$;

(ii) 存在一个区间 $\mathcal{J} = (-\delta_1, \delta_2)$, 其中 $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$, 使得对一切 $t \in \mathcal{J}$, 有

$$y(t) = x(t, x_0) \in U,$$

且

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \qquad \square$$

定理 1.4 中, $x(t, x_0)$ 关于 $x_0$ 的光滑性级别与 $f$ 作为 $x$ 的函数的光滑性级别相同. $x = x(t, x_0)$ 作为 $t$ 的函数称为方程从 $x_0$ 出发的解. 对每一点 $x_0 \in U$, 它确定了两个对象: 解曲线

$$Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$$

和轨道, 它是 $Cr(x_0)$ 在状态空间中的投影 (图 1.12):

$$Or(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

两类曲线都由时间 $t$ 参数化, 且按时间增加方向为它们的方向. 非负向量 $f(x_0)$ 在 $x_0$ 切于 $Or(x_0)$, 经过点 $x_0 \in U$ 有唯一轨道通过.

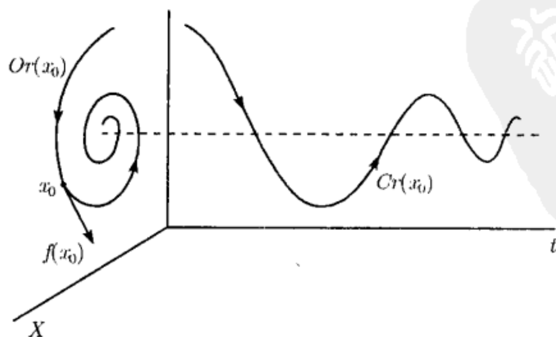



图 1.12　解曲线和轨道

在定理条件下, 轨道在 $t=-\delta_1$(和/或 $t=\delta_2$) 离开 $U$, 或者以后就停留在 $U$ 内, 对后一种情形可取 $\mathcal{J}=(-\infty,+\infty)$.

现在, 用公式

$$\varphi^t x_0 = x(t,x_0)$$

来定义发展算子 $\varphi^t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 它表明通过 $x_0$ 的轨道上的点 $x_0$ 经过 $t$ 单位时间后到达的点. 显然, $\{\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^n,\varphi^t\}$ 是连续–时间动力系统 (验证). 这个系统可逆. 每个发展算子 $\varphi^t$ 对 $x\in U$ 和 $t\in\mathcal{J}$ 都有定义, 且关于 $x$ 光滑, 这里 $\mathcal{J}$ 依赖于 $x_0$. 在实践中, 对应 ODEs 的光滑系统的发展算子 $\varphi^t$ 在固定的时间区间内可按要求的精度数值地求得. 标准的 ODEs 求解程序之一就可完成这个任务.

动力系统理论的主要任务之一是分析由 ODEs 所定义的动力系统的性态. 当然, 可以尝试仅仅计算许多数值轨道 (用 "模拟") 来 "吃力" 地解决这个问题. 但是, 这个理论最有用的方面是不用实际求解这个系统就能预知由 ODEs 所定义的系统的相图的某些属性. 这种信息最简单的例子是平衡点的位置和个数. 事实上, 由 (1.5) 定义的相图的平衡点是它右端给出的向量场的零点:

$$f(x)=0. \tag{1.11}$$

显然, 若 $f(x^0)=0$, 则对所有 $t\in\mathbb{R}^1$ 有 $\varphi^t x_0 = x_0$. 平衡点的稳定性也不用求解这系统而被发现. 例如, 平衡点 $x^0$ 稳定的一个充分条件是由下面的经典定理所提供.

**定理 1.5**(Lyapunov, 1892)　*考虑由*

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

*所定义的动力系统, 其中 $f$ 光滑. 假设它有平衡点 $x^0$(即 $f(x^0)=0$), 记 $f(x)$ 在此平衡点的 Jacobi 矩阵为 $A$, $A=f_x(x^0)$. 如果 $A$ 所有的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\mathrm{Re}\lambda<0$. 那么 $x^0$ 是稳定的.* □

对于线性系统

$$\dot{x}=Ax,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

这个定理容易由这个系统的显式解而得到证明, 其中 $A$ 为 Jordan 标准型. 对一般的非线性系统, 可以在平衡点附近构造 Lyapunov 函数 $L(x)$. 更精确地说, 平移坐标将平衡点移到原点, $x^0=0$. 并寻找某个二次型 $L(x)$. 它的等位面 $L(x)=L_0$ 围绕原点, 使得在充分靠近平衡点 $x^0$ 的向量场, 严格指向每个等位面的内部 (图 1.13). 实际上, Lyapunov 函数 $L(x)$ 对线性系统和非线性系统都是相同的, 且是完全由 Jacobi 矩阵 $A$ 决定. 详细情形可在任何一本标准的微分方程教科书中找到 (见附录 B). 这个定理也可由定理 1.2 推出 (见练习 7).

遗憾的是, 在一般情况下, 单看 (1.5) 的右端不可能告诉我们这个系统是否有环 (周期解). 本书的后面将叙述一些有效方法去证明系统在小扰动下 (例如变化系统所依赖的参数) 环的存在性.

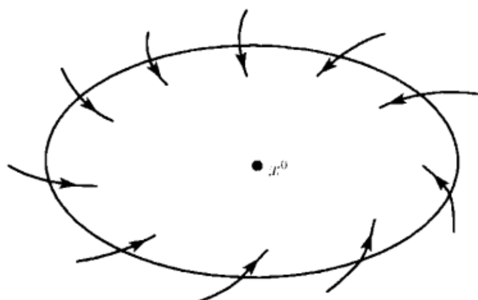



图 1.13　Lyapunov 函数

若系统有光滑的不变流形 $M$, 则系统定义的向量场 $f(x)$ 在每一点 $x \in M$ 都切于 $M$, 其中 $f(x) \neq 0$. 对一个 $(n-1)$ 维光滑流形 $M \subset \mathbb{R}^n$, 它是由某个纯量函数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $g(x) = 0$ 局部定义, 不变性意味着

$$\langle \nabla g(x), f(x) \rangle = 0.$$

这里 $\nabla g(x)$ 表示*梯度*

$$\nabla g(x) = \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)^{\mathrm{T}}.$$

它在 $x$ 与 $M$ 正交.

## 1.5　Poincaré 映射

在研究由微分方程所定义的连续-时间动力系统时, 离散-时间动力系统 (映射) 在很多情形会自然出现. 引入这类映射后允许我们将所考虑的映射的结果用到微分方程上去. 如果所得的映射是定义在比原来系统低维的空间内, 这将是特别有效, 称由 ODEs 引入的这类映射为 Poincaré 映射.

### 1.5.1　时间–移位映射

由连续-时间系统 $\{\mathbb{R}^1, X, \varphi^t\}$ 提取离散-时间动力系统的最简单方法是固定某个 $T_0 > 0$, 在 $X$ 上考虑由映射 $f = \varphi^{T_0}$ 的迭代所产生的动力系统. 这个映射称为沿着 $\{\mathbb{R}^1, X, \varphi^t\}$ 的轨道的 $T_0$ *移位映射*. $\{\mathbb{R}^1, X, \varphi^t\}$ 的任一不变集是映射 $f$ 的不变集. 例如, $f$ 的孤立不动点, 其位置就是 $\{\mathbb{R}^1, X, \varphi^t\}$ 的孤立平衡点.

在这一方面, 下面的逆问题更为有趣. 是否有可能去构造一个 ODEs 系统, 使得它的 $T_0$ 移位映射 $\varphi^{T_0}$ 生成已给光滑性的可逆的映射 $f$? 若要求离散–时间系统的维数和连续–时间系统的维数相同, 则答案是否定的. 最简单的反例可由线性纯

量映射

$$x \mapsto f(x) = -\frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{1.12}$$

给出. (1.12) 中的映射有单个不动点 $x^0 = 0$, 它是稳定的. 显然, 没有一个纯量 ODE

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{1.13}$$

使得它的发展算子 $\varphi^{T_0} = f$. 事实上, $x^0 = 0$ 必须是 (1.13) 的平衡点, 因此, 它的轨道中没有一条可以 "跳过" 原点而像 (1.12) 那样. 在第 9 章将回到这个逆问题, 那里将详细说明构造常微分方程系统来近似某些映射.

**注** 如果允许流形上的 ODE 系统, 则逆问题总可以解决. 特别, 考虑映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 假设它和它的逆光滑, 取一层 (layer)(见图 1.14)

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n : t \in [0, T_0]\},$$

再将 $X$ 的 "顶面" 上的点 $(T_0, x)$ 和 "底面" 上的点 $(0, f(x))$ 恒同 ("粘合"). 因此, 所构造的空间 $X$ 是 $(n+1)$ 维流形, 其上的坐标为 $(t \bmod T_0, x)$. 现在, 在此流形上给定一个自治 ODEs 系统

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

称为*扭扩*. (1.14) 的轨道 (看作 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ 的子集) 是层内的直线, 它们从层的顶面 "跳" 到 "底面" 而中断. 显然, 沿着 (1.14) 的轨道的 $T_0$ 移位 $\varphi^{T_0}$ 在它的不变超平面 $\{t = 0\}$ 上与映射 $f$ 重合.

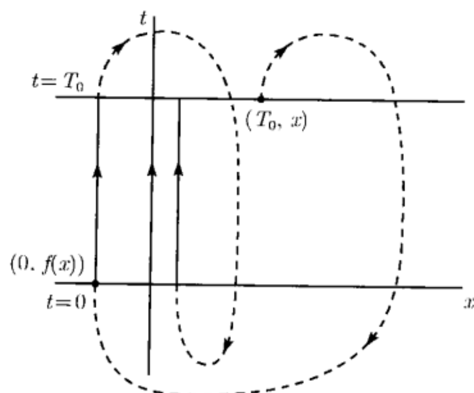



图 1.14 扭扩流

假设 $k > 0$ 满足方程 $e^{kT_0} = 2$, 对应于映射 (1.12) 的扭扩系统有与定义在一个 Mobius 带(宽度为无穷) 上的系统

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = -kx \end{cases}$$

有相同的轨道结构. 这个 Mobius 带是把点 $(T_0, x)$ 与点 $(0, -x)$恒同而得到 (见图 1.15). 在这两个系统中, $x = 0$ 对应于一个周期为 $T_0$, 乘子为 $\mu = -\dfrac{1}{2}$ 的稳定极限环. ◇

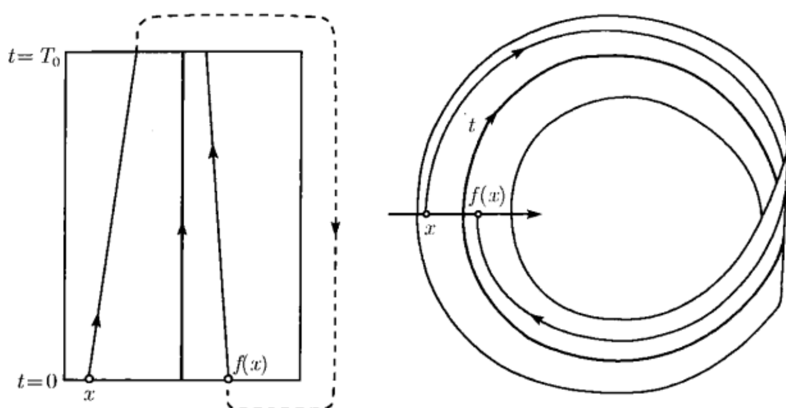



图 1.15　Mobius 带上的稳定极限环

### 1.5.2　Poincaré 映射和环的稳定性

考虑由

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.15}$$

定义的连续–时间动力系统, $f$ 光滑. 假设 (1.15) 有周期轨道 $L_0$. 取点 $x_0 \in L_0$, 并在此点引入这个环的*截面* $\Sigma$(如图 1.16). 截面 $\Sigma$ 是与 $L_0$ 相交于非零角的 $n-1$ 维光滑超曲面. 由于 $\Sigma$ 的维数比状态空间的维数少 1, 就说超曲面 $\Sigma$ 是 "余维"1, $\text{codim}\Sigma = 1$. 假设 $\Sigma$ 在点 $x_0$ 附近是由光滑纯量函数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, g(x_0) = 0$ 的零位面

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$$

所定义. 非零交角 ("横截性") 意味着梯度

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

在 $x_0$ 与 $L_0$ 不正交, 即

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中标准数量积. $\Sigma$ 最简单的选取是取在 $x_0$ 垂直于环 $L_0$ 的超平面. 这个截面显然是线性函数

$$g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle$$

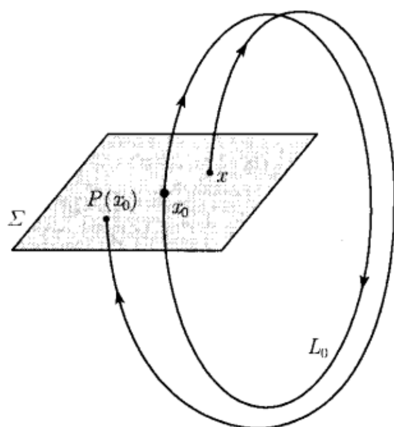



图 1.16　和环相应的 Poincaré 映射

的零位面.

现在考虑 (1.15) 在环 $L_0$ 附近的轨道. 环本身是一条从 $\Sigma$ 上一点出发又回到 $\Sigma$ 上同一点 $x_0 \in \Sigma$ 的轨道. 因为 (1.15) 的解光滑依赖于初始点 (定理 1.4), 从充分靠近 $x_0$ 的点 $x \in \Sigma$ 出发的轨道要回到 $x_0$ 附近的某一点 $\tilde{x} \in \Sigma$. 此外, 附近的轨道也与 $\Sigma$ 横截相交. 这样, 映射 $P : \Sigma \to \Sigma$,

$$x \mapsto \tilde{x} = P(x)$$

被构造好了.

**定义 1.9**　映射 $P$ 称为与环 $L_0$ 相应的 Poincaré 映射.

Poincaré 映射 $P$ 是局部定义的, 与 (1.15) 右端有相同的光滑性, 且在 $x_0$ 附近可逆, 其可逆性是由 (1.15) 定义的动力系统的可逆性得知. 逆映射 $P^{-1} : \Sigma \to \Sigma$ 的构造如下: 穿过 $\Sigma$ 的轨道按时间倒回延伸直至与截面再次相交, 交点 $x_0$ 是 Poincaré 映射的不动点: $P(x_0) = x_0$.

在 $\Sigma$ 上引入局部坐标 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ 使得 $\xi = 0$ 对应于 $x_0$. 于是 Poincaré 映射可由局部定义的映射 $P : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ 来刻画, 此映射将对应于 $x$ 的 $\xi$ 变换到对应于 $\tilde{x}$ 的 $\tilde{\xi}$:

$$P(\xi) = \tilde{\xi}.$$

$\mathbb{R}^{n-1}$ 的原点 $\xi = 0$ 是映射 $P : P(0) = 0$ 的不动点: $P(0) = 0$. 环 $L_0$ 的稳定性等价于 Poincaré 映射不动点 $\xi_0 = 0$ 的稳定性. 因此, 若 $P$ 的 $(n-1) \times (n-1)$Jacobi 矩阵

$$A = \left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}$$

的所有特征值 (乘子)$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ 都落在单位圆 $|\mu| = 1$ 的内部, 则环是稳定的 (见定理 1.2).

人们或许会问, 乘子是否依赖于 $L_0$ 上的 $x_0$、截面 $\Sigma$ 或截面上坐标 $\xi$ 的选择? 如果是这样, 那么用乘子来确定稳定性就将失效或者甚至不可能.

**引理 1.3**　*与环 $L_0$ 相应的映射 $P$ 的 Jacobi 矩阵 $A$ 的乘子 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ 与 $L_0$ 上的点 $x_0$、截面 $\Sigma$, 以及其上的局部坐标无关.*

**证明**　设 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 分别是同一环 $L_0$ 上点 $x^1$ 和 $x^2$ 的两个截面 (图 1.17, 为简单起见, 用平面情形来说明). 我们允许点 $x^{1,2}$ 可重合, 令截面 $\Sigma_{1,2}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中同一个曲面, 只是它们的参数化不同. 用 $P_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1$ 和 $P_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 表示对应的 Poincaré 映射. 假设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ 为 $\Sigma_1$ 上的坐标, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1})$ 为 $\Sigma_2$ 上的坐标, 使得 $\xi = 0$ 对应于 $x^1$, $\eta = 0$ 对应于 $x^2$. 最后, 用 $A_1$ 和 $A_2$ 分别记 $P_1$ 和 $P_2$ 相应的 Jacobi 矩阵.

与构造 Poincaré 映射相同的叙述, 沿着 (1.15) 的轨道存在局部定义, 光滑且可逆的相应的映射: $Q : \Sigma_1 \to \Sigma_2$:

$$\eta = Q(\xi).$$

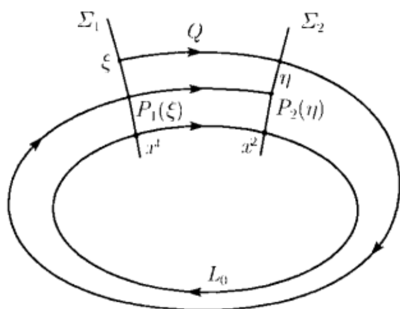



图 1.17　环 $L_0$ 的两个截面

显然, 有

$$P_2 \circ Q = Q \circ P_1,$$

或者, 对所有充分小 $\|\xi\|$(见图 1.17), 用坐标

$$P_2(Q(\xi)) = Q(P_1(\xi)).$$

由于 $Q$ 可逆, $P_1$ 与 $P_2$ 有如下关系:

$$P_1 = Q^{-1} \circ P_2 \circ Q.$$

关于 $\xi$ 微分此方程, 并应用链规则, 有

$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}Q^{-1}}{\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\xi}.$$

在 $\xi = 0$ 取值得矩阵方程

$$A_1 = B^{-1} A_2 B,$$

其中

$$B = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}$$

为非奇异的 (即 $\det B \neq 0$). 因此, $A_1$ 与 $A_2$ 的特征方程重合, 它们的乘子也一样. 事实上,

$$\det(A_1 - \mu I_n) = \det(B^{-1}) \det(A_2 - \mu I_n) \det(B) = \det(A_2 - \mu I_n),$$

这是因为矩阵乘积的行列式等于各矩阵行列式的积, 且 $\det(B^{-1})\det(B)=1$. □

按引理 1.3, 可以用任何一个截面去计算环的乘子, 所得结果是相同的.

下面谈及的问题是环的乘子与有此环的定义动力系统的微分方程 (1.15) 之间的关系. 假设 $x^0(t)$ 为 (1.15) 对应于环 $L_0$ 的周期解,$x^0(t+T_0)=x^0(t)$, 将 (1.15) 的解表为形式

$$x(t)=x^0(t)+u(t),$$

这里 $u(t)$ 是周期解的偏差. 于是

$$\dot{u}(t)=\dot{x}(t)-\dot{x}^0(t)=f(x^0(t)+u(t))-f(x^0(t))=A(t)u(t)+O(\|u(t)\|^2).$$

去掉项 $O(\|u\|^2)$, 得线性 $T_0$ 周期系统

$$\dot{u}=A(t)u,\quad u\in\mathbb{R}^n, \tag{1.16}$$

其中 $A(t)=f_x(x^0(t)), A(t+T_0)=A(t)$.

**定义 1.10** *系统 (1.16) 称为环 $L_0$ 的变分方程.*

变分方程是环附近扰动发展所产生的系统的主要 (线性) 部分. 自然, 环的稳定性依赖于变分方程的性质.

**定义 1.11** *依赖于时间的矩阵 $M(t)$ 称为 (1.15) 的基本解矩阵, 如果它满足*

$$\dot{M}=A(t)M$$

*和初始条件 $M(0)=I_n$, $I_n$ 为 $n\times n$ 单位矩阵.*

(1.16) 的任何解 $u(t)$ 满足

$$u(T_0)=M(T_0)u(0)$$

(证明). 矩阵 $M(T_0)$ 称为环的**单值矩阵**. 下面的 Liouville 公式表示用矩阵 $A(t)$ 表达单值矩阵的行列式

$$\det M(T_0)=\exp\left\{\int_0^{T_0}\mathrm{tr}A(t)\mathrm{d}t\right\}. \tag{1.17}$$

**定理 1.6** *单值矩阵 $M(T_0)$ 有特征值*

$$1,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n-1},$$

*其中 $\mu_i$ 是与环 $L_0$ 相应的 Poincaré 映射的乘子.*

**证明概要** 假设 $\varphi^t$ 是环 $L_0$ 附近的由系统 (1.15) 所确定的发展算子 (流). 考虑映射

$$\varphi^{T_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n.$$

显然, $\varphi^{T_0}x_0 = x_0$, 其中 $x_0$ 是环上的初始点, 假设它位于原点 $x_0 = 0$. 这个映射光滑, 且在 $x_0$ 的 Jacobi 矩阵和单值矩阵相同:

$$\left.\frac{\partial \varphi^{T_0} x}{\partial x}\right|_{x=x_0} = M(T_0).$$

我们要求矩阵 $M(T_0)$ 有特征值 $\mu_0 = 1$. 事实上, $v(t) = \dot{x}^0(t)$ 是 (1, 6) 的解. 因此, $M(T_0)$ 将 $q = v(0) = f(x_0)$ 变换到它自己

$$M(T_0)q = q.$$

若没有与 $q$ 相应的广义特征向量, 则单值矩阵 $M(T_0)$ 有一个由 $q$ 张成的一维不变子空间和一个 $n-1$ 维不变补子空间 $\Sigma : M(T_0)\Sigma = \Sigma$. 取子空间 $\Sigma$ 为环在 $x_0 = 0$ 的截面. 可以看到, 由 $M(T_0)$ 定义的线性变换在 $\Sigma$ 上的限制是系统 (1.15) 在 $\Sigma$ 上定义的 Poincaré 映射 $P$ 的线性化. 因此, 它们的特征值 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ 重合.

如果有与 $q$ 相应的广义特征向量, 定理仍成立, 不过证明变得更复杂, 这里就省略了. □

按照 (1.17), $M(T_0)$ 所有特征值的积可表示为

$$\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1} = \exp\left\{\int_0^{T_0} (\mathrm{div}\ f)(x^0(t))\mathrm{d}t\right\}, \tag{1.18}$$

这里, 按定义, 向量场的散度为

$$(\mathrm{div}\ f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}.$$

因此, 任何一个环的所有乘子的积是正的. 注意, 在平面情形 ($n = 2$), 如果对应环的周期解明显知道, 公式 (1.18) 允许我们只计算乘子 $\mu_1$, 但是, 这主要是一个理论工具, 因为非线性系统的周期解很少能解析地知道.

### 1.5.3 周期强迫系统的 Poincaré 映射

在一些应用中, 系统受到外来周期强迫力的作用, 其性态可由时间–周期微分方程

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \tag{1.19}$$

来描述, 其中 $f(t + T_0, x) = f(t, x)$. 系统 (1.19) 在柱面流形 $X = \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n$ 上定义了一个坐标为 $(t(\mathrm{mod} T_0), x)$ 的自治系统

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = f(t, x). \end{cases} \tag{1.20}$$

在此空间 $X$ 中取 $n$ 维截面 $\Sigma = \{(x,t) \in X : t = 0\}$. 可取 $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\Sigma$ 上的坐标. 显然, (1.20) 所有轨道与 $\Sigma$ 横截相交. 假设 (1.20) 的解 $x(t, x_0)$ 在区间 $t \in [0, T_0]$ 上存在, 可引入 Poincaré 映射

$$x_0 \mapsto P(x_0) = x(T_0, x_0).$$

换句话说, 我们必须取初始点 $x_0$ 且在它的周期 $T_0$ 上积分系统 (1.19) 以得到 $P(x_0)$. 由此构造, 离散–时间动力系统 $\{\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n, P^k\}$ 被定义. $P$ 的不动点显然对应于 (1.19) 的 $T_0$ 周期解. $P$ 的 $N_0$ 环表示 (1.19) 的 $N_0T_0$ 周期解 (亚调和解). 这些周期解的稳定性显然由对应的不动点和环的稳定性所确定. (1.19) 更为复杂的解也可由 Poincaré 映射来研究. 第 9 章将详细分析一个受周期 (季节) 外力作用的捕食–被捕食系统, 它具有不同的亚调和解和混沌解.

## 1.6 练　　习

1. 重温符号动力系统和 Smale 马蹄

(a) 在符号动力系统 $\{\mathbb{Z}, \Omega_2, \sigma^k\}$ 中计算 $k$ 周期环的个数 $N(k)$.

(b) 解释如何寻找马蹄映射 $f$ 在 $S$ 中的两个不动点的坐标. 证明: 每一个不动点都有一个乘子在单位圆 $|\mu| = 1$ 内, 另一个在单位圆外.

2. Hamilton 系统

(a) 证明: 沿着 Hamilton 系统 $\dot{H} = 0$ 的轨道, Hamilton 函数是常数.

(b) 证明: 由 (1.6) 所刻画的摆的平衡点 $(\varphi, \psi)$ 是 Lyapunov 稳定的. 提示: 系统 (1.6) 是 Hamilton 系统, 在 (0, 0) 附近, Hamilton 函数 $H(\varphi, \psi) =$ 常数是闭的等位线. 平衡点是否渐近稳定?

3. 量子振动

(a) 积分刻画具两个状态的最简单的线性量子系统 (1.8), 指出找到系统在给定状态的概率 $p_i = |a_i|^2$ 关于时间 $t$ 周期振动.

(b) 对 $p_1 + p_2$ 的性态又如何?

4. 重温 Brussel 振子

(a) 从浓度 $[X], [Y]$ 的系统导出 Brussel 系统 (1.9).

(b) 求出平衡点 $(x_0, y_0)$ 位置, 并求出使其稳定的参数 $(a, b)$ 变化的充分条件.

5. 重温 Volterra 系统

(a) 证明: 对变量和时间进行线性尺度化, 可将系统 (1.10) 化为只含一个参数 $\gamma$ 的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + xy. \end{cases}$$

(b) 找出这个尺度化系统的所有平衡点.

(c) 验证这尺度化系统在正象限 $\{(x,y):x,y>0\}$ 内的轨道与 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{1}{y}-1, \\ \dot{y}=-\dfrac{\gamma}{x}+1 \end{cases}$$

的轨道重合. 找出 Hamilton 函数. 提示: 这两个系统的向量场只差因子 $\mu(x,y)=xy$, 它在第一象限内为正.

(d) 考虑 (a)~(c), 证明: Volterra 系统在第一象限内所有的非平衡点轨道都是闭的, 因此, 它描述了被捕食者和捕食者的个数的周期振动.

6. 显式 Poincaré 映射

(a) 求证: 对 $\alpha>0$, 平面极坐标系统

$$\begin{cases} \dot{\rho}=\rho(\alpha-\rho^2), \\ \dot{\varphi}=1 \end{cases}$$

有显式解

$$\rho(t)=\left(\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\rho_0^2}-\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right)^{-1/2}, \quad \varphi(t)=\varphi_0+t.$$

(b) 画出这个系统的相图, 并证明对每一个 $\alpha>0$ 它有唯一极限环.

(c) 计算极限环的乘子 $\mu_1$:

(i) 应用上面的解, 计算显式结构的 Poincaré 映射 $\rho\mapsto P(\rho)$ 在不动点 $\rho_0=\sqrt{\alpha}$ 关于 $\rho$ 的导数 (Wiggins, 1990; p66-67).

(ii) 借助在环上散度的积分, 用公式 (1.18) 表示 $\mu_1$. 提示: 用极坐标, 散度是不变的.

7. Lyapunov 定理. 用定理 1.2 证明定理 1.5.

(a) 把平衡点附近的系统写为

$$\dot{x}=Ax+F(x),$$

其中 $F(x)=O(\|x\|^2)$ 是光滑的非线性函数.

(b) 对发展算子 $\varphi^t$ 应用常数变易公式

$$\varphi^t x=\mathrm{e}^{At}x+\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}F(\varphi^\tau x)\mathrm{d}\tau,$$

求证: 沿着轨道的单位时间移位有表达式

$$\varphi^1 x=Bx+O(\|x\|^2),$$



其中 $B = e^A$.

(c) 考虑到 $\mu_k = e^{\lambda_k}$, 这里 $\mu_k$ 和 $\lambda_k$ 分别是矩阵 $B$ 和 $A$ 的特征值, 最后推得证明.

## 1.7 附录 A：由反应扩散方程定义的无穷维动力系统

正如在例 1.4 和例 1.5 中已经看到, 空间分布系统的状态是由函数空间 $X$ 中的函数来刻画. 这种空间的维数是无穷的. 函数 $u \in X$ 满足某些边界条件和光滑性条件, 其发展通常是由偏微分方程系统 (PDEs) 来确定. 在这个附录中, 我们简短地讨论如何用这类方程的最特殊类型, 即反应扩散方程来定义无穷维动力系统.

化学反应器在时间 $t$ 的状态可由给定的向量函数 $c(x,t) = (c_1(x,t), c_2(x,t), \cdots, c_n(x,t))^{\mathrm{T}}$ 来定义, 其中 $c_i$ 是反应底物在反应区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 内点 $x$ 附近的浓度. 这里 $m = 1, 2, 3$, 它们依赖于反应器的几何, 假定 $\Omega$ 是有光滑边界 $\partial\Omega$ 的闭区域. 浓度 $c_i(x,t)$ 满足某个依赖于边界条件的问题, 例如, 所有试剂的浓度在边界保持常数:

$$c(x,t) = c_0, \quad x \in \partial\Omega.$$

定义边值的偏离 $s(x,t) = c(x,t) - c_0$, 就可把上面的情形化为 Dirichlet 零边界条件:

$$s(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

如果试剂不能渗透反应器的边界, 则可用零 Neuman(零流量) 条件:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

其中左端是在边界上的法向导数, 方向指向边界的内部.

化学系统的发展可用对 $u(x,t)(u = s$ 或 $c)$ 写成向量形式的反应扩散方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D(\Delta u)(x,t) + f(u(x,t)) \tag{A.1}$$

来模拟. 其中 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 光滑, $D$ 是具正系数的对角扩散矩阵, $\Delta$ 是熟知的 Laplace 算子

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

(A.1) 右端的第一项刻画试剂的扩散, 第二项是它们局部的交互反应. 函数 $u(x,t)$ 满足上面列举的诸边界条件之一, 例如 Dirichlet 条件:

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{A.2}$$

**定义 1.12**　函数 $u=u(x,t)$, $u:\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$ 称为问题 (A.1), (A.2) 的古典解, 如果它连续可微, 关于 $t$ 至少一次可微, 关于 $x$ 两次可微, 且在其定义域内满足 (A.1) 和 (A.2).

对任一二次连续可微的初始函数 $u_0(x)$,

$$u_0(x)=0,\quad x\in\partial\Omega, \tag{A.3}$$

问题 (A.1), (A.2) 有定义在 $x\in\Omega$ 和 $t\in[0,\delta_0)$ 上的唯一古典解 $u(x,t)$, 其中 $\delta_0$ 依赖于 $u_0$ 且满足 $u(x,0)=u_0(x)$. 此外, 这个古典解实际上对 $0<t<\delta_0$ 关于 $(x,t)$ 无穷多次可微. 如果以 Neuman 边界条件代替 (A.2), 同样性质也成立.

现在引入所有在 $\Omega$ 内二次连续可微, 在边界 $\partial\Omega$ 上满足 Dirichlet 条件 (A.3) 的向量函数所构成的空间 $X=C_0^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$. 上面的结果意味着反应扩散系统 (A.1), (A.2) 定义了一个连续–时间动力系统 $\{\mathbb{R}^1_+,X,\varphi^t\}$, 其中发展算子为

$$(\varphi^t u_0)(x)=u(x,t), \tag{A.4}$$

这里 $u(x,t)$ 是满足 $u(x,0)=u_0(x)$ 的 (A.1), (A.2) 的古典解. 它也在 $X_1=C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 上定义了动力系统, $X_1$ 是由 $\Omega$ 内无穷多次连续可微且在边界 $\partial\Omega$ 满足 Dirichlet 条件的所有向量函数构成的函数空间.

因此, 平衡点、环的概念可应用到反应扩散方程 (A.1). 显然, 系统的平衡点是由满足

$$D(\Delta u)(x)+f(u(x))=0 \tag{A.5}$$

和相应边界条件的与时间无关的向量函数来刻画, 例如, 一个平凡的满足 (A.2) 的 (A.5) 的空间齐次解是*局部系统*

$$\dot{u}=f(\varphi),\quad u\in\mathbb{R}^n \tag{A.6}$$

的平衡点.

(A.5) 的非平凡的空间非齐次解通常称为*耗散结构*. 空间齐次与非齐次平衡点可以是稳定或不稳定. 在稳定情形, 平衡解的所有 (光滑) 小扰动 $v(x)$ 按时间衰减. 环 (即 (A.1) 的满足适当边界条件的时间周期解) 也是有可能的, 它们可以是稳定也可以是不稳定. 平面圆周区域 $\Omega$ 内反应扩散方程中的*驻波*和*旋转波*就是这种周期解的例子.

直到现在, 情况看来还有点简单且同有限维情形相平行. 但是, 当我们试着在 $X=C_0^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 中引入距离时就会有某些困难. 例如, 这个空间在 "积分范数"

$$\|u\|^2=\int_\Omega\sum_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\|i|\leqslant 2}}\left|\frac{\partial^{|i|}u_j(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|^2\mathrm{d}\Omega \tag{A.7}$$

下是不完备的, 这里 $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_m$. 换句话说, Cauchy 序列按此范数可收敛于一个不是二次可微的函数 (甚至可以无导数), 因此它就不属于 $X$. 由于这一性质在很多场合很重要, 一个称为完备化的方法允许我们对任一给定范数去构造一个完备空间. 宽松地说, 把所有 Cauchy 序列的极限都加到 $X$. 更精确些, 称为两个 Cauchy 序列是等价的, 如果它们对应元素之间的距离趋于零. Cauchy 序列的等价类视为新空间 $H$ 的点, 原来范数可扩展到 $H$, 使它成为完备的赋范空间, 这种空间称为 Banach 空间. 空间 $X$ 可以解释为 $H$ 的子集. 如果所得空间是 Hilbert 空间, 那也是有用的, 就是说范数是由内积产生.

因此, 可以尝试用完备空间 $H$ 之一作为反应扩散系统的新状态空间. 但是, 由于 $H$ 中包含使 (A.1) 的扩散部分没有定义的函数, 额外的工作是要做的. 我们也要小心系统的反应部分 $f(u)$ 在 $H$ 上定义的光滑映射. 不再详细论述, 只指出有可能证明动力系统 $\{\mathbb{R}^1_+, H, \psi^t\}$ 的存在性, 使得 $\psi^t u$ 对一切 $u \in H$ 和 $t \in [0, \delta(u))$ 有定义且对 $u$ 连续, 且若 $u_0 \in X \subset H$, 则 $\psi^t u_0 = \varphi^t u_0$, 其中 $\varphi^t u_0$ 是 (A.1), (A.2) 的一个古典解.

平衡点和其他解的稳定性可在空间 $H$ 中研究. 若一个平衡点在 $H$ 内稳定, 则它在光滑扰动下也稳定. 我们可以由反应扩散系统 (A.1) 的线性部分导出平衡点在 $H$(或 $X$) 中稳定的充分条件. 例如, 叙述一个在区间 $\Omega = [0, \pi]$ 上满足 Dirichlet 边界条件的反应扩散系统的平凡 (齐次) 平衡点的稳定性充分条件 (类似于定理 1.5).

**定理 1.7** *考虑反应扩散系统*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \tag{A.8}$$

*其中 $f$ 光滑, $x \in [0, \pi]$, 满足边界条件*

$$u(0) = u(\pi) = 0. \tag{A.9}$$

*假设 $u^0 = 0$ 是齐次平衡点, $f(0) = 0$, $A$ 是局部系统对应平衡点的 Jacobi 矩阵, $A = f_u(0)$. 假定 $n \times n$ 矩阵*

$$M_k = A - k^2 D$$

*的特征值对所有的 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 都具有负实部.*

*于是, $u^0 = 0$ 是动力系统 $\{\mathbb{R}^1_+, H, \psi^t\}$ 的稳定平衡点. 此系统是由系统 (A.8), (A.9) 在按范数 (A.7) 对 $C_0^2([0, \pi], \mathbb{R}^n)$ 完备化了的空间 $H$ 生成的.* □

类似的定理可对 $\Omega \subset \mathbb{R}^m, m = 2, 3$, 满足 Dirichlet 边界条件的系统进行证明. 这只需用 $\kappa_k$ 代替 $k^2$ 并稍作修改即可, 这里 $\{\kappa_k\}$ 是满足

$$(\Delta v_k)(x) = -\kappa_k v_k(x)$$

的所有正数, $v_k = v_k(x)$ 满足 Dirichlet 边界条件. 对 Neumann 边界条件的修改可直接进行.

## 1.8　附录 B：文献评注

"动力系统" 这个名词原先仅仅指由古典力学导出的微分方程所描述的力学系统. 这类动力系统的基本结果在 19 世纪末被 Lyapunov 与 Poincaré 所得到. 他们的研究被 Dulac(1923) 和 Birkhoof(1927) 以及其他人所继续. Nemystskii 和 Stepanov(1949)①以及 Coddington 和 Levinson(1955) 详细地处理了由微分方程定义的动力系统在那时所知道的性质. 后来, 这一概念在科学的不同分支由 ODEs, PDEs 和明确定义的迭代映射所刻画的不同发展过程的研究中明显变得很有用. 近代动力系统的理论起始于 Kolmogorov(1957), Smale(1963, 1966, 1967) 和 Anosov (1967) 等的工作. 动力系统的现代理论的一般介绍可在 Katok 和 Hasselblatt(1995) 中找到. 不过, 建议读者先读 Hasselblatt 和 Katok(2003). 今天, 有关动力系统的文献很多. 这里不准备作综合介绍, 仅仅给出各章的文献评注.

由 Smale (1963, 1967) 提出的马蹄微分同胚在许多书中得到了论述. 例如, Nitecki (1971), Gukenheimer 和 Holmes (1983), Wiggins (1990) 以及 Arrowsmich 和 Place (1990). 但是, 它和有关课题的最好叙述仍属于 Moser (1973). 一个等价于 (1.4) 的由 Hénon(1976) 引入的映射是具奇怪吸引子的最简单的映射. Hénon 映射可能是研究具复杂动力学的最好的平面映射.

常微分方程及其有关的动力系统的一般性质在引用的 Nemytski 和 Stepanov 的书中有叙述. 值得提到的教科书有 Potryagin(1962), Arnold (1973)②和 Hirsch 和 Smale (1974)③. 后面三本书包含了常系数和时变系数的线性微分方程广泛的分析. Hartman (1964) 处理了 Poincaré 映射、乘子和极限环的稳定性之间的关系.

无穷维动力系统的研究受到流体动力学、空气动力学以及化学和核子工程学的刺激. 线性无穷维动力系统, 大家知道的如 "连续 (解析) 半群" 是在泛函分析中研究的 (例如, 见 Hille 和 Phillips (1957), Balakrishnan(1976)), 或者 Richtmyer(1978, 1981) 的更偏重物理方面的教科书. 无穷维动力系统也自然地由研究时滞微分方程产生 (见 Hale(1971), Hale 和 Verduyn Lunel(1993) 以及 Diekmann, van Gils,Verduyn Lunel 和 Walther(1995)). 非线性无穷维动力系统是一个发展很快的领域. 早期的结果可在 Marsden 和 McCracken(1976), Carr(1981) 以及 Hery(1981) 等的有关章节中找到叙述. 近代处理和进一步文献可在 Temam (1997) 和 Robinson(2001) 中找到.

① 本书的中译本《微分方程定性理论》(上下册). 王柔怀, 伍卓群译. 科学出版社出版. —— 译者注

② 中译本《常微分方程》. 沈家骐等译. 科学出版社出版 (1985) —— 译者注

③ 本书的第二版由 Hirsch, Smale 和 Devaney 所著, 2004 年出版. 书名改为《微分方程、动力系统与混沌引论》. 内容比第一版有很大的更动, 特别, 增加了离散动力系统和混沌理论.—— 译者注

# 第2章 动力系统的拓扑等价性、分支与结构稳定性

这一章引入并讨论对全书都有用的一些基本概念：动力系统的拓扑等价性及其分类、分支与分支图以及分支的拓扑规范形. 最后一节叙述结构稳定性这一更抽象的概念. 本章只讨论状态空间 $X = \mathbb{R}^n$ 中的动力系统.

## 2.1 动力系统的等价性

我们要研究动力系统性态的一般 (定性) 面貌, 特别, 研究它们性态可能类型的分类和比较不同动力系统的性态. 任何对象的比较都基于等价关系①, 应用等价关系可以定义对象的等价类, 并研究这些类之间的传递. 因此, 必须说明什么时候定义的两个动力系统 "定性相似" 或者等价. 这样的定义必须适合一般的直觉准则. 例如, 自然希望两个等价系统具有相同个数和相同稳定性类型的平衡点和环. 这些不变集的 "相对位置" 和它们的吸引区域的形状对等价系统也应该相似. 换句话说, 两个系统等价, 如果它们的相图 "定性相似", 即如果一个相图可以从另一个经连续变换得到 (见图 2.1).

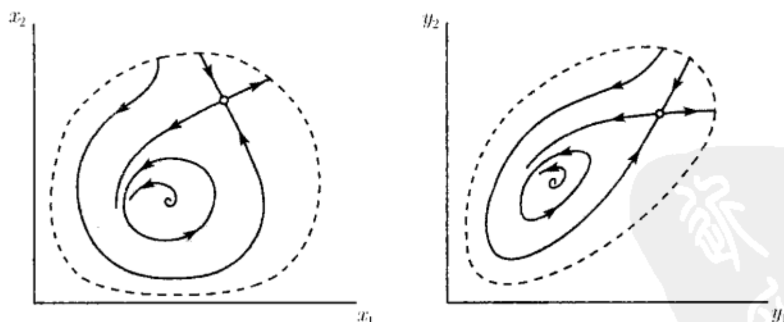



图 2.1 拓扑等价性

**定义 2.1** 动力系统 $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ 称为拓扑等价于动力系统 $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$, 如果存在同胚 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 把第一个系统的轨道映上为第二个系统的轨道, 且保持时

① 回忆两个对象之间的关系 $(a \sim b)$ 称为等价, 如果它是自反的 $(a \sim a)$、对称的 (由 $a \sim b$ 得 $b \sim a$) 和传递的 (由 $a \sim b$ 及 $b \sim c$ 得 $a \sim c$).

间方向.

同胚是一个可逆映射, 使得映射和逆映射都连续. 拓扑等价性的定义可以推广到更一般的状态空间: **完备的距离空间**, 特别是 Banach 空间. 当状态空间是 $\mathbb{R}^n$ 中有限维光滑流形, 例如, 二维环面 $\mathbb{T}^2$ 或球面 $\mathbb{S}^2$ 时, 这个定义也有意义. 拓扑等价系统的相图通常也称为拓扑等价.

上面的定义用在连续–时间系统和离散–时间系统. 但是, 在离散–时间情形, 可以在等价系统的对应映射之间得到明显的关系. 事实上, 设

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

和

$$y \mapsto g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

是两个拓扑等价的离散–时间可逆动力系统 ($f = \varphi^1, g = \psi^1$ 是光滑可逆映射). 考虑系统 (2.1) 从某一点 $x$ 出发的轨道:

$$\cdots, f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \cdots$$

和系统 (2.2) 从点 $y$ 出发的轨道

$$\cdots, g^{-1}(y), y, f(y), f^2(y), \cdots.$$

由拓扑等价性知, 若 $x$ 和 $y$ 由同胚 $h, y = h(x)$ 所联系, 则映射 $h$ 把第一个系统的轨道映上为第二个系统的轨道. 用符号表示为

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ y & \xrightarrow{g} & g(y) \end{array}$$

因此, 对一切 $x \in \mathbb{R}^n, g(y) = h(f(x))$, 或者 $g(h(x)) = h(f(x))$, 可写为

$$f(x) = h^{-1}(g(h(x)),$$

这是因为 $h$ 可逆. 应用复合映射符号可将最后一个方程写为更紧凑的形式

$$f = h^{-1} \circ g \circ h. \tag{2.3}$$

**定义 2.2**　对某同胚 $h$, 称满足 (2.3) 的两个映射 $f$ 和 $g$ 为共轭.

因此, 通常称拓扑等价的离散–时间动力系统为共轭系统. 若 $h$ 和 $h^{-1}$ 都是 $C^k$ 映射, 则称映射 $f$ 和 $g$ 为 $C^k$共轭. 对 $k \geqslant 1$, $C^k$共轭映射 (以及对应的系统) 称为

光滑共轭或微分同胚. 在 $x$ 和 $y$ 的两个不同坐标系下, 当 $y=h(x)$ 作为光滑的坐标变换时, 两个微分同胚映射 (2.1) 与 (2.2) 可视作同一映射. 因此, 微分同胚的离散–时间动力系统实际上是不可区分的.

现在考虑两个连续–时间拓扑等价系统:

$$\dot{x}=f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

和

$$\dot{y}=g(y), \quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

其中右端光滑. 设 $\varphi^t$ 和 $\psi^t$ 为对应的流. 在这种情况下, $f$ 和 $g$ 之间没有如公式 (2.3) 那种简单关系. 然而, 存在 (2.4) 和 (2.5) 之间拓扑等价的两类特殊情形, 它们可解析表达, 下面给出解释.

假设 $y=h(x)$ 是一可逆映射 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 它和它的逆都光滑 ($h$ 是微分同胚) 且对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$f(x)=M^{-1}(x)g(h(x)), \tag{2.6}$$

其中

$$M(x)=\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

是 $h(x)$ 在点 $x$ 的 Jacobi 矩阵. 则系统 (2.4) 拓扑等价于系统 (2.5). 事实上, 系统 (2.5) 是系统 (2.4) 经过光滑坐标变换 $y=h(x)$ 得到的. 因此, $h$ 将 (2.4) 的解映为 (2.5) 的解

$$h(\varphi^t x)=\psi^t h(x),$$

且它起到定义 2.1 中的同胚作用.

**定义 2.3**　对某微分同胚 $h$, 称满足 (2.6) 的两个系统 (2.4) 和 (2.5) 为光滑等价(或微分同胚).

**注**　如果对 $h$ 的光滑程度感兴趣, 定义 2.3 中可写为 $C^k$ 等价或 $C^k$ 微分同胚. ◇

两个微分同胚系统实际上是同样的, 且可看成是不同坐标系下的同一系统. 例如, 对应平衡点的特征值相同. 设 $x_0$ 和 $y_0=h(x_0)$ 是这样的平衡点, 设 $A(x_0)$ 和 $B(x_0)$ 为对应的 Jacobi 矩阵. 于是, 微分 (2.6) 得

$$A(x_0)=M^{-1}(x_0)B(y_0)M(x_0).$$

因此, 矩阵 $A(x_0)$ 和 $B(x_0)$ 的特征多项式相同. 另外, 微分同胚的极限环具有相同的乘子和周期 (见练习 4). 最后这个性质对不同的时间参数化的更仔细分析是必要的.

假设 $\mu = \mu(x) > 0$ 是一个光滑的正纯量函数, 且对一切 $x \in \mathbb{R}^n$, (2.4) 和 (2.5) 的右端以

$$f(x) = \mu(x)g(x) \tag{2.7}$$

相联系. 则显然系统 (2.4) 和 (2.5) 拓扑等价, 因为它们的轨道是相同的, 轨道上的运动速度不同 (在点 $x$ 两速度之比恰好是 $\mu(x)$). 因此, 定义 2.1 中的同胚 $h$ 是恒同映射 $h(x) = x$. 换句话说, 两个系统的区别仅仅在于沿轨道的时间参数化不同.

**定义 2.4**　对光滑正函数 $\mu$, 称满足 (2.7) 的两个系统 (2.4) 和 (2.5) 为轨道等价.

显然, 两个轨道等价的系统可以不微分同胚. 因为有这样的环: 在相空间中看上去是相同的闭曲线, 却具有不同的周期.

我们经常局部地研究动力系统. 例如并不在整个状态空间 $\mathbb{R}^n$ 而是在某个区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 内研究. 这样的区域可以是一个平衡点 (不动点) 或一个环的邻域. 上面的拓扑等价、光滑等价和轨道等价的定义都可容易地引入适当区域以 "局部化". 例如, 在平衡点附近的相图的拓扑分类中, 下面对于定义 2.1 的修正是有用的.

**定义 2.5**　动力系统 $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ 在平衡点 $x_0$ 附近称为局部等价于在平衡点 $y_0$ 附近的动力系统 $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$, 如果存在同胚 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 使得

(1) 在 $x_0$ 的小邻域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 内有定义.

(2) 满足 $y_0 = h(x_0)$.

(3) 映上 $U$ 中第一个系统的轨道为 $V = h(U) \subset \mathbb{R}^n$ 中第二个系统的轨道, 并保持时间方向.

若 $U$ 是 $x_0$ 的开邻域, 则 $V$ 是 $y_0$ 的开邻域. 注意, 平衡点位置 $x_0$ 和 $y_0$ 以及区域 $U$ 和 $V$ 可能重合.

可以用下面的例子来比较上面引入的等价性.

**例 2.1**(结点–焦点等价性)　考虑两个平面线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

在极坐标 $(\rho, \theta)$ 下, 这两个系统可分别写为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho, \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

因此, 第一个系统的解为

$$\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^{-t},$$
$$\theta(t) = \theta_0.$$

第二个系统的解为

$$\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^{-t},$$
$$\theta(t) = \theta_0 + t.$$

显然, 对这两个系统, 原点是稳定平衡点, 因为当 $t \to +\infty$ 时 $\rho \to 0$. (2.8) 的其他的所有轨道为直线, (2.9) 的其他的轨线为螺线. 这两个系统的相图如图 2.2 所示. 第一个系统的平衡点是*结点*(图 2.2(a)), 第二个系统的平衡点是*焦点*(图 2.2(b)). 两个系统性态的不同可以这样理解: 第一种情形在原点附近是单调地扰动衰减, 第二种情形是振动地衰减.

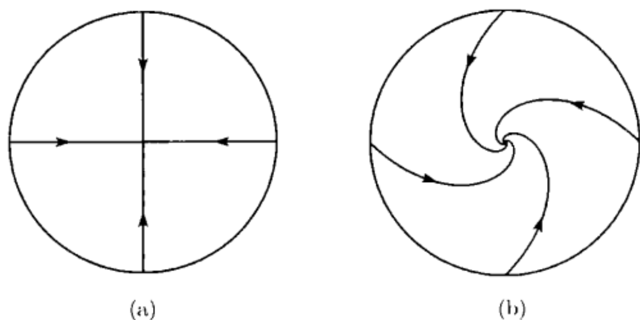



图 2.2　结点–焦点的等价性

这两个系统既非轨道等价也非光滑等价. 第一个事实是显然的, 第二个事实可从第一个系统的特征值 ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$) 不同于第二个 ($\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$) 看出. 不过, 在以原点为中心的单位闭圆盘

$$U = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\} = \{(\rho, \theta) : \rho \leqslant 1\}$$

内系统 (2.8) 与 (2.9) 是*拓扑等价*的.

我们用下面的方法构造一个同胚 $h: U \to U$ 来清晰地证明这个结论 (图 2.3). 在 $U$ 内取极坐标为 $(\rho_0, \theta_0)$ 的点 $x \neq 0$, 并考虑沿着系统 (2.8) 的轨道从边界上的点 $(1, \theta_0)$ 运动到点 $x$ 的时间 $\tau$. 这个时间仅仅依赖于 $\rho_0$, 且容易计算出为

$$\tau(\rho_0) = -\ln\rho_0.$$

现在考虑系统 (2.9) 从边界点 $(1,\theta_0)$ 出发的轨道经 $\tau(\rho_0)$ 时间单位后到达点 $y=(\rho_1,\theta_1)$. 因此, 将 $x=(\rho_0,\theta_0)\neq 0$ 映为 $y=(\rho_1,\theta_1)$ 的映射 $y=h(x)$ 就找到了, 即由

$$h:\begin{cases}\rho_1=\rho_0,\\ \theta_1=\theta_0-\ln\rho_0\end{cases}$$

给出. 对 $x=0$, 令 $y=0$, 即 $h(0)=0$. 因此, 所构造的映射把每一个圆周 $\rho_0=$ 常数旋转一个与 $\rho_0$ 有关的角度, 而将 $U$ 映为它自身. 这个角度在 $\rho_0=1$ 为零, 当 $\rho_0\to 0$ 时递减. 显然, 此映射连续可逆, 它把 (2.8) 的轨道映上为 (2.9) 的轨道, 且保持时间方向. 因此, 这两个系统在 $U$ 内拓扑等价.

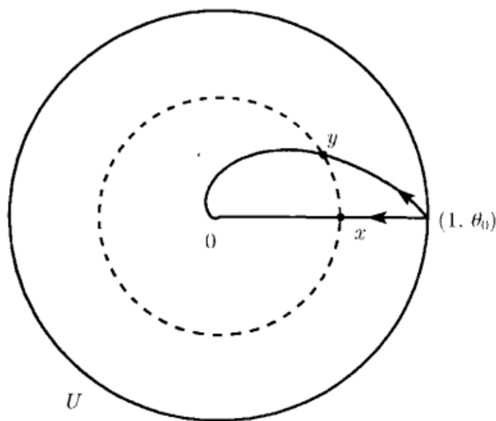



图 2.3　同胚的构造

但是, 同胚 $h$ 在 $U$ 内是不可微的. 确切地说, 它在原点以外光滑, 但在 $x=0$ 不可微. 为说明这一点, 在 $(x_1,x_2)$ 坐标系中计算 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 例如, 对应于导数

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_2=0},$$

当 $x_1>0$ 时, 差商

$$\frac{x_1\cos(\ln x_1)-0}{x_1-0}=\cos(\ln x_1)$$

在 $x_1\to 0$ 时无极限. ◇

因此, 考虑连续–时间系统模拓扑等价性, 即保持不变集的个数、稳定性和拓扑等价性等信息, 而放弃有关瞬时特性和依赖于时间性态的信息. 这类信息在某些应用中可能是重要的, 那时就需用更强的等价性 (诸如轨道等价和光滑等价).

将光滑等价和轨道等价相结合, 就给出一个在本书将经常用到的等价关系.

**定义 2.6**　两个系统 (2.4) 和 (2.5) 称为光滑轨道等价, 如果 (2.5) 光滑等价于一个系统, 而这个系统又轨道等价于 (2.4).

按照这个定义, 两个系统 (在 $\mathbb{R}^n$ 或在某区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 中) 是等价的, 如果能够用一个光滑可逆的坐标变换和一个正的光滑坐标函数的乘积将其中一个系统变换成另一个系统. 显然, 两个光滑轨道等价的系统是拓扑等价的, 但其逆不真.

## 2.2　一般平衡点与不动点的拓扑分类

这一节研究连续–时间和离散–时间动力系统, 在一般平衡点即双曲平衡点附近相图的几何性质及其拓扑分类.

### 2.2.1　连续–时间系统的双曲平衡点

考虑由

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

定义的连续–时间动力系统, 其中 $f$ 光滑. 假设 $x_0 = 0$ 为这系统的平衡点 (即 $f(x_0) = 0$), $A$ 为 $x_0$ 处的 Jacobi 矩阵 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. $n_-, n_0$ 和 $n_+$分别为 $A$ 的具负实部、零实部和正实部的特征值的个数 (重次计算在内).

**定义 2.7**　平衡点称为双曲的, 如果 $n_0 = 0$, 即没有特征值在虚轴上. 双曲平衡点称为双曲鞍点, 如果 $n_- n_+ \neq 0$.

由于一般矩阵没有特征值在虚轴上 ($n_0 = 0$). 双曲性是一个典型性质, 一般系统 (即不满足某些特殊条件) 中的平衡点是双曲的. 我们并不打算叙述这些直观的明显性质, 虽然它也可以用测度理论和横截性来说明. 我们将详细研究双曲平衡点附近相图的几何特性. 对一个平衡点 (不必是双曲的) 引入两个不变集

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi^t x \to x_0, t \to +\infty\}, \quad W^u(x_0) = \{x : \varphi^t x \to x_0, t \to -\infty\},$$

这里 $\varphi^t$ 是 (2.10) 相应的流.

**定义 2.8**　$W^s(x_0)$ 称为 $x_0$ 的稳定集, $W^u(x_0)$ 称为 $x_0$ 的不稳定集.

**定理 2.1**(局部稳定流形)　设 $x_0$ 是一个双曲平衡点 (即 $n_0 = 0, n_- + n_+ = n$). 则 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 与 $x_0$ 的充分小邻域的交分别包含有 $n_-$ 和 $n_+$ 维光滑子流形 $W^s_{\text{loc}}(x_0)$ 和 $W^s_{\text{loc}}(x_0)$.

此外, $W^s_{\text{loc}}(x_0)(W^u_{\text{loc}}(x_0))$ 在 $x_0$ 与 $T^s(T^u)$ 相切, 这里 $T^s(T^u)$ 是对应 $A$ 的所有 $\text{Re}\lambda < 0(\text{Re}\lambda > 0)$ 的特征值并的广义特征空间. □

这个定理的证明在此不再详细给出, 可以沿着下面 (Hadamard-Perron) 的思路进行. 对不稳定流形, 取通过平衡点的线性流形 $T^u$ 并对此流形应用映射 $\varphi^1$, 这里

的 $\varphi^t$ 是这个系统对应的流. 在 $\varphi^1$ 作用下, $T^u$ 的象是某个在 $x_0$ 切于 $T^u$ 的 $n_+$ 维 (非线性) 流形. 注意到平衡点的邻域充分小, 这里的线性部分起着 "控制" 作用. 重复这个步骤, 可以证明迭代收敛于定义在这个 $x_0$ 的邻域并在 $x_0$ 切于 $T^u$ 的光滑不变子流形. 这个极限是局部不稳定流形 $W^u_{\text{loc}}(x_0)$. 局部稳定流形 $W^s_{\text{loc}}(x_0)$ 可以用 $\varphi^{-1}$ 对 $T^s$ 作构造,

**注**　从大范围讲, 不变集 $W^s$ 和 $W^u$ 分别是 $n_-$ 和 $n_+$ 维浸入流形, 它们有与 $f$ 相同的光滑性. 考虑到这些性质, 分别称集合 $W^s$ 和 $W^u$ 为 $x_0$ 的稳定和不稳定不变流形. ◇

**例 2.2**($\mathbb{R}^3$ 中的鞍点和鞍–焦点)　图 2.4 说明了上述定理 $n = 3, n_- = 2$ 和 $n_+ = 1$ 的情形. 这时有两个不变流形通过平衡点, 即由所有进入平衡点的轨道所组成的二维流形 $W^s(x_0)$ 以及由两条走出平衡点的轨道 $W^u_1(x_0)$ 和 $W^u_2(x_0)$ 所组成的一维流形 $W^u(x_0)$. 所有其他通过平衡点附近不属于这些流形的轨道在时间正反

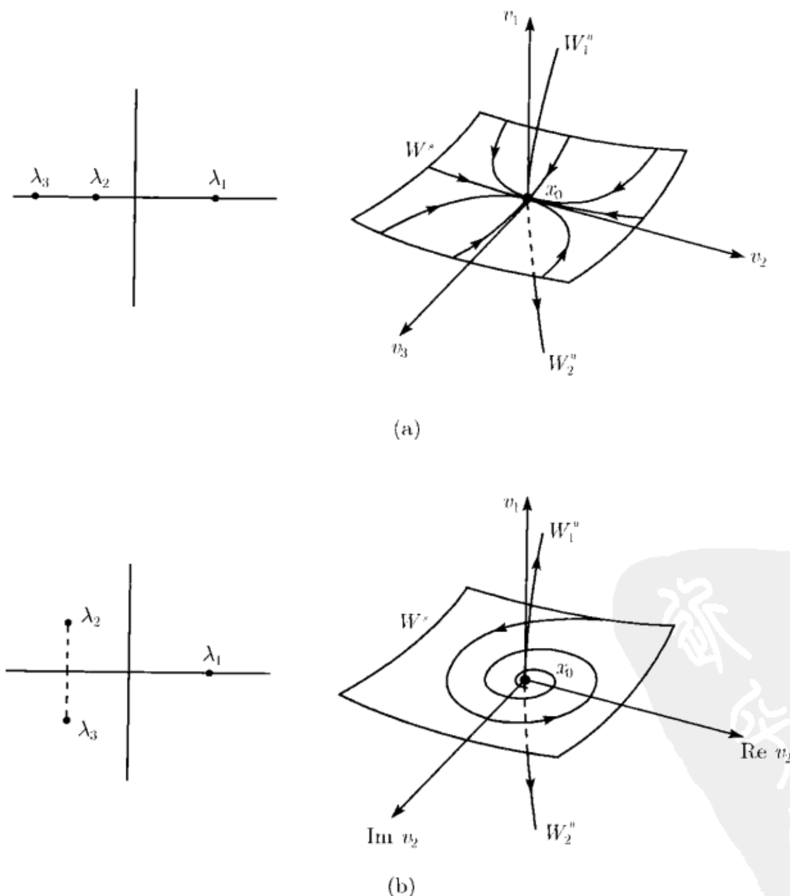



图 2.4　(a) 鞍点; (b) 鞍–焦点: 向量 $v_k$ 是对应于特征值 $\lambda_k$ 的特征向量

两个方向最终都离开此邻域.

在实单特征值 ($\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$) 的情形 (a), 在 $W^s$ 上的轨道形成结点, 在复特征值 ($\mathrm{Re}\,\lambda_{2,3} < 0 < \lambda_1, \bar{\lambda}_3 = \lambda_2$) 的情形 (b), $W^s$ 是一个焦点. 因此, 在第一种情形, 平衡点称为**鞍点**, 后一情形平衡点称为**鞍–焦点**. 在这两种情况平衡点是拓扑等价. 然而, 正如我们即将看到的, 在研究同宿轨道分支时 (第 6 章) 区分这两种情形是有用的. ◇

下面的定理给出双曲平衡点的拓扑分类.

**定理 2.2** *系统 (2.10) 在两个双曲平衡点 $x_0$ 和 $y_0$ 附近的相图是局部拓扑等价, 当且仅当这两个平衡点分别具有相同个数 $n_-$ 和 $n_+$ 个的 $\mathrm{Re}\lambda < 0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 的特征值.* □

通常, 这时也称平衡点 $x_0$ 和 $y_0$ 拓扑等价. 定理的证明基于两个概念. 首先, 可以证明在双曲平衡点附近系统局部等价于它的*线性化系统* $\dot{\xi} = A\xi$(Grobman-Hartman 定理). 这个结果对平衡点 $x_0$ 附近和平衡点 $y_0$ 附近都可应用. 其次, 两个具有相同个数 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 与 $\mathrm{Re}\lambda < 0$ 的特征值, 且无特征值在虚轴上的*线性系统*, 它们的拓扑等价性必须得到证明. 例 2.1 是一个特殊情形. 然而, 一般的证明基于同一思想, 见本章末尾附录中的参考文献.

**例 2.3**(平面系统的一般平衡点) 考虑二维系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

$f$ 光滑. 假定 $x_0 = 0$ 是平衡点, $f(0) = 0$, 令

$$A = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$$

是它的 Jacobi 矩阵. 矩阵 $A$ 有两个特征值 $\lambda_1, \lambda_2$, 它们是特征方程

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

的根, 其中 $\sigma = \mathrm{tr}A$, $\Delta = \det A$.

图 2.5 展示了熟知的古典结果. 平面上存在三类双曲平衡点: 稳定结 (焦) 点、鞍点和不稳定结 (焦) 点. 正如我们已经讨论过的, 结点和焦点 (对应它们的稳定性) 是拓扑等价的, 这可从特征值识别. ◇

**定义 2.9** *结点和焦点统称为反鞍点.*

稳定点有二维稳定流形而没有不稳定流形. 对不稳定平衡点情况刚好相反. 鞍点有一维稳定流形和一维不稳定流形, 有时称为*分界线*.

| $(n_+, n_-)$ | 特征值 | 相图 | 稳定性 |
|---|---|---|---|
| (0, 2) | | 结点<br>焦点 | 稳定 |
| (1, 1) | | 鞍点 | 不稳定 |
| (2, 0) | | 结点<br>焦点 | 不稳定 |

图 2.5　平面上双曲平衡点的拓扑分类

### 2.2.2　离散–时间系统的双曲不动点

现在考虑离散–时间动力系统

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$

这里映射 $f$ 和其逆 $f^{-1}$ 都光滑 (微分同胚). 假设 $x_0 = 0$ 是系统的不动点 (即 $f(x_0) = x_0$), $A$ 为在 $x_0$ 的 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. $A$ 的特征值 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 称为不动点的乘子. 注意, 由于 $f$ 可逆性没有零乘子. 设 $n_-, n_0$ 和 $n_+$ 分别是 $x_0$ 的位于单位圆 $\{\mu \in \mathbb{C}^1 : |\mu| = 1\}$ 内、上、外的乘子个数.

**定义 2.10**　不动点称为双曲的, 若 $n_0 = 0$, 也就是说, 没有乘子在单位圆上. 若 $n_- n_+ \neq 0$, 则称双曲不动点为双曲鞍点.

注意, 双曲性也是离散–时间系统的典型性质. 如同连续–时间情形, 可以对不动点 $x_0$(不必是双曲的) 引入稳定和不稳定不变集:

$$W^s(x_0) = \{x : f^k(x) \to x_0, k \to +\infty\},$$
$$W^u(x_0) = \{x : f^k(x) \to x_0, k \to -\infty\},$$

其中 $k$ 是整数 "时间", $f^k(x)$ 表示 $x$ 经 $f$ 的 $k$ 次迭代. 类似于定理 2.1, 我们有

**定理 2.3**(局部稳定流形)　设 $x_0$ 是双曲不动点, 即 $n_0 = 0, n_- + n_+ = n$. 则 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 与 $x_0$ 的充分小邻域的交分别含有 $n_-$ 维与 $n_+$ 维光滑子流形 $W^s_{\text{loc}}(x_0)$ 和 $W^u_{\text{loc}}(x_0)$.

*此外, $W^s_{\text{loc}}(x_0)(W^u_{\text{loc}}(x_0))$ 在 $x_0$ 切于 $T^s(T^u)$, 其中 $T^s(T^u)$ 是 $A$ 满足 $|\mu| < 1(|\mu| > 1)$ 的所有乘子并的广义特征空间.* □

定理的证明完全类似于连续–时间情形, 只要用 $f$ 代替 $\varphi^1$. 从大范围讲, 不变集 $W^s$ 和 $W^u$ 又分别是 $n_-$ 和 $n_+$ 维浸入流形, 且与映射 $f$ 具有相同的光滑性. 这两个流形不能自身相交, 但它们的大范围拓扑以后将看到可以是非常复杂.

双曲不动点的拓扑分类可由类似于连续–时间系统平衡点的定理 2.2 的下面的定理 2.4 得知.

**定理 2.4** *系统 (2.11) 在双曲不动点 $x_0$ 和 $y_0$ 附近的相图局部拓扑等价, 当且仅当这两个不动点具有相同 $n_-$ 个 $|\mu| < 1$ 的乘子和相同 $n_+$ 个 $|\mu| > 1$ 的乘子, 且所有 $|\mu| < 1$ 乘子和 $|\mu| > 1$ 乘子的积的符号对于这两个不动点也是相同的.* □

如同连续情形, 定理的证明基于这样的事实: 系统在双曲不动点附近局部等价于其线性化系统: $x \mapsto Ax$(Grobman-Hartman 定理的离散–时间情形). 关于乘积的额外条件是基于这样的事实: 动力系统在不动点附近既可以在稳定流形上定义定向映射, 也可以在不稳定流形上定义反向映射. 若 $\det J > 0$, 则 $\mathbb{R}^l$ 上微分同胚保持方向, 这里 $J$ 是它的 Jacobi 矩阵. 反之, 则变向. 两个拓扑等价映射必须具有相同的定向性质. 定理 2.4 中的积正好是映射 (2.11) 在它的稳定和不稳定局部不变流形上限制的 Jacobi 矩阵的行列式. 显然, 只需对实的乘子计算这些符号, 因为一对共轭复乘子的积永远是正的.

考虑两个不动点的例子.

**例 2.4**($\mathbb{R}^1$ 中的稳定不动点)　假设 $x_0 = 0$ 是一维离散–时间系统 $(n = 1)$ 的不动点. 设 $n_- = 1$, 这意味着唯一乘子 $\mu$ 满足 $|\mu| < 1$. 在这种情形, 按照定理 2.3, 所有从 $x_0 = 0$ 某个邻域出发的轨道都收敛于 $x_0$. 依乘子的符号, 有如图 2.6 所示的两种可能性. 如果 $0 < \mu < 1$, 迭代单调收敛于 $x_0$(图 2.6(a)). 若 $-1 < \mu < 0$, 则收敛性是非单调, 相点围绕 $x_0$“跳跃” 地收敛于 $x_0$(图 2.6(b)). 第一种情形映射在 $\mathbb{R}^1$ 中保持方向, 第二种情形则是变向的. 显然, 不能用连续映射把 “跳跃” 轨道变换成单调轨道. 图 2.7 用阶梯图说明两类不动点附近的轨道. ◇

**例 2.5**($\mathbb{R}^2$ 中的鞍点不动点)　假设 $x_0 = 0$ 是二维离散–时间系统 $(n = 2)$ 的不动点. 假设 $n_- = n_+ = 1$, 一个 (实) 乘子 $\mu_1$ 在单位圆外 $(|\mu_1| > 1)$, 另一个 (实) 乘子 $\mu_2$ 在单位圆内 $(|\mu_2 < 1)$. 在这种情形, 有两个不变流形通过不动点, 即由在 $f$ 迭代下收敛于 $x_0$ 的轨道组成的一维流形 $W^s(x_0)$ 和一个由在 $f^{-1}$ 迭代下趋于 $x_0$ 的轨道所组成的一维流形 $W^u(x_0)$. 回忆离散–时间系统的轨道是点列. 通过平衡点附近不属于上述流形的轨道在 “时间” 的两个方向最终离开它的邻域.

图 2.8 展示 $\mathbb{R}^2$ 中两类鞍点. 在正乘子情形 (a)$0 < \mu_2 < 1 < \mu_1$, 从 $W^s(x_0)$ 上的点出发的轨道单调收敛于 $x_0$. 因此, 稳定流形 $W^s(x_0)$ 是由两条以 $x_0$ 为分界点的不变分枝 $W^s_{1,2}(x_0)$ 所组成. 对不稳定流形 $W^u(x_0)$, 以 $f$ 的逆代替 $f$ 就可作同样

(a)

(b)

图 2.6　一维系统的稳定不动点: (a) $0 < \mu < 1$; (b) $-1 < \mu < 0$

(a)　(b)

图 2.7　稳定不动点的阶梯图

说明. 此映射在这两个流形上的限制保持方向.

如果乘子是负的 (情形 (b)), $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$, 这两个流形上的轨道在以 $x_0$ 为分界点的两个分枝 $W_{1,2}^{s,u}$ 之间 "跳跃". 映射在两流形上保持反方向. 分枝 $W_{1,2}^{s,u}$ 关于此映射的第二次迭代 $f^2$ 是不变的. ◇

**注**　(1) 二维鞍点的稳定流形和不稳定流形 $W^{s,u}(x_0)$ 是不变曲线的例子. 若 $x$ 属于此曲线, 则任何迭代 $f^k(x)$ 也属于此曲线. 不变曲线不是轨道. 事实上, 它是由无穷多个轨道所组成. 图 2.9 表示不变曲线和鞍点不动点附近具正乘子的轨道.

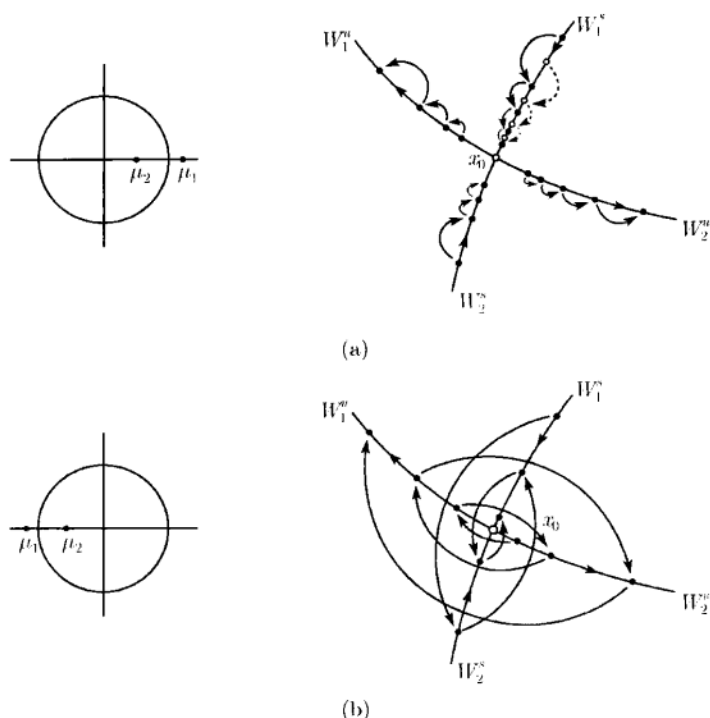



图 2.8　平面上鞍点不动点的不变流形: (a) 正乘子; (b) 负乘子

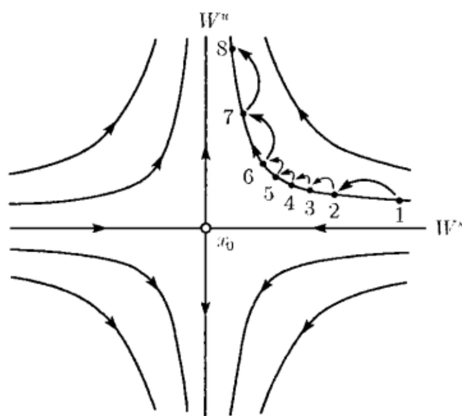



图 2.9　不变曲线和鞍点不动点附近的一条轨道

(2) 双曲不动点的稳定和不稳定流形 $W^{s,u}(x_0)$ 的大范围性态可以是非常复杂. 所以定理 2.3 中 "含有" 一词是绝对必要的.

例如, 回到平面情形, 假定 $x_0$ 是具正乘子的鞍点. 首先, 与连续–时间系统平衡点的稳定集和不稳定集不同, 一般离散–时间系统的流形 $W^s(x_0)$ 与 $W^u(x_0)$ 可相交于一非零角 (横截相交)(见图 2.10(a)).

更进一步, 如果出现横截相交, 意味着有无穷多个这样的交点. 事实上, 假设 $x^0$ 是一个交点. 由定义, 它同属于两个不变流形. 因此, 由这个点出发经 $f$ 或 $f^{-1}$ 的重复迭代都要收敛于鞍点 $x_0 : f^k(x^0) \to x_0$ 当 $k \to \pm\infty$. 这个轨道上的每一点都是 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 的交点. 这无穷多个交点使得两个流形在 $x_0$ 附近呈复杂状态的 "振动", 如图 2.10(b) 所示. 所得之 "网" 称为 Poincaré 同宿结构. 从点 $x_0$ 出发的轨道称为 $x_0$ 的同宿轨道. 同宿结构的存在使得 $W^{s,u}(x_0)$ 与鞍点 $x_0$ 的任一邻域的交变得高度不平凡.

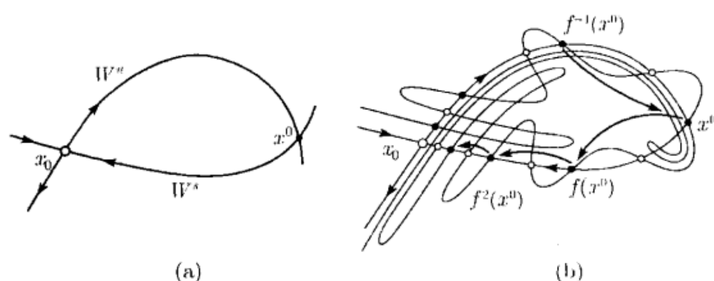



图 2.10　Poincaré 同宿结构

同宿结构存在性的这个动力学结论也是很生动的: 它导致在同宿轨道附近出现无穷多个具任意长周期的周期点. 这可由存在 Smale 马蹄得知 (见第 1 章). 图 2.11 说明马蹄是如何形成的. 在稳定流形 $W^s(x_0)$ 附近, 取一 (曲线) 矩形 $S$, 并考虑它的迭代 $f^kS$. 如果出现同宿结构, 对充分高的迭代次数 $N$, $f^NS$ 看上去像图中被弯曲并伸张了的带子 $Q$. $S$ 与 $Q$ 的交构成了几个马蹄, 其中每一个都有无穷多个具任意长周期的环. ◇

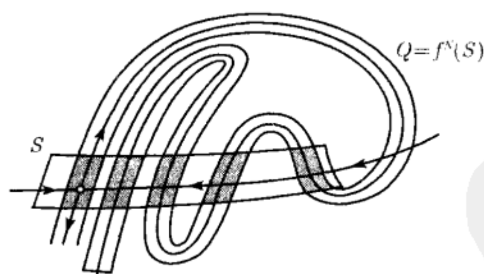



图 2.11　Smale 马蹄嵌入 Poincaré 同宿结构

### 2.2.3　双曲极限环

利用上一节的结果和 Poincaré 映射的结构 (见第 1 章), 就可以定义连续–时间系统的双曲极限环以及描述这种环附近相轨道的拓扑. 考虑连续–时间动力系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

$f$ 光滑. 假设 (2.12) 存在孤立的周期轨道 (极限环)$L_0$. 如第 1 章, 设 $\Sigma$ 是环的 $n-1$ 维 (codim $\Sigma = 1$) 局部截面, 其坐标为 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})^{\mathrm{T}}$. 系统 (2.12) 沿着它的轨道局部定义了一个从 $\Sigma$ 到 $\Sigma$ 的光滑可逆映射 $P$(Poincaré 映射). $L_0$ 和 $\Sigma$ 的交点 $\xi_0$ 是映射 $P$ 的不动点, $P(\xi_0) = \xi_0$.

一般地, 不动点 $\xi_0$ 是双曲的, 故分别存在 $n_-$ 维和 $n_+$ 维不变流形

$$W^s(\xi_0) = \{\xi \in \Sigma : P^k(\xi) \to \xi_0, k \to +\infty\}$$

和

$$W^u(\xi_0) = \{\xi \in \Sigma : P^{-k}(\xi) \to \xi_0, k \to +\infty\},$$

其中 $n_\mp$ 是 $P$ 在 $\xi_0$ 的 Jacobi 矩阵位于单位圆内和圆外的特征值个数. 回忆 $n_- + n_+ = n-1$, 特征值称为*环的乘子*. 不变流形 $W^{s,u}(\xi_0)$ 是 $\Sigma$ 与*环的稳定和不稳定流形*

$$W^s(L_0) = \{x : \varphi^t x \to L_0, t \to +\infty\},$$
$$W^u(L_0) = \{x : \varphi^t x \to L_0, t \to -\infty\}$$

的交, 其中 $\varphi^t$ 是 (2.12) 对应的流.

现在用离散–时间动力系统不动点的拓扑分类的结果对极限环进行分类. 一个极限环称为是*双曲*的, 如果 $\xi_0$ 是 Poincaré 映射的双曲不动点. 类似地, 一个双曲环称为是*鞍点环*, 如果它有乘子在单位圆内, 另外有乘子在单位圆外 (即 $n_- n_+ \neq 0$). 回忆乘子的乘积总是正的 (见第 1 章), 因此 Poincaré 映射在 $\Sigma$ 内保持方向. 这表明在复平面内对乘子的位置要加于某些限制.

**例 2.6**(平面系统的双曲环)　考虑光滑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

设 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, $x_0(t)$ 是系统对应于极限环 $L_0$ 的解, $T_0$ 是这个解的 (最小) 周期. 这环只有一个乘子 $\mu_1$, 它是正的且由

$$\mu_1 = \exp\left\{\int_0^{T_0} (\mathrm{div} f)(x_0(t))\mathrm{d}t\right\} > 0$$

给出, 这里 div 是向量场的*散度*:

$$(\mathrm{div}\ f)(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}.$$

若 $0 < \mu_1 < 1$, 就有一个稳定的双曲环, 它附近的所有轨道指数式地收敛于它, 当 $\mu_1 > 1$ 时, 有一个不稳定双曲环, 它邻域内的轨道都指数式地散开. ◇

**例 2.7**(三维系统中的鞍点环)　例 2.5 提供 $\mathbb{R}^3$ 中存在的两类鞍点环 (图 2.12). 如果 Poincaré 映射的乘子满足

$$0 < \mu_2 < 1 < \mu_1,$$

则环的两个不变流形 $W^s(L_0)$ 和 $W^u(L_0)$ 都是单带 (见图 2.12(a)).

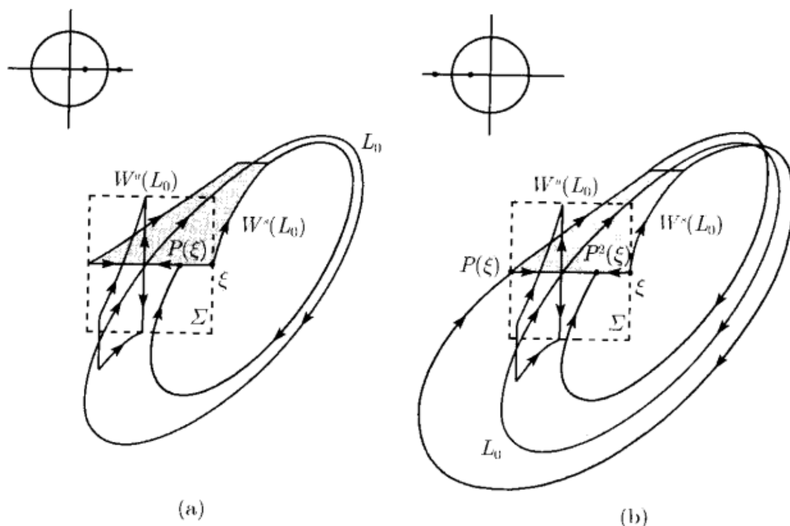



图 2.12　三维系统中的鞍点环: (a) 正乘子; (b) 负乘子

当乘子满足

$$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$$

时, 流形 $W^s(L_0)$ 和 $W^u(L_0)$ 是**扭转带**(称为 Mobius 带)(见图 2.12(b)). $\mathbb{R}^3$ 中其他类型的鞍点环是不可能有的, 因为任何一个 Poincaré 映射的乘子之积是正的. 因此流形 $W^s(L_0)$ 和 $W^u(L_0)$ 必须是单的或者扭转的.

最后, 注意 $W^s(L_0)$ 和 $W^u(L_0)$ 可以沿着同宿于环 $L_0$ 的轨道**相交**. 这给出在截面 $\Sigma$ 上的 Poincaré 同宿结构和 Smale 马蹄. ◇

## 2.3　分支与分支图

现在考虑依赖于参数的动力系统. 在连续–时间情形把它写为

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{2.13}$$

离散–时间情形则写为

$$x \mapsto f(x, \alpha), \tag{2.14}$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}^m$ 分别表示相变量和参数. 考虑系统的相图①. 当参数变化时相图也发生变化. 存在两种可能性: 或者系统保持与原系统等价, 或者它的拓扑发生改变.

**定义 2.11**　*在参数变化时相图不拓扑等价的现象称为分支.*

因此, 分支是当参数通过*分支值* (*临界值*) 时系统的拓扑类型发生改变. 实际上, 本书的中心问题就是对不同分支进行分类和分析.

**例 2.8**(Antronov-Hopf 分支)　考虑下面的依赖于一个参数的平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \tag{2.15}$$

在极坐标 $(\rho, \theta)$ 下取形式

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \tag{2.16}$$

它可明显积分 (见练习 6). 由于 (2.16) 中关于 $\rho$ 和 $\theta$ 的方程互相独立, 可容易地在原点的固定邻域内画出相图, 显然, 系统只有一个平衡点 (见图 2.13). 对 $\alpha \leqslant 0$, 平衡点是*稳定焦点*, 因为这时 $\dot{\rho} < 0$, 从任何初始点出发的轨道均有 $\rho(t) \to 0$. 另一方面, 如果 $\alpha > 0$, 则对小的 $\rho > 0$ 有 $\dot{\rho} > 0$(平衡点变成*不稳定焦点*), 而对充分大的 $\rho$ 有 $\dot{\rho} < 0$. 从 (2.16) 容易看到, 系统对任何 $\alpha > 0$ 有半径为 $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$ 的*周期轨道*(在 $\rho = \rho_0$ 有 $\dot{\rho} = 0$), 此外, 此周期轨道是稳定的, 因为在环的内部有 $\dot{\rho} > 0$, 在环的外部有 $\dot{\rho} < 0$.

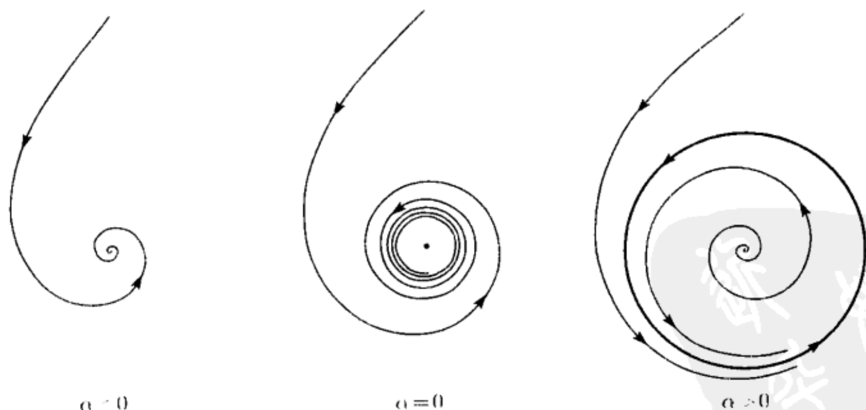



图 2.13　Hopf 分支

因此, $\alpha = 0$ 是一个分支值. 事实上, 具极限环的相图不可能一对一地变换成只有平衡点的相图. 极限环的存在性是*拓扑不变的*. 当 $\alpha$ 增加并穿过零时系统 (2.15)

① 如果有必要, 可以考虑参数区域 $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ 内的相图.

有分支, 称为Antronov-Hopf *分支*, 它导致从平衡点出现小振幅的周期振动. 我们将以此分支作为例子, 在本章后面以及在第 3 章和第 5 章中再详细分析它. ◇

应该看清楚, Antronov-Hopf 分支是在平衡点固定的任一小邻域内发现的. 这种分支称为*局部分支*. 也可在不动点的任一小邻域内定义离散-时间系统的局部分支. 我们将经常谈及局部分支如*平衡点分支*或*不动点分支*, 尽管我们分析的不是这些点而是平衡点附近的整个相图. 与 Poincaré 映射相应的局部分支对应的极限环分支称为*环的局部分支*.

也存在这样的分支, 它们不能从观察平衡点 (不动点) 或环的小邻域就能够发现. 这样的分支称为*大范围分支*.

**例 2.9**(异宿分支)　下面考虑依赖于一个参数的平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2). \end{cases} \tag{2.17}$$

对所有 $\alpha$ 值这个系统有两个鞍点 (见图 2.14)

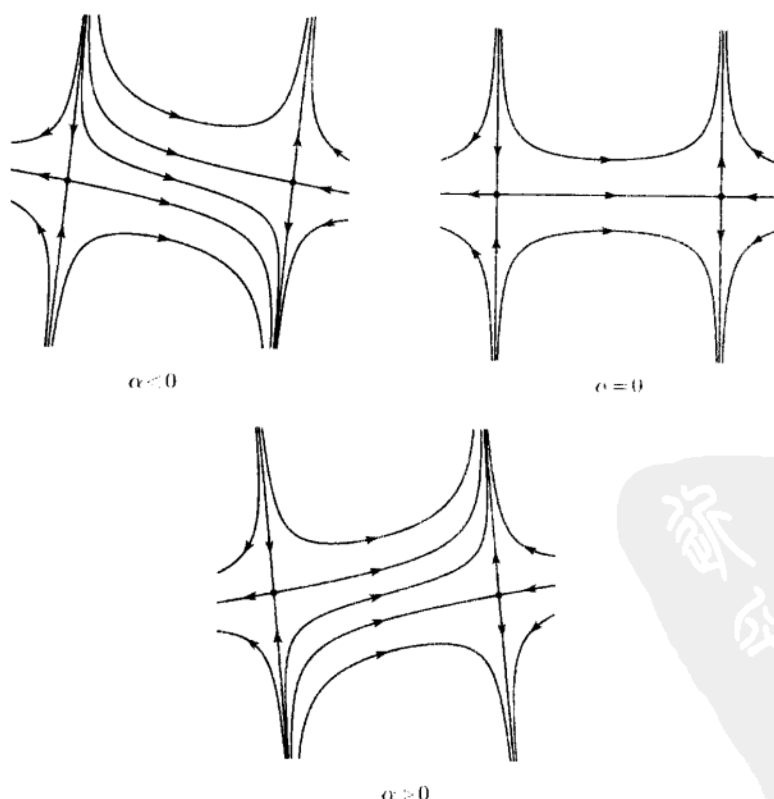



图 2.14　异宿分支

$$x_{(1)} = (-1, 0), \quad x_{(2)} = (1, 0),$$

在 $\alpha = 0$, 水平轴是不变的, 因此, 两个鞍点由一条当 $t \to +\infty$ 时趋于一个鞍点, 而当 $t \to -\infty$ 时趋于另一个鞍点的轨道所连接. 这样的轨道称为*异宿的*. 类似地, 一条当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时渐近于同一平衡点的轨道称为*同宿的*. 当 $\alpha \neq 0$ 时, $x_1$ 轴不再是不变, 连接消失. 这显然是大范围分支. 要发现这种分支, 必须取定一个覆盖两个鞍点的区域 $U$. 第 6 章将研究异宿分支和同宿分支. ◇

存在大范围分支中包含有某些局部分支. 这时仅着眼于局部分支只能对系统的性态提供部分信息. 下面的例子说明这种可能性.

**例 2.10**(鞍–结点同宿分支)　分析下面的平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + \alpha + x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + \alpha + x_1) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \end{cases} \tag{2.18}$$

这里 $\alpha$ 是参数. 在极坐标 $(\rho, \theta)$ 下, 系统写为形式

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \alpha + \rho\cos\theta. \end{cases} \tag{2.19}$$

围绕单位圆 $\{(\rho, \theta) : \rho = 1\}$ 取定一个细环域 $U$. 在 $\alpha = 0$, 系统 (2.19) 在环域内存在一个非双曲平衡点 (见图 2.15)

$$x_0 = (\rho_0, \theta_0) = (1, \pi).$$

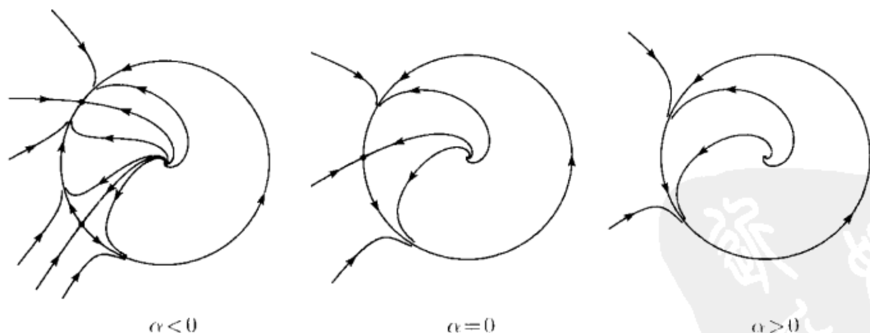



图 2.15　鞍–结点同宿分支

它有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$(验证). 对小正值 $\alpha$, 平衡点消失, 对小负值 $\alpha$, 它分裂为一个鞍点和一个结点 (这种分支称为*鞍–结点分支*或*折分支*, 见第 3 章). 这是一个局部性结果. 但是, 对 $\alpha > 0$, 系统出现稳定*极限环*, 它与单位圆重合. 这个环永远是系统的不变集, 但对 $\alpha \leqslant 0$, 它包含平衡点. 如果仅仅观察非双曲平衡点附近

小邻域, 我们就会失去对这个环的大范围发现. 注意在 $\alpha = 0$, 刚好存在一条同宿于非双曲平衡点 $x_0$ 的轨道. 第 7 章将讨论这类分支. ◇

现在回到对依赖于参数的系统 (2.13)(或 (2.14)) 的分支的一般讨论. 取某个参数值 $\alpha = \alpha_0$, 考虑包含 $\alpha_0$ 在内的点的最大连接参数集 (称为层 (stratum)), 此集合由这样的点所组成, 对这些点, 系统的相图拓扑等价于系统在 $\alpha_0$ 的相图. 在参数空间 $\mathbb{R}^m$ 中取所有这样的层, 就得到系统的*参数图*. 例如, 具 Andronov-Hopf 分支的系统 (2.15) 的参数图有两层: $\{\alpha \leqslant 0\}$ 和 $\{\alpha > 0\}$. 系统 (2.17) 有三层: $\{\alpha < 0\}, \{\alpha = 0\}$ 以及 $\{\alpha > 0\}$. 但是, 注意 (2.17) 对 $\alpha < 0$ 的相图拓扑等价于 $\alpha > 0$ 的相图.

参数图连同它刻画的相图一起构成*分支图*.

**定义 2.12**　*动力系统的分支图是由拓扑等价性所诱导的参数空间的层次连同每一层代表的相图.*

求得作为已给动力系统定性分析结果的分支图是我们所期望的. 用非常简洁的方法将系统在参数变化时的性态的所有可能形式和它们 (分支) 之间的传递进行分类[①]. 注意, 一般分支图依赖于所考虑相空间的区域.

**注**　如果一个动力系统的相空间的维数是一维或二维, 且仅依赖于一个参数, 则它的分支图可以在相空间和参数空间的*直积空间*$\mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{R}^1$, 连同由一维或二维薄片 (slice)$\alpha =$ 常数代表的相图所表示.

例如, 考虑数量系统

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

这个系统对所有的 $\alpha$ 都有平衡点 $x_0 = 0$, 这个平衡点当 $\alpha < 0$ 时稳定, $\alpha > 0$ 时不稳定 ($\alpha$ 是这平衡点的特征值). 对 $\alpha > 0$, 存在两条额外的平衡点曲线, 它们从原点分枝 (即 $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$), 都是稳定的. 这种分支通常称为*叉分支*(pitchfork bifurcation). 如果在 $(x, \alpha)$ 空间内看这个系统的分支图, 这个概念就立刻变得很清楚 (见图 2.16). 系统所示的叉分支在变换 $x \mapsto -x$ 下是不变的. 第 7 章将研究这种*对称系统*的分支. ◇

参数图最简单的情形是由 $\mathbb{R}^m$ 中有限个区域所组成. 在每个区域内部相图是拓扑等价的. 这些区域由*分支边界*所分开, 它们是 $\mathbb{R}^m$ 中光滑子流形 (即曲线、曲面). 这些边界可以相交或相重. 这些交集又把边界划分为子区域, 等等. 分支边界是由指定的相对象 (平衡点、环等) 以及确定分支类型 (Hopf, fold 等) 的某些分支条件定义. 例如, 平衡点的 Andronov-Hopf 分支是由一个分支条件, 即由在这个平

① 回忆由拓扑等价性, 与时间有关的系统性态的某些信息将会失去.

衡点的 Jacobi 矩阵的一对纯虚特征值所表述 (参看例 2.7):

$$\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0.$$

当边界相交时, 分支就会出现.

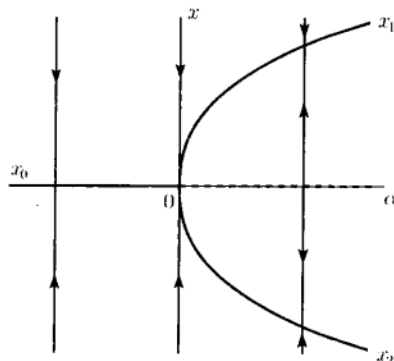



图 2.16　叉分支

**定义 2.13**　*系统 (2.13) 或 (2.14) 分支的余维是参数空间的维数与对应分支边界的维数之差.*

等价地, 余维 (简记为 codim) 是确定分支的独立条件的个数. 这是余维最实际的定义. 很清楚, 某些分支的余维在所有依赖于足够数量参数的一般系统中是一样的.

**注**　即使一个简单的连续-时间系统在平面有界区域内的分支图也可能是由*无穷多个层*所组成. 对高维 ($n > 3$) 连续-时间系统, 这种情况变得更为复杂. 在这样的系统中, 分支值可稠密于某个参数区域. 参数图可具 Cantor(分形) 结构, 这种结构具有某种越来越小直至无穷小的重复图案. 显然, 研究这种分支图的完整工作实际上是不可能的, 尽管如此, 即使对系统性态提供重要信息的部分分支图知识也是要研究的. ◇

## 2.4　分支的拓扑规范形

幸运的是, 分支图并非整个 "混沌" 一片. 一般系统的分支图的不同层与下面某些规则彼此互相影响, 这使得出现在许多应用中的系统分支图看上去相似. 为研究这个课题, 需要确定两个系统何时 "定性相似" 或者分支图等价. 考虑两个 (为确定起见就考虑连续-时间系统) 动力系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2.20}$$

和

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m. \tag{2.21}$$

上述右端都光滑且有相同个数的变量和参数. 定义 2.14 与定义 2.1 相平行, 由于它依赖于参数, 需要作必要的修改.

**定义 2.14**　*动力系统 (2.20) 称为拓扑等价于动力系统 (2.21), 如果*

*(i) 存在参数空间的同胚 $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \beta = p(\alpha)$;*

*(ii) 存在依赖于参数的相空间的同胚 $h_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y = h_\alpha(x)$, 它将系统 (2.20) 在参数值 $\alpha$ 的轨道映上为系统 (2.21) 在参数值 $\beta = p(\alpha)$ 的轨道, 并保持时间方向.*

显然, 同胚 $p$ 将系统 (2.20) 的参数图映为系统 (2.21) 的参数图, 同胚 $h_\alpha$ 映对应的相图. 由定义, 拓扑等价的依赖于参数的系统有 (拓扑) 等价的分支图.

**注**　注意, 我们并不要求同胚 $h_\alpha$ 连续依赖于 $\alpha$, 那样将导致映射 $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(x))$ 是直积空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的同胚. 鉴于此, 某些作者称上面定义的拓扑等价为弱 (或纤维) 拓扑等价.　◇

如在常数参数情形, 如果对比较系统的局部性态有兴趣, 例如, 在状态空间原点的小邻域, 对小的参数值讨论等价系统, 可对定义 2.14 作些修改.

**定义 2.15**　*两个系统 (2.20) 和 (2.21) 称为在原点附近局部拓扑等价, 如果存在在直积空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的 $(x, \alpha) = (0, 0)$ 的小邻域内定义的一个映射 $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$, 使得*

*(i) $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是定义在 $\alpha = 0, p(0) = 0$ 的小邻域内的同胚;*

*(ii) $h_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是定义在 $x = 0, h_0(0) = 0$ 的小邻域 $U_\alpha$ 内的同胚, 它把 $U_\alpha$ 内系统 (2.20) 的轨道映上为 $h_\alpha(U_\alpha)$ 内 (2.21) 的轨道, 并保持时间方向.*

这个定义意味着可以引入原点的两个小邻域 $U_\alpha$ 和 $V_\beta$, 当 $\alpha, \beta$ 在对应参数空间的原点某个固定小邻域内变化时, 它们的直径有界, 关于 $\alpha, \beta$ 一致地异于零. 于是, 同胚 $h_\alpha$ 把 $U_\alpha$ 中 (2.20) 的轨道映上为 (2.21) 在 $V_{p(\alpha)}$ 中的轨道, 并保持时间方向.

现在考虑一般系统所有可能分支图的分类问题, 至少局部地 (即参数空间分支边界以及相空间内对应的临界轨道附近) 直到并包括某余维分支图的分类问题. 这些局部图可以作为 “建筑砖块” 去构造任何一个系统的 “大范围” 分支图. 这个问题对二维连续–时间系统直到并包括余维 3 的平衡点分支已经解决. 对高维的连续–时间和离散–时间系统平衡点和不动点直到并包括余维 2 分支在某些情况下也已解决, 虽然有关结果还不够完整 (见第 3, 4, 8, 9 章). 高维的局部分支和某些余维 1 和余维 2 分支的大范围分支也有杰出的结果.

上面所述的分类问题可以由下面的明显但重要的观察而得到简化. 自由参数的最小个数要求与依赖于参数的系统中的余维 $k$ 分支的 $k$ 刚好相等. 事实上, 为满

足单个分支条件, 一般需要 "调整" 系统的 (单个) 参数. 如果要满足两个条件, 两个参数就必须变化, 等等. 换句话说, 必须控制 $k$ 个参数以到达一般系统参数图中余维 $k$ 分支的边界. 另一方面, 在一般 $k$ 参数系统中研究余维 $k$ 分支已足够. 于是, 分支边界附近的一般 $m$ 参数 $(m > k)$ 图可由 $k$ 参数图按补方向 "移位" 来得到. 例如, Antronov-Hopf 分支是余维 1(局部) 分支. 因此, 它出现在依赖于一个参数的系统中的一个孤立参数值. 在二参数系统中, 一般出现在指定的曲线 (一维流形) 上. 如果以非零角度穿过 (横截相交) 此曲线, 得到的单参数分支图 (那里的参数, 例如是沿着横截曲线的弧长) 将与原来的单参数分支图拓扑等价. 如果穿过对应依赖于三个参数的系统的 Hopf 分支的二维曲面情况同样成立.

对平衡点和不动点的局部分支, 通有的分支图由*拓扑规范形*①提供. 这是分支理论中的中心概念之一. 在连续–时间系统中讨论这一问题, 虽然它也用在离散–时间系统. 有时候可以构造一个简单的 ($\xi_i$ 的多项式) 系统

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}^l, \tag{2.22}$$

它在 $\beta = 0$ 有平衡点 $\xi = 0$, 满足 $k$ 个分支条件, 这些条件决定这个平衡点的余维 $k$ 分支. 这里 $\sigma$ 是 (2.22) 中多项式系数 $\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, l$ 的向量. 在所有情形, 将考虑在系数空间内对应于 (2.22) 拓扑不等价的分支图的有限个区域. 在最简单的情形, $\sigma_i$ 仅取有限个整数值. 例如, 所有的系数 $\sigma_i = 1$, 除了一个 $\sigma_{i_0} = \pm 1$. 更复杂的情形, $\sigma$ 的有些分量可取实数值 (模).

与 (2.22) 在一起, 考虑系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{2.23}$$

它在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$.

**定义 2.16**(拓扑规范形) *系统 (2.22) 称为分支的拓扑规范形, 如果任何一个有平衡点 $x = 0$, 在 $\alpha = 0$ 满足相同分支条件的一般系统 (2.23), 局部拓扑等价于在原点附近对系数 $\sigma_i$ 某些值的系统 (2.22).*

当然, 我们必须解释一般系统是什么意思. 在所有情形, 考虑的 "一般" 是指系统满足有限个*一般性条件*. 这些条件将是不等式的形式

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

这里每个 $N_i$ 是 $f(x, \alpha)$ 关于 $x$ 和 $\alpha$ 在 $(x, \alpha) = (0, 0)$ 的某些偏导数的一些 (代数) 函数. 因此, "典型" 地依赖于参数的系统满足这些条件. 事实上, $\sigma$ 的值于是由 $N_i, i = 1, 2, \cdots, s$ 的值确定.

① 也可能构造一类某些大范围分支包括同宿轨道分支的规范形.

区别这些由在临界参数值 $\alpha = 0$ 的系统所确定的一般性条件是有用的. 这些条件可以借助于 $f(x,0)$ 关于 $x$ 在 $x=0$ 的偏导数来表达, 这些条件称为*非退化条件*. 所有其他条件, 其中含有 $f(x,\alpha)$ 关于 $\alpha$ 的偏导数, 都称为*横截性条件*. 这两类条件的作用是不同的. 非退化性条件保证临界平衡点 (*奇异性*) 不是太退化 (即满足所给分支条件的一类典型平衡点), 横截性条件保证参数按一般方法"开折"奇异性.

如果拓扑规范形已经构造好, 它的分支图显然具有通有意义, 因为它内在地显示具有有关分支的一般系统的部分分支图. 例 2.8 中的系统 (2.15) 是已经说明的对应于 $\sigma = -1$ 时 Antronov-Hopf 分支的二维拓扑规范形:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \beta\xi_1 - \xi_2 + \sigma\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \beta\xi_2 + \sigma\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2). \end{cases}$$

所指一般系统对这个分支的条件是

$$\text{(H.1)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{Re}\lambda_{1,2}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \neq 0$$

和

$$\text{(H.2)} \qquad l_1(0) \neq 0.$$

第一个条件 (横截性) 意味着一对共轭复特征值 $\lambda_{1,2}(\alpha)$ 以非零的速度穿过虚轴. 由第二个条件 (非退化性) 得知系统右端的 Taylor 系数 (直到并包含三阶系数) 的某些组合不为零. 第 3 章将推导 $l_1(0)$ 的明显公式. 那里也证明上面的系统实际上是 Hopf 分支的拓扑规范形, 也证明 $\sigma = \mathrm{sign}\, l_1(0)$.

**注**　与分支密切相关的概念是分支的*通有性形变*(或*通有开折*). 首先要定义*诱导系统*.

**定义 2.17**(诱导系统)　*系统*

$$\dot{y} = g(y,\beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m$$

*称为*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m$$

*的诱导系统, 如果* $g(y,\beta) = f(y,p(\beta))$, *这里* $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *是连续映射.*

注意, 映射 $p$ 不必是同胚, 故它可以不可逆.

**定义 2.18**(通有性形变)　*系统* (2.22) *是对应局部分支的通有性形变, 如果任何一个在* $\alpha = 0$ *满足相同分支条件和非退化条件, 在* $x=0$ *有平衡点的系统* (2.23), *在原点附近对某些系数值* $\sigma_i$ *局部拓扑等价于由* (2.22) *诱导的系统.*

在许多情形可以证明, 导出的拓扑规范形事实上是相应分支的通有性形变 (见练习 7). ◇

## 2.5 结构稳定性

存在这样的动力系统, 它们的相图 (在某区域内) 在所有充分小的扰动下都不定性地改变.

**例 2.11**(双曲平衡点的持久性)　假设 $x_0$ 是连续–时间系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.24}$$

的双曲平衡点, 这里 $f$ 光滑, $f(x_0) = 0$, 与 (2.24) 一起考虑它的单参数扰动

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.25}$$

这里 $g$ 光滑, $\varepsilon$ 是小参数; 令 $\varepsilon = 0$, (2.25) 变回到 (2.24), 系统 (2.25) 对充分小 $|\varepsilon|$ 有平衡点 $x(\varepsilon)$ 满足 $x(0) = x_0$. 事实上, 确定 (2.25) 平衡点的方程可以写为

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0,$$

满足 $F(x_0, 0) = 0$. 还有 $F_x(x_0, 0) = A_0$, 这里 $A_0$ 是 (2.24) 的在平衡点 $x_0$ 的 Jacobi 矩阵. 由于 $x_0$ 是双曲的, $\det A_0 \neq 0$, 隐函数定理保证存在光滑函数 $x = x(\varepsilon)$, $x(0) = x_0$, 对充分小 $|\varepsilon|$ 满足

$$F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

(2.25) 中 $x(\varepsilon)$ 的 Jacobi 矩阵

$$A_\varepsilon = \left( \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right) \bigg|_{x = x(\varepsilon)}$$

光滑依赖于 $\varepsilon$ 且在 $\varepsilon = 0$ 与 (2.24) 的 $A_0$ 重合. 正如已知的, 光滑依赖于参数变化的矩阵, 其特征值关于这些参数连续地变化①. 因此, 对所有充分小 $|\varepsilon|$, $x(\varepsilon)$ 没有特征值在虚轴上, 因为当 $\varepsilon = 0$ 时它没有这样的特征值. 换句话说, 对足够小的所有 $|\varepsilon|$, $x(\varepsilon)$ 是 (2.25) 的双曲平衡点. 此外, $A_\varepsilon$ 的稳定和不稳定特征值个数 $n_-$ 和 $n_+$ 对这些 $\varepsilon$ 值是固定不变的. 应用定理 2.2 知, 系统 (2.24) 和 (2.25) 在平衡点附近是拓扑等价的. 事实上, 对每一个小 $|\varepsilon|$, 存在平衡点 $x_\varepsilon$ 的邻域 $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, 在此邻域内系统 (2.25) 拓扑等价于在 $U_0$ 中的系统 (2.24). 简言之, 所有这些事实可概括地说成 “双曲平衡点在光滑扰动下是*结构稳定的*”.

---

① 特征值只要是单的就光滑地变化.

类似地, 讨论对所有充分小的 $|\varepsilon|$, 给出光滑系统

$$\dot{x} = G(x,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}^1$$

的双曲平衡点的持久性, 这里 $G(x,0) = f(x)$. ◇

例 2.11 中的参数 $\varepsilon$ 可以某种方式度量系统 (2.24) 和它的扰动 (2.25) 之间的距离. 若 $\varepsilon = 0$ 这两系统重合, 存在两个光滑动力系统之间距离的广义定义. 考虑两个连续–时间系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.26}$$

和

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.27}$$

$f$ 与 $g$ 光滑.

**定义 2.19**　*在闭区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 中, (2.26) 与 (2.27) 之间的距离是一个正数 $d_1$, 由下式给出:*

$$d_1 = \sup_{x \in U} \left\{ \|f(x) - g(x)\| + \left\| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right\| \right\},$$

*若 $d_1 \leqslant \varepsilon$, 则两系统是 $\varepsilon$ 接近.*

这里 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中向量范数和矩阵范数, 例如

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1,\cdots,n} x_i^2}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1,\cdots,n} a_{ij}^2}.$$

因此, 如果两个系统的右端和它们的一阶偏导数一起彼此接近, 就说该两个系统接近. 在这情形通常称它们为 $C^1$*接近系统*. 显然, 系统 (2.24) 和 (2.25)之间的距离正比例于 $|\varepsilon|$ : $d_1 = C|\varepsilon|$, 对某常数 $C > 0$, 它依赖于在 $U$ 中 $\|g\|$ 和 $\left\|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right\|$ 的上界. 定义 2.19 可逐词逐句地应用到离散–时间系统.

**注**　如果要保证接近系统在平衡点附近具有相同的拓扑类型 (见例 2.11), 出现在距离定义中的一阶偏导数是很自然的. 容易构造一个光滑系统 (2.27), 它在 $C^0$ 距离

$$d_0 = \sup_{x \in U} \{\|f(x) - g(x)\|\}$$

下是 $\varepsilon$ 接近于 (2.26), 而在 (2.26) 平衡点的任何邻域内, 系统有完全不同个数的平衡点 (见图 2.17, 对 $n = 1$). ◇

现在定义结构稳定系统, 这意味着任一充分接近的系统是拓扑等价于结构稳定系统. 下面的定义看起来很自然.

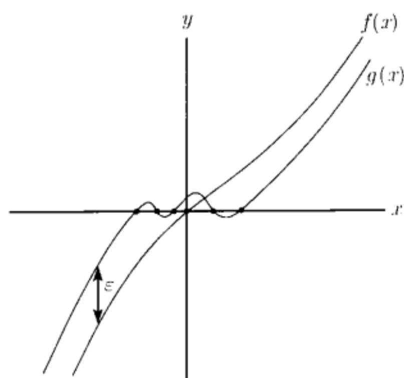



图 2.17　两个 $C^0$ 接近的函数具有不同个数的零点

**定义 2.20**(严格的结构稳定性)　系统 (2.26) 称为在区域 $U$ 中严格结构稳定, 如果任一在 $U$ 中 $C^1$ 充分接近的系统 (2.27) 拓扑等价于在 $U$ 中的 (2.26).

但是要注意, 在 $U$ 的边界上具有双曲平衡点或者双曲环接触到边界 (见图 2.18), 那样的系统按上面的定义是结构不稳定的. 因为存在系统小扰动将这样的平衡点移到了 $U$ 外, 或者把这种 (或部分) 环推到 $U$ 外. 有两个方法处理这种困难: 第一个方法是在 "整个相空间内" 考虑动力系统而把任何区域忘却掉. 这一方法对定义在紧光滑流形 $X$ 上的动力系统是理想的. 这时, 定义 2.20 中的 "区域 $U$"(连同距离定义) 被 "紧流形 $X$" 所代替. 遗憾的是, 对 $\mathbb{R}^n$ 中的系统, 这容易导致复杂化. 例如, 如果 $d_1$ 中的上确界是在整个 $\mathbb{R}^n$ 上取的话, 许多看上去很平常的系统之间的距离可以是无穷. 因此, 第二个方法对有界区域需要继续做, 但必须引入结构稳定性的另一个定义.

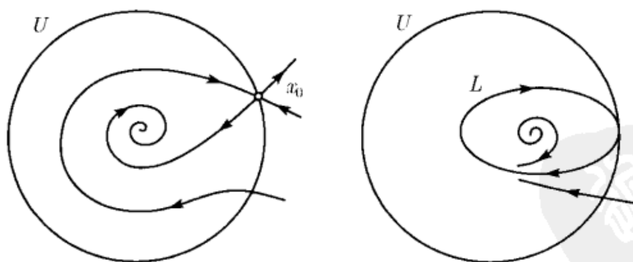



图 2.18　按定义 2.20 的结构不稳定轨道

**定义 2.21**(Antronov 结构稳定性)　定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的系统 (2.26) 称为在区域 $D_0 \subset D$ 内是结构稳定, 如果对任何在 $D$ 内 $C^1$ 充分接近的系统 (2.27), 存在区域 $U, V \subset D, D_0 \subset U$, 使得在 $U$ 中的 (2.26) 拓扑等价于 $V$ 中的 (2.27)(见图 2.19).

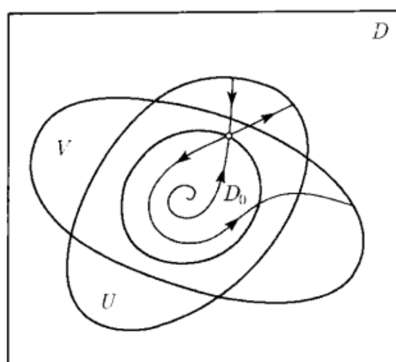



图 2.19　Antronov 的结构稳定性

对离散-时间系统可给出平行的定义. 如果 (2.26) 在 $D_0 \subset D$ 内结构稳定, 那么它在任何区域 $D_1 \subset D_0$ 内结构稳定. 存在这样的情况, 定义 2.20 和 2.21 实际是重合的.

**引理 2.1**　若一个系统在区域 $D_0$ 内结构稳定, $D_0$ 的边界是 $B_0$, 且系统的所有轨道都严格指向 $B_0$ 的内部, 则它在 $U = D_0$ 内严格结构稳定. □

下面的经典定理给出了平面上连续-时间系统结构稳定的充要条件.

**定理 2.5**(Antronov-Pontryagin, 1937)　光滑动力系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

在区域 $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ 中结构稳定, 当且仅当

(i) 系统在 $D_0$ 内有有限多个平衡点和极限环, 且它们都是双曲的;

(ii) 在 $D_0$ 内不存在从鞍点回到鞍点的分界线, 也不存在连接两个鞍点的分界线 (见图 2.20). □

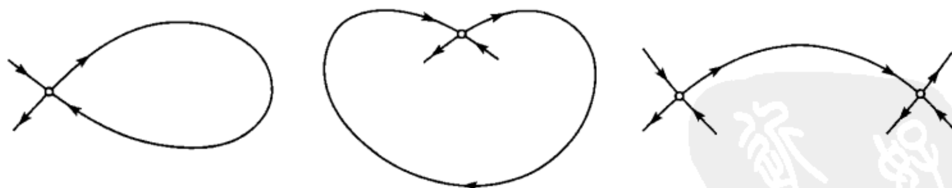


图 2.20　平面系统中结构不稳定的连接轨道

**注**　事实上, 在 Antronov-Pontryagin(1937) 中, 他们考虑的系统的右端在区域 $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ 内解析, $D_0$ 的边界是 (逐段) 光滑曲线所围. 他们也假设所有轨道都严格指向该区域的内部使得能利用定义 2.20. 后来引入的定义 2.21 中有关在边界上性态的限制被去掉了. 此外, 他们证明了将扰动系统在 $D_0$ 内的相图变换成原来系统相图的同胚 $h$ 可选为 $C^0$ 接近于恒同映射 $\mathrm{id}(x) = x$. ◇

这个定理对平面系统的结构稳定性给出了完全的描述. 很明显, 虽然毫无疑问地证明了平面上典型 (一般) 系统满足 Antronov-Pontryagin 条件, 从而是结构稳定. 如果考虑依赖于 $k$ 个参数的一般平面系统的分支图, 这些是结构稳定系统, 它们在参数空间中占据 $k$ 维开区域.

人们会问: 类似的定理在 $n$ 维空间中是否存在? 答案是否定的. 更确切地说, 可以建立连续–时间系统结构稳定的*充分条件*(类似于定理 2.5, 称为 Morse-Smale 条件). 不过, 存在这样的系统不满足这些条件但是结构稳定. 特别, 结构稳定系统在紧区域内可以有无穷多个周期轨道. 为理解此现象, 在 $\mathbb{R}^3$ 考虑一个连续–时间系统, 假定存在一个二维截面 $\Sigma$, 系统在它上面定义了产生 Smale 马蹄的 Poincaré 映射 (见第 1 章及例 2.7). 于是, 系统在相空间的某个区域内存在无穷多个鞍点环. $C^1$ 接近系统将在 $\Sigma$ 上定义 $C^1$ 接近 Poincaré 映射. 马蹄稍有变形, 但第 1 章实现的几何结构仍成立. 因此, 含有无穷多个鞍点环的复杂不变集在所有充分小的扰动下得到保持. 对应相图的同胚变换也可构造.

进一步, 可构造一个系统, 它没有接近结构稳定系统. 我们建议读者直接查看本章的附录.

## 2.6 练　　习

1. 确定下面的线性系统哪个在原点有结构稳定的平衡点, 并画出它们的相图:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + y; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ y = -x - y. \end{cases}$

2. 下面的偏微分方程系统是模拟神经刺激沿着一条轴线传递的 Hodgkin-Huxley 方程的 FitzHugh-Nagumo 模拟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_a(u) - v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = bu, \end{cases}$$

这里 $u = u(x,t)$ 表示膜势, $v = v(x,t)$ 为 "恢复" 变量, $f_a(u) = u(u-a)(u-1), 1 > a > 0, b > 0, -\infty < x < +\infty$ 和 $t > 0$.

这些方程的行波解是下面形式的解

$$u(x,t)=U(\xi),\quad v(x,t)=V(\xi),\quad \xi=x+ct,$$

其中 $c$ 为未知波的传播速度, 函数 $U(\xi)$ 和 $V(\xi)$ 是波廓.

(a) 推导波廓和 "时间"$\xi$ 的三个常微方程. 提示：引入新变量 $W=\dot{U}$.

(b) 验证对一切 $c>0$, 波廓系统 (*波系统*) 有唯一平衡点, 它有一个正特征值和两个具负实部的特征值. 提示：先验证特征值为实的, 再证明特征方程没有根在虚轴上, 最后利用特征值关于参数的连续依赖性.

(c) 推断平衡点可以是鞍点或鞍–焦点, 它具一维不稳定和二维稳定不变流形, 并求出定义这两种情形之间的边界的关于系统参数的条件. $(a,c)$ 平面内对不同的 $b$ 值和对应鞍–焦点指定的区域画出几条边界. 提示：在边界上多项式 $h(\lambda)$ 有二重根 $\lambda_0: h(\lambda_0)=h'(\lambda_0)=0$.

(d) 画出在两个区域内可能的*刺激*行波廓. 提示：刺激对应于波系统满足 $\xi\to\pm\infty$ 时

$$(U(\xi),V(\xi),W(\xi))\to(0,0,0)$$

的解. 详见第 6 章.

3. 证明：系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1,\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$$

在原点附近局部拓扑等价于系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1,\\ \dot{x}_2=-2x_2,\end{cases}$$

两个系统微分同胚吗? 提示：模仿例 2.1 的证明, 不需要引入极坐标.

4. (微分同胚的极限环) 求证：微分同胚的连续–时间系统, 它们对应的极限环有相同的周期和振幅. 提示：利用对应环 (考虑为具额外环变量的自治系统) 的变分方程是微分同胚的这个事实.

5. (轨道等价性和大范围流) (a) 证明纯量系统

$$\frac{dx}{dt}=x^2,\quad x\in\mathbb{R}^1$$

有在有限时间内趋于无穷的解, 因此, 它只定义*局部流*$\varphi^t:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, 此系统轨道等价于纯量系统

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{x^2}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}^1,$$

它没有上述的解, 因此定义大范围流 $\psi^\tau:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$. $t$ 与 $\tau$ 有何关系?

(b) 证明：任何光滑系统 $\dot{x}=f(x), x\in\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内是轨道等价于在 $\mathbb{R}^n$ 上定义大范围流 $\psi^\tau$ 的光滑系统. 提示：系统

$$\dot{x}=\frac{1}{1+||f(x)||}f(x)$$

能够担任这个任务, 这里 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内用标准数量积定义的范.

6. (单点参数图) 在 $\mathbb{R}^3$ 内构造一个依赖于两个参数 $(\alpha,\beta)$ 的自治微分方程系统, 它对除 $(\alpha,\beta)=(0,0)$ 以外的所有参数有拓扑等价的相图. 提示：利用例 2.9 的思想. 在 $\alpha=\beta=0$ 系统有两个鞍点, 它们有一维不稳定流形和一维稳定流形, 这两个流形有重合的分枝 (见图 2.21).

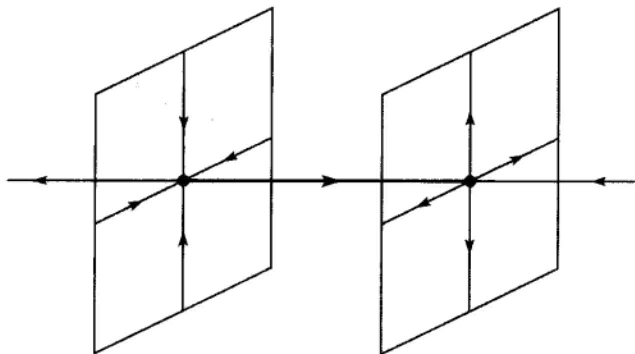


图 2.21

7. (诱导系统) 求证：纯量系统

$$\dot{y}=\beta y-y^2$$

有超临界分支, 此系统拓扑等价于 (事实上是微分同胚) 由系统

$$\dot{x}=\alpha-x^2$$

诱导的系统, 它有折分支. 提示：见 Arrowsmith, Place(1990, p. 193).

8. (引理 2.1 的证明) (a) 证明：光滑平面系统 $\dot{x}=f(x), x\in\mathbb{R}^2$ 在区域 $U$ 内拓扑等价 (实际上是微分同胚) 于单位正方形 $V=\{(y_1,y_2):|y_1|\leqslant 1,|y_2|\leqslant 1\}$(见图 2.22) 内的系统

$$\begin{cases}\dot{y}_1=1,\\ \dot{y}_2=0.\end{cases}$$

上面光滑系统在 $U$ 内无平衡点和周期轨道. $U$ 的边界是两条轨道和两条与这轨道横截相交的光滑曲线 (见图 2.22).

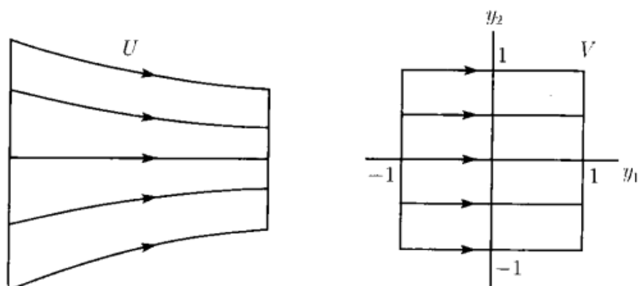



图 2.22　$U$ 中的相图与 $V$ 中的相图等价

(b) 推广这个结果到 $n$ 维系统并证明引理 2.1.

(c) 利用 (a) 证明平面上两个双曲鞍点有局部等价的相图. 何处失去可微性? 提示: 见图 2.23; 提供等价性的明显映射的构造在第 6 章给出.

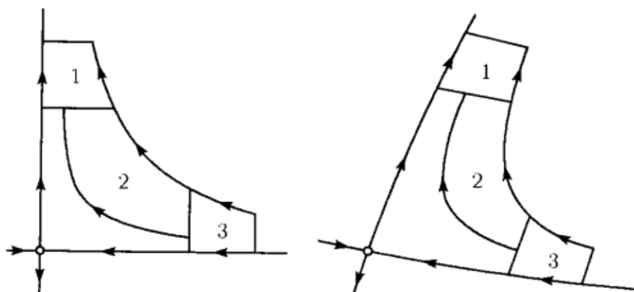



图 2.23　鞍点是拓扑等价

## 2.7　附录: 文献评注

动力系统的拓扑等价性概念出现在 Antronov 和 Pontryagin (1937) 专门致力于平面结构稳定的这篇文章中. 此概念和其他等价性被广泛应用于奇点理论, 以及对映射和它们的形变进行分类 (Thom, 1972; Arnold, Varchenko, Guseyn-Zade, 1985; Golubitsky, Schaeffer, 1985).

非线性动力系统局部拓扑等价于它在双曲平衡点的线性化是由 Grobman(1959) 和 Hartman (1963) 证明的. 详见 Hartman (1964). 映射在双曲不动点附近局部拓扑等价于它的线性化是由 Grobman 和 Hartman 作为对应连续–时间情形定理证明的产物 (也可见 Nitecki(1971)). 两个具 $n_0 = 0$ 以及相同个数 $n_-$ 和 $n_+$ 的线性系统的拓扑等价性的构造性证明可在 Arnold (1973) 和 Hale, Kocak (1991) 中找到.

微分方程的局部稳定流形定理起源于 Hartman (1901) 和 Perron (1930) 的工作. 完全的证明和推广是由 Kelly (1967), Hirsch, Pugh, Shub (1977) (也见 Irwin(1980))

给出. 映射的局部稳定流形定理实际上是用以证明微分方程有关定理的主要技术工具. 因此, 它的证明可在所述的文献中找到, 例如, Hartman (1964) 或 Nitecki (1971). 后面的文献也包含有双曲不动点的稳定集和不稳定集是在单射浸入下 $\mathbb{R}^{n-}$ 和 $\mathbb{R}^{n+}$ 的象的证明. 关于双曲不变集的许多结果在 Katok, Hasselblatt (1995) 中有证明.

由双曲不动点的稳定流形和不稳定流形横截相交所产生的复杂结构是被 Poincaré (1892, 1893, 1899) 在分析出现在天体力学中保面积 (保守) 映射时发现的. 这种现象的进一步分析在保守情形是由 Birkhoff (1935) 所作. 他特别强调对应轨道的统计性质. 非保守情形是由 Smale (1963), Neimark (1967) 和 Shil′nikov(1967b) 所研究. 这一课题的漂亮说明是由 Moser (1973) 给出.

存在两种主要方法去研究动力系统的分支. 第一种方法起源于 Poincaré 的工作, 他分析了当系统的参数变化时从原有的已知的相对象出现 (*分支*) 某些类型 (例如平衡点、环) 的新对象. 这一方法引导有限维和无穷维非线性方程平衡点分支理论的发展 (例如, Vainberg, Trenogin (1974); Chow, Hale(1982)). 这一方法也被证明是研究某些大范围分支的有力工具 (见第 6 章文献评注). 第二种方法要回到 Antronov (1933), 后又被 Thom (1972) 重新引入, 他为了对梯度系统 $\dot{x} = -\text{grad}\ V(x,\alpha)$ 进行分类而去研究在参数变化时对整个相图的重排 (*分支*). 原则上, 分支分析应在更加完全的相图研究之前, 但是许多情形完全的相图是办不到的, 而研究某些解则是得到分支某些信息的仅有的方法.

二维动力系统相图的分支已被 Andronov 和他的合作者在 1930~1950 期间详细地研究了, 并总结在他们的经典著作内. 此书的英译本 (Andronov, Leontovich, Gordon, Maier, 1973) 已经出版. 在 Arnold (1972) 中, 他第一个把可微映射奇点理论中的许多思想用到动力系统中去 (类似的方法被 Takens (1974a) 所发展). 依赖于参数的系统 (族) 的拓扑等价性概念. 局部分支的通有性形变, 以及许多原始结果在 Arnold 的报告中首次被叙述, 而后被用在他的书 Arnold (1983) 中. 注意, 英文文献中通有性形变按奇点理论通常称为*通有开折*. 分支理论的基本综合包括大范围分支结果是由 Arnold, Afraimovich, Il′yashenko 和 Shil′nikov (1994) 给出. 标准的分支理论研究生水平的教科书有 Guckenheimer, Holmes (1983), Arrowsmith, Place (1990), Wiggins (1990), 以及更近代的 Shil′nikov, L. P., 和 Shil′nikov, A. L., Turaev, Chua (1998, 2001).

结构稳定的二维 ODE 系统是由 Andronov 和 Pontryagin(1937) 在粗系统名字下进行研究的. 实际上, 它们要求包含相图同胚变换接近于恒同映射. Peixoto(1962) 证明了二维流形上的典型系统是结构稳定的. 为讨论 "典型性", 我们必须指定所考虑的动力系统的空间 $\mathcal{D}$. 于是, 一个性质称为*典型*(或*一般*), 如果 $\mathcal{D}$ 的可数多个开稠集之交具有这个性质 (介绍性的讨论见 Wiggins (1990)). 一类结构稳定的高维动力系统 (称为 Morse-Smale 系统) 被 Smale (1961, 1967) 确定. 这种系统只有有限个

平衡点和环, 都是双曲的并且它们的稳定和不稳定流形相交成非零角 (横截相交). 存在这样的结构稳定系统, 它们并不满足 Morse-Smale 准则, 特别, 它们具有无穷多个双曲环 (Smale, 1963). 其次, 结构稳定对高维动力系统也不是典型性质. 结构稳定系统在光滑动力系统的空间 $\mathcal{D}$ 内也不稠 (Smale, 1966). 有兴趣的读者可参看 Nitecki (1971), Arnold (1983) 以及 Katok 和 Hasselblatt (1995), 以便得到更多信息.



# 第 3 章　连续–时间系统平衡点的单参数分支

这一章叙述确定 $n$ 维连续–时间系统平衡点最简单分支, 即折 (fold) 分支和 Hopf 分支的条件. 然后尽可能在最低维研究这些分支: 纯量系统的折分支和平面系统的 Hopf 分支. 第 5 章介绍如何把这些结果 "提升" 到 $n$ 维情形.

## 3.1　最简单的分支条件

考虑依赖于一个参数的连续–时间系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

其中 $f$ 关于 $x$ 和 $\alpha$ 都光滑. 设 $x = x_0$ 是这个系统当 $\alpha = \alpha_0$ 时的一个双曲平衡点. 正如在第 2 章中看到的, 在小参数变化下, 平衡点稍微有些移动, 但仍保持双曲性. 因此, 可以进一步变化参数以监控平衡点. 显然, 一般只有两个方法使双曲性条件遭到破坏. 对参数的某些值, 其一是单个特征值趋于零, 这时有 $\lambda_1 = 0$(见图 3.1(a)), 其二是一对单复特征值到达虚轴, 这时有 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$(见图 3.1(b)). 显然 (可精确的阐述), 需要更多的参数才能配置另外的特征值在虚轴上. 注意, 如果系统有某些特殊性质, 例如对称系统, 这也许是不成立的 (见第 7 章).

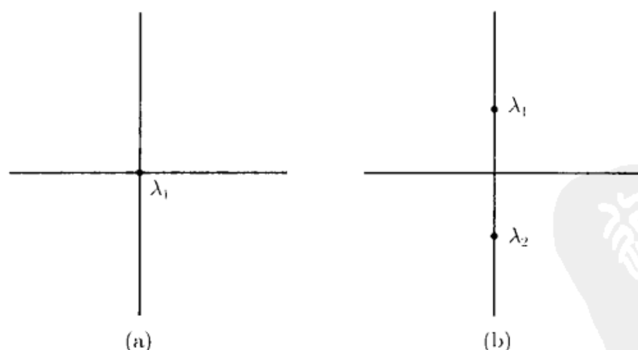



图 3.1　余维 1 临界情形

本章的其余部分基本上是对满足上述两条件之一的非双曲平衡点是结构不稳定的证明, 以及参数变化时对局部相图对应分支的分析. 在第 2 章中已经看到这种分支的几个例子. 用下面两个定义结束本节.

**定义 3.1**　与出现 $\lambda_1 = 0$ 的现象相对应的分支称为折 (或切) 分支.

**注**　这个分支有许多其他名字, 包括极限点分支、鞍-结点分支, 以及转向点分支. ◇

**定义 3.2**　与出现 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ 相对应的分支称为 Hopf (或 Antronov-Hopf) 分支.

注意, 切分支对 $n \geqslant 1$ 是有可能的, 但对 Hopf 分支, 必须 $n \geqslant 2$.

## 3.2　折分支规范形

考虑依赖于一个参数的一维动力系统

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha). \tag{3.1}$$

在 $\alpha = 0$, 这个系统有一个非双曲平衡点, $x_0 = 0$, $\lambda = f_x(0,0) = 0$. 对 $\alpha$ 所有的其他值, 这个系统的性态也是清楚的 (见图 3.2). 当 $\alpha < 0$ 时, 系统有两个平衡点: $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, 左边这一个稳定, 右边那个不稳定. 当 $\alpha > 0$ 时, 系统没有平衡点. 当 $\alpha$ 从负到正穿过零时, 两个平衡点 (稳定的和不稳定的)"相碰", 在 $\alpha = 0$ 变成一个具 $\lambda = 0$ 的平衡点, 再消失. 这是一个折分支. 术语 "相碰" 是合适的, 因为当 $\alpha \to 0$ 时平衡点移动的速度 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} x_{1,2}(\alpha)\right)$ 趋于无穷.

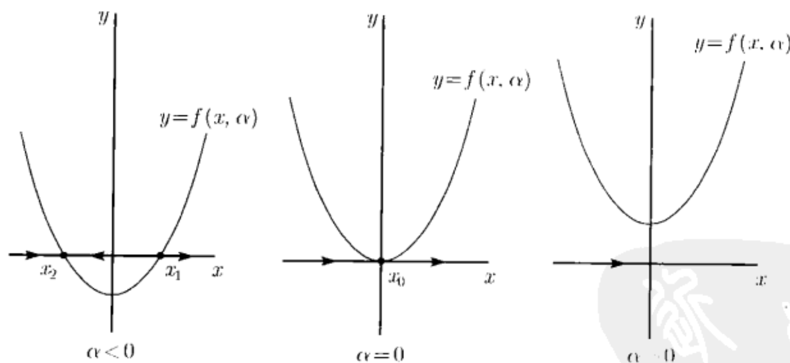



图 3.2　折分支

存在叙述这种分支的另一个方法: 在相空间和参数空间的积空间 (为简单起见, 取 $(x, \alpha)$ 平面) 内作出分支图. 方程

$$f(x, \alpha) = 0$$

定义了平衡点流形, 它是一条简单的抛物线 $\alpha = -x^2$ (见图 3.3). 这种叙述立刻展

示了分支图像. 固定某个 $\alpha$ 值, 对此参数值可容易地确定平衡点的个数. 平衡点流形在参数轴上的投影在点 $(x,\alpha)=(0,0)$ 有折形奇异性.

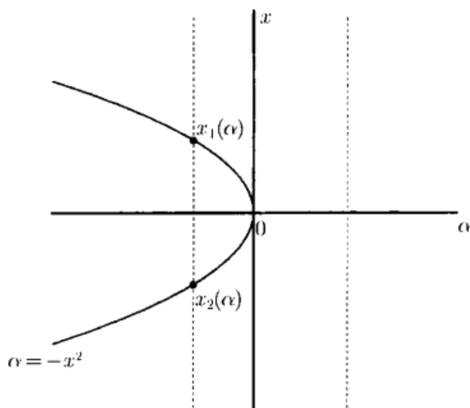



图 3.3 相–参数空间中的折分支

**注** 用同样方法可考虑系统 $\dot{x}=\alpha-x^2$. 分析揭示当 $\alpha>0$ 时有两个平衡点. ◇

现在, 对系统 (3.1) 加入可光滑依赖于参数的高阶项. 发生这样的情况, 这些项并不定性地改变在原点 $x=0$ 附近当参数 $\alpha$ 接近于零时系统的性态. 事实上, 下面的引理成立.

**引理 3.1** *系统*

$$\dot{x}=\alpha+x^2+O(x^3)$$

*局部拓扑等价于原点附近的系统*

$$\dot{x}=\alpha+x^2.$$

**证明** 分两步进行. 它基于这样的事实, 对纯量系统, 同胚映平衡点到平衡点, 也包括它们的轨道连接.

第一步 (平衡点分析). 引入尺度化变量 $y$, 将第一个系统写为

$$\dot{y}=F(y,\alpha)=\alpha+y^2+\psi(y,\alpha), \tag{3.2}$$

其中 $\psi=O(y^3)$ 是 $(0,0)$ 附近 $(y,\alpha)$ 的光滑函数. 考虑 $(y,\alpha)$ 平面上 $(0,0)$ 附近 (3.2) 的平衡点流形

$$M=\{(y,\alpha):F(y,\alpha)=\alpha+y^2+\psi(y,\alpha)=0\}.$$

曲线 $M$ 通过原点 $(F(0,0)=0)$. 由隐函数定理 (因为 $F_\alpha(0,0)=1$), 它可由 $y$ 局部参数化:

$$M=\{(y,\alpha):\alpha=g(y)\},$$

其中 $g$ 对小 $|y|$ 光滑并有定义. 此外,

$$g(y) = -y^2 + O(y^3)$$

(验证). 因此, 对任何充分小 $\alpha < 0$. (3.2) 在原点附近存在两个平衡点 $y_1(\alpha)$ 和 $y_2(\alpha)$, 对相同参数值它们接近于 (3.1) 的平衡点, 即 $x_1(\alpha) = +\sqrt{-\alpha}$ 和 $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$(见图 3.4).

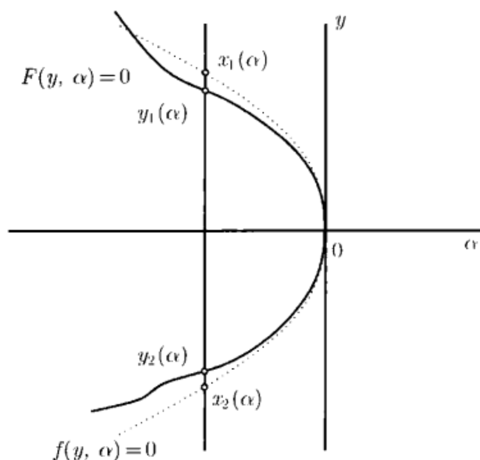



图 3.4　扰动系统的折分支

第二步 (构造同胚). 对小 $|\alpha|$, 构造依赖于参数的映射 $y = h_\alpha(x)$ 如下: 对 $\alpha \geqslant 0$ 取恒同映射

$$h_\alpha(x) = x.$$

对 $\alpha < 0$, 取线性变换

$$h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x,$$

其中系数 $a, b$ 由条件

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2$$

唯一确定 (找它们). 构造的映射 $h_\alpha : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 是同胚, 它将 (3.1) 在原点附近的轨道映为 (3.2) 相应的轨道且保持时间方向. 第 2 章把这个性质指为依赖于参数系统的**局部拓扑等价性**.

虽然本书不要求同胚 $h_\alpha$ 连续依赖于 $\alpha$(见定义 2.14 后面的注), 当负 $\alpha \to 0$ 时这个性质仍成立, 因为这时 $h_\alpha$ 趋于恒同映射. □

## 3.3 一般折分支

我们将证明系统 (3.1)($x^2$ 项的符号可改变) 是具切分支的一般一维系统的拓扑规范形. 在第 5 章也将看到在某些强意义下描述一般 $n$ 维系统的切分支.

假设具光滑 $f$ 的系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1, \ \alpha \in \mathbb{R}^1 \tag{3.3}$$

在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 满足 $\lambda = f_x(0,0) = 0$. 将 $f(x,\alpha)$ 在 $x = 0$ 关于 $x$ 进行 Taylor 展开:

$$f(x,\alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3).$$

满足两个条件: $f_0(0) = f(0,0) = 0$(*平衡点条件*) 和 $f_1(0) = f_x(0,0) = 0$(*折分支条件*).

下面简单计算的主要思想是用坐标与参数的光滑可逆变换, 将系统 (3.3) 变换成 (3.1) 直到并包括二次项. 然后, 应用引理 3.1, 使得尽可能去掉高阶项. 在计算过程中将会看到, 某些*非退化条件*和*横截性条件*必须加入, 以使这些变换成为可能. 对单参数具折分支的系统, 这些条件实际上可考虑是*一般的*. 这个思想可应用于所有的局部分支问题. 在本章的后面就是用这个方法分析 Hopf 分支.

第一步 (坐标平移). 引入新变量 $\xi$ 来执行坐标的平移:

$$\xi = x + \delta, \tag{3.4}$$

这里 $\delta = \delta(\alpha)$ 暂时是未知函数, 稍后将确定. 逆坐标变换是

$$x = \xi - \delta.$$

将 (3.4) 代入 (3.3) 得

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + \cdots.$$

因此

$$\begin{aligned}\dot{\xi} =& [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ &+ [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ &+ [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3).\end{aligned}$$

假设

(A.1) $$f_2(0) = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0) \neq 0.$$

于是, 对所有充分小 $|\alpha|$, 存在光滑函数 $\delta(\alpha)$ 以去掉上面方程的线性项, 这可由隐函数定理证明. 事实上, 用某光滑函数 $\psi$, 线性项为零的条件可写为

$$F(\alpha,\delta) \equiv f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha,\delta) = 0.$$

有

$$F(0,0)=0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \delta}\right|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right|_{(0,0)} = f_1'(0),$$

故使得 $\delta(0)=0$, 且 $F(\alpha,\delta(\alpha)) \equiv 0$ 的光滑函数 $\delta=\delta(\alpha)$(局部) 存在且唯一, 且也得

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2).$$

现在得到一个不含线性项的 $\xi$ 方程

$$\dot{\xi} = [f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3). \tag{3.5}$$

第二步 (引入新参数). 将 (3.5) 的常数项 (与 $\xi$ 无关) 视为新参数 $\mu=\mu(\alpha)$:

$$\mu = f_1'(0)\alpha + \alpha^2\varphi(\alpha),$$

这里 $\varphi$ 是光滑函数. 有

(a) $\mu(0)=0$;

(b) $\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0,0)$.

如果假设

(A.2) $$f_\alpha(0,0) \neq 0,$$

则由反函数定理知, 满足 $\alpha(0)=0$ 的光滑函数 $\alpha=\alpha(\mu)$ 局部存在且唯一. 于是, 方程 (3.5) 现在成为

$$\dot{\xi} = \mu + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

由第一个假设 (A.1), 这里 $b(\mu)$ 是满足 $b(0)=f_2(0)\neq 0$ 的光滑函数.

第三步 (最后尺度化). 令 $\eta = |b(\mu)|\xi$ 以及 $\beta = |b(\mu)|\mu$. 于是得

$$\dot{\eta} = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3),$$

这里, $s = \operatorname{sign} b(0) = \pm 1$.

因此, 下面的定理得到了证明.

**定理 3.1**　*假设具光滑 $f$ 的一维系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x\in\mathbb{R}^1,\ \alpha\in\mathbb{R}^1,$$

在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 设 $\lambda=f_x(0,0)=0$. 假设条件 (A.1) 和 (A.2) 得到满足, 即

$$f_{xx}(0,0)\neq 0;$$

$$f_\alpha(0,0)\neq 0.$$

则存在可逆的坐标和参数变换把系统化为

$$\dot{\eta}=\beta\pm\eta^2+O(\eta^3).$$ □

利用引理 3.1 可以去掉项 $O(\eta^3)$, 最后得到下面的一般性结果.

**定理 3.2**(折分支的拓扑规范形)　任何一个在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 且满足 $\lambda=f_x(0,0)=0$ 在原点附近的一般单参数纯量系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha)$$

局部拓扑等价于下面的规范形之一:

$$\dot{\eta}=\beta\pm\eta^2.$$ □

**注**　定理 3.2 中的一般性条件就是定理 3.1 中的非退化条件 (A.1) 与横截性条件 (A.2). ◇

## 3.4 Hopf 分支规范形

下面考虑依赖于一个参数的两个微分方程的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\alpha x_1-x_2-x_1(x_1^2+x_2^2),\\ \dot{x}_2=x_1+\alpha x_2-x_2(x_1^2+x_2^2).\end{cases}\tag{3.6}$$

此系统对所有 $\alpha$, 有平衡点 $x_1=x_2=0$. 在此平衡点处的 Jacobi 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -1\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

有特征值 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}$. 引入复变量 $z=x_1+\mathrm{i}x_2$, $\bar{z}=x_1-\mathrm{i}x_2$, $|z|^2=z\bar{z}=x_1^2+x_2^2$. 这个复变量满足微分方程

$$\dot{z}=\dot{x}_1+\mathrm{i}\dot{x}_2=\alpha(x_1+\mathrm{i}x_2)+\mathrm{i}(x_1+\mathrm{i}x_2)-(x_1+\mathrm{i}x_2)(x_1^2+x_2^2),$$

因此, 可以将系统 (3.6) 写为下面的复数形式

$$\dot{z}=(\alpha+\mathrm{i})z-z|z|^2.$$

最后, 利用表达式 $z=\rho e^{i\varphi}$ 得到

$$\dot{z}=\dot{\rho}e^{i\varphi}+\rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi}, \tag{3.7}$$

或

$$\dot{\rho}e^{i\varphi}+i\rho\dot{\varphi}e^{i\varphi}=\rho e^{i\varphi}(\alpha+i-\rho^2),$$

它给出了系统 (3.6) 的极坐标形式

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(\alpha-\rho^2),\\ \dot{\varphi}=1.\end{cases} \tag{3.8}$$

用这个极坐标方程容易分析当 $\alpha$ 通过零时系统相图的分支, 因为 (3.8) 中的 $\rho$ 与 $\varphi$ 的方程相互独立. 第一个方程 (这里, 显然只需考虑 $\rho\geqslant 0$) 对所有 $\alpha$ 值有平衡点 $\rho=0$. 当 $\alpha<0$ 时它是线性稳定; $\alpha=0$ 时它仍稳定但是非线性的 (故解收敛于零的速度不再是指数形式); $\alpha>0$ 时平衡点变成线性不稳定. 此外, $\alpha>0$ 时存在另外一个平衡点 $\rho_0(\alpha)=\sqrt{\alpha}$. 第二个方程描述等速旋转. 因此, 由 (3.8) 的两个方程所定义的运动叠加, 就得到了原来的二维系统 (3.6) 的分支图 (见图 3.5). 这个系统在原点永远有平衡点. 当 $\alpha<0$ 时它是稳定焦点, 当 $\alpha>0$ 时它是不稳定焦点. 在临界参数值 $\alpha=0$, 平衡点不是线性稳定但拓扑等价于焦点. 有时称它是**弱吸引焦点**. 当 $\alpha>0$ 时, 此平衡点被一条孤立闭轨 (**极限环**) 所围, 它是稳定且唯一的. 这个环是以 $\rho_0(\alpha)=\sqrt{\alpha}$ 为半径的圆周. 所有从此环的内部和外部出发的轨道除原点以外当 $t\to+\infty$ 时都趋于此环. 这是一个 Antronov-Hopf 分支.

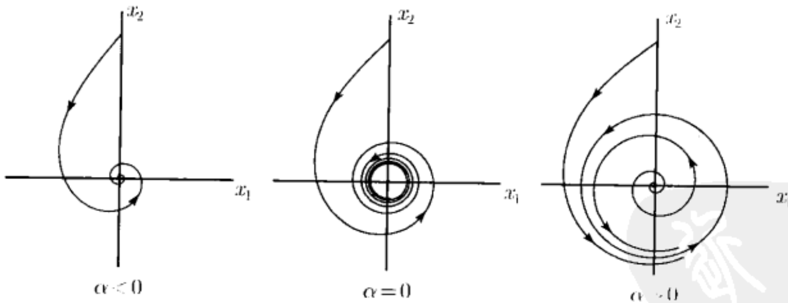



图 3.5　超临界 Hopf 分支

这个分支也可在 $(x,y,\alpha)$ 空间内叙述 (图 3.6). 出现的极限环的 $\alpha$ 族构成了一个**抛物面**.

非线性项具相反符号的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\alpha x_1-x_2+x_1(x_1^2+x_2^2),\\ \dot{x}_2=x_1+\alpha x_2+x_2(x_1^2+x_2^2).\end{cases} \tag{3.9}$$

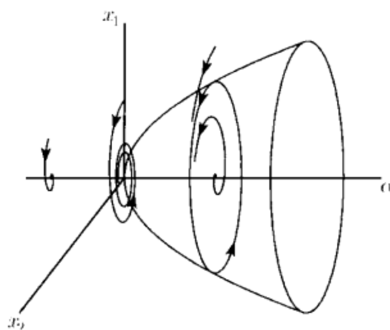



图 3.6　相–参数空间中的超临界 Hopf 分支

可用同样方法分析 (见图 3.7 和图 3.8). 这个方程可写为下列复数形式

$$\dot{z} = (\alpha + \mathrm{i})z + z|z|^2.$$

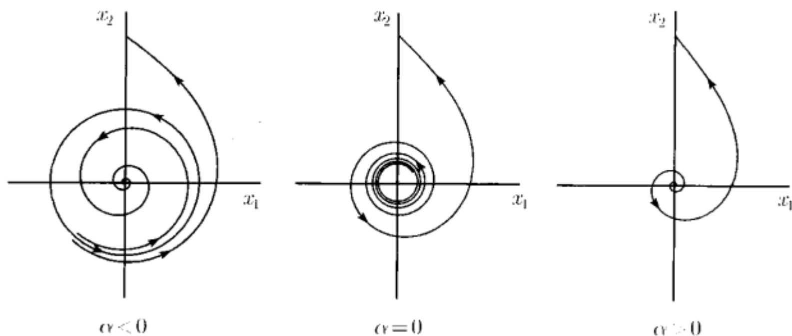



图 3.7　亚临界 Hopf 分支

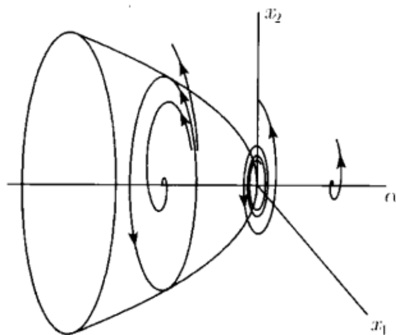



图 3.8　相–参数空间中的亚临界 Hopf 分支

此系统在 $\alpha = 0$ 有 Antronov-Hopf 分支. 与 (3.6) 相反, (3.9) 存在一个不稳定极限环, 当 $\alpha$ 从负值到正值穿过零时这个环消失. 当 $\alpha \neq 0$ 时原点这个平衡点与系统

(3.6) 的平衡点有同样的稳定性: $\alpha < 0$ 时稳定, $\alpha > 0$ 时不稳定. 在临界参数值它的稳定性与 (3.6) 的相反, 即 $\alpha = 0$ 时它 (非线性) 不稳定.

**注**　(1) 我们已经看到, 存在两种类型的 Antronov-Hopf 分支. 系统 (3.6) 中的分支通常称为*超临界的* (supercrical), 因为环对正参数值存在 (在分支 "以后"). 系统 (3.9) 中的分支称为*亚临界的* (subcritical), 因为环在分支 "之前" 存在. 显然, 这个术语有时有某些误解, 因为 "前" 与 "后" 依赖于参数变化方向的选择.

(2) 在 $\alpha = 0$, 当参数增加时平衡点都*失去稳定性*. 在第一种情形 (三次项前为 "−"), 稳定平衡点被稳定的小振幅极限环所代替. 因此, 系统 "*继续*" 留在平衡点的邻域内, 而失去*软稳定性*, 或*非突变稳定性*. 在第二种情形 (三次项前为 "+"), 平衡点的吸引区域为不稳定极限环所围. 当参数趋于它的临界值时, 此极限环收缩并消失. 因此, 系统 "被推离" 平衡点邻域, 它失去的是*硬的*或*突变的*稳定性. 如果系统是失去软稳定性, 那么还 "可以控制": 如果将参数再向负方向变化, 系统回到有稳定平衡点. 反之, 如果系统失去硬稳定性, 将参数向负方向变化时就不可能回到有稳定平衡点, 因为它很可能离开了它的吸引区域. 注意, Antronov-Hopf 分支的类型由平衡点在临界参数值的稳定性所决定.

(3) 上面关于超临界 Hopf 分支和亚临界 Hopf 分支的解释要小心处理. 如果把 $\alpha$ 视为慢变量而以第三个方程

$$\dot{\alpha} = \varepsilon$$

加入到系统 (3.6) 中去, $\varepsilon$ 是小正数, 所得*时间序列*$(x(t), y(t), \alpha(t))$ 显示 "硬" 的某种程度. 若一解从某初始点 $(x_0, y_0, \alpha_0)$ 出发, 其中 $\alpha_0 < 0$, 则它收敛于原点并停留在非常接近于原点的地方, 即使 $\alpha$ 变成正的. 因此, 这表明无振动. 仅当 $\alpha$ 达到某个有限正值时解才 "硬" 地离开平衡点并开始以相对大的振幅振动.

(4) 最后, 考虑没有非线性项的系统

$$\dot{z} = (\alpha + \mathrm{i})z.$$

这个系统也有振幅递增的周期轨道族, 它们都在 $\alpha = 0$ 时出现. 这时原点是这个系统的*中心*(见图 3.9). 在这种情形, 也可以说极限环抛物面 "退化" 到 $(x, y, \alpha)$ 空间的平面 $\alpha = 0$ 上. 这一观察使得非线性情形出现小极限环很自然. ◇

现在加某些高阶项到系统 (3.6) 中去, 并将它写为向量形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \tag{3.10}$$

这里 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ 和 $O(\|x\|^4)$ 诸项可光滑地依赖于 $\alpha$. 下面的引理将在本章的附录 A 中证明.

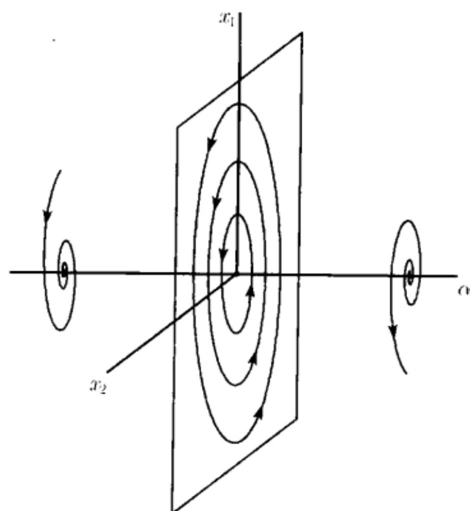



图 3.9 线性系统的 "Hopf 分支"

**引理 3.2** *系统 (3.10) 在原点附近局部等价于系统 (3.6).* □

因此, 高阶项并不影响系统的分支性态.

## 3.5 一般 Hopf 分支

现在证明任何一个产生 Hopf 分支的一般二维系统都可变换成 (3.10) 的形式, 有可能差三次项的符号.

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

其中函数 $f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 在此平衡点有特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0 > 0$. 由于 $\lambda = 0$ 不是 Jacobi 矩阵的特征值, 由隐函数定理, 对充分小 $|\alpha|$, 在原点某邻域内, 此系统有唯一平衡点 $x_0(\alpha)$. 可将此平衡点移到原点. 不失一般性, 对充分小 $|\alpha|$, 设 $x = 0$ 是系统的平衡点, 因此, 该系统可写为

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{3.11}$$

其中 $F$ 是光滑向量函数, 它的分量 $F_{1,2}$ 关于 $x$ 的 Taylor 展开至少从二次项开始, $f = O(\|x\|^2)$. 以 $\alpha$ 的光滑函数为其元素的 Jacobi 矩阵 $A(\alpha)$ 可写为

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}.$$

它的特征值是特征方程

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

的根, 其中 $\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \operatorname{tr} A(\alpha)$, 以及 $\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det A(\alpha)$. 所以

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)}\right).$$

由 Hopf 分支条件得

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

对小的 $|\alpha|$, 可引入

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad w(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}.$$

因此可得特征值的表达式

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)},$$

其中

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + \mathrm{i}\omega(\alpha), \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

**引理 3.3**　引入复变量 $z$, 对充分小 $|\alpha|$, 系统 (3.11) 可写为单个方程

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \tag{3.12}$$

其中 $g = O(|z|^2)$ 是 $(z, \bar{z}, \alpha)$ 的光滑函数.

**证明**　设 $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ 是 $A(\alpha)$ 对应于特征值 $\lambda(\alpha)$ 的特征向量

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

设 $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ 是转置矩阵 $A^{\mathrm{T}}(\alpha)$ 的特征值 $\overline{\lambda(\alpha)}$ 对应的特征向量

$$A^{\mathrm{T}}(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha).$$

总可将 $p$ 关于 $q$ 标准化

$$\langle p(\alpha), q(\alpha)\rangle = 1,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的标准数量积: $\langle p, q\rangle = \bar{p}_1q_1 + \bar{p}_2q_2$. 对任何小 $\alpha$ 和某复数 $z$ 任何向量 $x \in \mathbb{R}^2$ 可唯一表示为

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\,\bar{q}(\alpha), \tag{3.13}$$

只要特征向量已指定. 事实上, 有明确公式确定 $z$:

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle.$$

为验证此公式 (这可由对 (3.13) 两边关于 $p$ 取数量积得到), 必须证明 $\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle = 0$. 这是因为

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\bar{\lambda}} A\bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle A^{\mathrm{T}} p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \langle p, \bar{q} \rangle.$$

因此

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

但是, 由于对充分小 $|\alpha|$ 有 $\omega(\alpha) > 0$, 故 $\lambda \neq \bar{\lambda}$, 因此只可能有 $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$.

复变量 $z$ 显然满足方程

$$\dot{z} = \lambda(\alpha) z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle,$$

这就是 (3.12) 所要求的形式①, 其中

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\ \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle. \qquad \square$$

这里没有理由要求 $g$ 是 $z$ 的解析函数 (即与 $\bar{z}$ 无关). 将 $g$ 写为两个复变量 ($z$ 与 $\bar{z}$) 的形式 Taylor 级数

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geqslant 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

其中

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\ \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0},$$

对 $k + l \geqslant 2,\ k, l = 0, 1, \cdots$.

**注** (1) 证明引理 3.3 的方法有好几个 (等价的). 这里选择的与第 5 章框架一致. 那里将考虑 $n$ 维系统的 Hopf 分支.

(2) 方程 (2.13) 给出 $(x_1, x_2)$ 以及 $z$ 的实部和虚部之间的一个线性关系. 因此, 若取 $z = y_1 + \mathrm{i}y_2$, 所引入的 $z$ 可看成是变量的线性可逆变换, $y = T(\alpha)x$. 正如从 (3.13) 可看出, 分量 $(y_1, y_2)$ 是 $x$ 在 $A(\alpha)$ 的由 $\{2\mathrm{Re}\ q, -2\mathrm{Im}\ q\}$ 组成的实特征基下的坐标. 在此基下, 矩阵 $A(\alpha)$ 有实标准 (Jordan) 型:

$$J(\alpha) = T(\alpha) A(\alpha) T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix}.$$

① 对应于单个特征值, 向量 $q(\alpha)$ 和 $p(\alpha)$ 可以如 $A(\alpha)$ 选择为光滑地依赖于 $\alpha$.

(3) 假设在 $\alpha=0$, (3.11) 中的函数 $F(x,\alpha)$ 表示为

$$F(x,0)=\frac{1}{2}B(x,x)+\frac{1}{6}C(x,x,x)+O(\|x\|^4),$$

这里 $B(x,y)$ 和 $C(x,y,u)$ 是 $x,y,u\in\mathbb{R}^2$ 的对称多重线性向量函数. 其坐标是

$$B_i(x,y)=\sum_{j,k=1}^{2}\left.\frac{\partial^2F_i(\xi,0)}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\right|_{\xi=0}x_jy_k,\quad i=1,2$$

和

$$C_i(x,y,u)=\sum_{j,k,l=1}^{2}\left.\frac{\partial^3F_i(\xi,0)}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{\xi=0}x_jy_ku_l,\quad i=1,2.$$

于是

$$B(zq+\bar{z}\ \bar{q},zq+\bar{z}\ \bar{q})=z^2B(q,q)+2z\bar{z}B(q,\bar{q})+\bar{z}^2B(\bar{q},\bar{q}),$$

其中 $q=q(0),p=p(0)$, 故 $g(z,\bar{z},0)$ 中二次项的 Taylor 系数 $g_{k\ l}$, $k+l=2$ 可用下面公式表示

$$g_{20}=\langle p,B(q,q)\rangle,\quad g_{11}=\langle p,B(q,\bar{q})\rangle,\quad g_{02}=\langle p,B(\bar{q},\bar{q})\rangle,$$

类似地, 计算 $C$ 得

$$g_{21}=\langle p,C(q,q,\bar{q})\rangle.$$

(4) $q$ 的标准化是无关紧要的. 事实上, 假定 $q$ 由 $\langle q,q\rangle=1$ 标准化了, 对任何非零 $\gamma\in\mathbb{C}^1$, 向量 $\tilde{q}=\gamma q$ 也是特征向量, 但其范数 $\langle\tilde{q},\tilde{q}\rangle=|\gamma|^2$. 取 $\tilde{p}=\frac{1}{\bar{\gamma}}p$, 将保持未触及的有关标准化: $\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle=1$. 显然, 用 $\tilde{q},\tilde{p}$ 计算 Taylor 系数 $\tilde{g}_{kl}$ 不同于原来的 $g_{kl}$. 例如, 可以由多重线性表达式验证

$$\tilde{g}_{20}=\gamma g_{20},\quad\tilde{g}_{11}=\bar{\gamma}g_{11},\quad\tilde{g}_{02}=\frac{\bar{\gamma}^2}{\gamma}g_{02},\quad\tilde{g}_{21}=|\gamma|^2g_{21}.$$

但是, 这个改变很容易用变量的线性尺度化: $z=\frac{1}{\gamma}w$ 来消除, 即可求得与前面相同的 $w$ 的方程.

例如, 对已经是实标准型 $\dot{x}=J(\alpha)x$, 其中 $J$ 是上面所给. 对应于标准关系 $z=\langle p,x\rangle=x_1+\mathrm{i}x_2$, 令, $\langle q,q\rangle=\frac{1}{2}$, 这时

$$q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

◇

作非线性 (复) 坐标变换来简化 (3.12), 首先去掉所有的二次项.

**引理 3.4** *方程*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{20}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \tag{3.14}$$

*对充分小 $|\alpha|$, 可借助依赖于参数的复坐标可逆变换*

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2,$$

*变为一个没有二次项的方程*

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3),$$

*其中 $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + \mathrm{i}\omega(\alpha), \mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$, 以及 $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$.*

**证明** 变量变换的逆变换由表达式

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

给出. 因此

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11}(\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z}\ \dot{\bar{z}} + \cdots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{20}\right) \bar{z}^2 + \cdots \\
&= \lambda w + \frac{1}{2}\left(g_{20} - \lambda h_{20}\right) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}\right) \bar{w}^2 + O(|w|^3).
\end{aligned}$$

所以, 若令

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

就 "消去" 了 (3.14) 中所有的二次项. 由于 $\lambda(0) = \mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0 > 0$, 对所有充分小 $|\alpha|$, 上面的分母不为零, 故变换有效. □

**注** (1) 所得的坐标变换是系数光滑地依赖于 $\alpha$ 的多项式. 逆变换有相同性质但不是多项式. 它的形式可用待定系数法得到. 在原点的某个邻域内变换由于它的线性部分而接近于恒同变换.

(2) 注意, 变换改变了 (3.14) 的三次 (以及高次) 项的系数. ◇

假设已经移去了 (3.14) 中的所有二次项, 我们尝试消去三次项. 这 "几乎" 是可能的: 仅仅有一个下面引理所述的 "抵触" 项.

**引理 3.5** *方程*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

其中 $\lambda=\lambda(\alpha)=\mu(\alpha)+\mathrm{i}\omega(\alpha), \mu(0)=0, \omega(0)=\omega_0>0$, 以及 $g_{ij}=g_{ij}(\alpha)$, 对所有充分小的 $|\alpha|$, 经依赖于参数的可逆复坐标变换

$$z=w+\frac{h_{30}}{6}w^3+\frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w}+\frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2+\frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

变成三次项只有一项的系统

$$\dot{w}=\lambda w+c_1w^2\bar{w}+O(|w|^4),$$

其中 $c_1=c_1(\alpha)$.

**证明** 逆变换是

$$w=z-\frac{h_{30}}{6}z^3-\frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z}-\frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2-\frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3+O(|z|^4).$$

因此

$$\begin{aligned}
\dot{w}&=\dot{z}-\frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z}-\frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z}+z^2\dot{\bar{z}})-\frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2+2z\bar{z}\ \dot{\bar{z}})-\frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}}+\cdots\\
&=\lambda z+\left(\frac{g_{30}}{6}-\frac{\lambda h_{30}}{2}\right)z^3+\left(\frac{g_{21}}{2}-\lambda h_{21}-\frac{\bar{\lambda}h_{21}}{2}\right)z^2\bar{z}\\
&\quad+\left(\frac{g_{12}}{2}-\frac{\lambda h_{21}}{2}-\bar{\lambda}h_{12}\right)z\bar{z}^2+\left(\frac{g_{03}}{6}-\frac{\bar{\lambda}h_{03}}{2}\right)\bar{z}^3+\cdots\\
&=\lambda w+\frac{1}{6}(g_{30}-2\lambda h_{30})w^3+\frac{1}{2}(g_{21}-(\lambda+\bar{\lambda})h_{21})w^2\bar{w}\\
&\quad+\frac{1}{2}(g_{12}-2\bar{\lambda}h_{12})w\bar{w}^2+\frac{1}{6}(g_{03}+(\lambda-3\bar{\lambda})h_{03})\bar{w}^3+O(|w|^4).
\end{aligned}$$

从而, 若令

$$h_{30}=\frac{g_{30}}{2\lambda},\quad h_{12}=\frac{g_{12}}{2\lambda},\quad h_{03}=\frac{g_{03}}{3\bar{\lambda}-\lambda},$$

就可消去上面方程中除 $w^2\bar{w}$ 项外的所有三次项, 对此要分别处理. 由于对所有充分小 $|\alpha|$, 变换中所有分母都不为零, 故变换有效.

也可形式地令

$$h_{21}=\frac{g_{21}}{\lambda+\bar{\lambda}},$$

以消去 $w^2\bar{w}$ 项. 对小的 $\alpha\neq 0$ 这是可能的, 但是在 $\alpha=0$ 时分母为零: $\lambda(0)+\bar{\lambda}(0)=\mathrm{i}\omega_0-\mathrm{i}\omega_0=0$. 为得到光滑依赖于 $\alpha$ 的变换, 令 $h_{21}=0$, 得

$$c_1=\frac{g_{21}}{2}.$$ □

**注** 剩下的三次 $w^2\bar{w}$ 项称为共振项. 注意, 该项的系数与引理 3.5 中原来方程的三次项 $z^2\bar{z}$ 的系数相同. ◇

现在, 结合前面两个引理得

**引理 3.6**(Hopf 分支的 Poincaré 规范形)　*方程*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leqslant k+l \leqslant 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4), \tag{3.15}$$

*这里* $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + \mathrm{i}\omega(\alpha), \mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$, *以及* $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, *对一切充分小的* $|\alpha|$, *利用光滑依赖于参数的复坐标可逆变换*

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^2 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

*可化为只含共振三次项的方程*

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \tag{3.16}$$

*其中* $c_1 = c_1(\alpha)$.

**证明**　显然, 引理 3.4 和 3.5 中定义的变换的合成就可以担任这个任务. 首先, 用引理 3.4 中定义的变换

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \tag{3.17}$$

其中

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}.$$

这将消去方程中所有的二次项, 但得改变三次项的系数. $w^2\bar{w}$ 的系数现在是 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ 代替 $\frac{1}{2}g_{21}$. 然后, 再作引理 3.5 中定义的变换以消去所有除共振项以外的三次项, 而该项的系数为 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$. 由于出现在 (3.16)中的四次和更高次项仅影响 $O(|w|^4)$ 项, 它们可截去. □

因此, 全部工作需要计算去得到系数 $c_1$, 即方程 (3.15) 经二次变换 (3.17) 后 $w^2\bar{w}$ 项的新系数 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$. 可以用引理 3.4 和引理 3.5 同样的方法来计算 (3.17) 的逆映射. 遗憾的是, 现在必须知道直到并包括三次项的逆映射①. 不过, 可避免 (3.17) 的逆映射的明显表达式.

① 事实上, 仅仅要求逆映射的 "共振" 三次项:

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{1}{2}(3h_{11}h_{20} + 2|h_{11}|^2 + |h_{02}|^2) z^2 \bar{z} + \cdots,$$

其中省略号表示所有没有出现的项.

事实上, 有两种方法用 $w$ 和 $\bar{w}$ 表达 $\dot{z}$. 一种方法是将代换 (3.17) 代入原来的系统 (3.15). 另一种方法是, 由于知道了结果形式 (3.16) 是由 (3.15) 变过来的, 可用计算 (3.17) 的微分求得 $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}},$$

再用 (3.16) 来代换 $\dot{w}$ 和它的共轭. 比较所得 $\dot{z}$ 的表达式中二次项的系数, 得到上面关于 $h_{20}, h_{11}$ 和 $h_{02}$ 的公式, 使 $w|w|^2$ 项前面的系数相等, 则得

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}.$$

因为 $\lambda$ 和 $g_{ij}$ 是参数的光滑函数, 这个公式就给出了 $c_1$ 关于 $\alpha$ 的依赖性. 在分支参数值 $\alpha = 0$, 上面的方程化为

$$c_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{g_{21}}{2}. \tag{3.18}$$

现在将 Poincaré 规范形变换成上一节研究过的规范形.

**引理 3.7** *考虑方程*

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = (\mu(\alpha) + \mathrm{i}\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

*这里, $\mu(0) = 0$, 以及 $\omega(0) = \omega_0 > 0$.*

*假设 $\mu'(0) \neq 0$ 和 $\mathrm{Re}\, c_1(0) \neq 0$, 则借助于依赖于参数的坐标线性变换、时间重尺度化以及非线性时间重参数化, 将系统化为*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = (\beta + \mathrm{i})u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

*这里 $u$ 是新复坐标, $\theta, \beta$ 分别是新时间和参数, 以及 $s = \mathrm{sign}\, \mathrm{Re}\, c_1(0) = \pm 1$.*

**证明** 第一步 (时间线性尺度化). 引入新时间 $\tau = \omega(\alpha)t$, 由于对充分小 $|\alpha|$, $\omega(\alpha) > 0$, 故保持时间方向. 于是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = (\beta + \mathrm{i})w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

其中

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}.$$

可视 $\beta$ 为新参数, 因为

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

于是, 反函数定理保证 $\alpha$ 作为 $\beta$ 的函数的局部存在性和光滑性. 注意 $d_1$ 是复数.

第二步 (非线性时间重参数化). 沿着轨道引入新时间 $\theta=\theta(\tau,\beta)$ 重参数化变换, 这里

$$\mathrm{d}\theta=(1+e_1(\beta)|w|^2)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $e_1(\beta)=\mathrm{Im}\ d_1(\beta)$. 时间变换在原点小邻域内接近于恒同变换. 应用时间的这个新定义得到

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}=(\beta+\mathrm{i})w+l_1(\beta)w|w|^2+O(|w|^4),$$

这里 $l_1(\beta)=\mathrm{Re}\ d_1(\beta)-\beta e_1(\beta)$ 是实数, 且

$$l_1(0)=\frac{\mathrm{Re}\ c_1(0)}{\omega(0)}. \tag{3.19}$$

第三步 (线性坐标尺度化). 最后引入新的复变量 $u$:

$$w=\frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

鉴于 $\mathrm{Re}\ c_1(0)\neq 0$, 这是可能的, 因此 $l_1(0)\neq 0$. 于是方程取所要求的形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=(\beta+\mathrm{i})u+\frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2+O(|u|^4)=(\beta+\mathrm{i})u+su|u|^2+O(|u|^4),$$

其中 $s=\mathrm{sign}\ l_1(0)=\mathrm{signRe}\ c_1(0)$. □

**定义 3.3** 实函数 $l_1(\beta)$ 称为第一个 Lyapunov 系数.

由 (3.19) 得知, 当 $\beta=0$ 时, 第一个 Lyapunov 系数可由公式

$$l_1(0)=\frac{1}{2\omega_0^2}\mathrm{Re}(\mathrm{i}g_{20}g_{11}+\omega_0 g_{21}) \tag{3.20}$$

计算. 因此, 为了计算 $l_1(0)$, 只需在分支点计算右端的某些二阶和三阶导数. 回忆 $l_1(0)$ 的值依赖于特征向量 $q$ 和 $p$ 的标准化, 它的符号 (这是分支分析唯一关心的) 在 $q,p$ 尺度变换下不变, 服从有关的标准化 $\langle p,q\rangle=1$. 注意, $s=-1$ 的 $u$ 方程写成实形式与上一节系统 (3.10) 一样. 现在, 综合所得结果得下面的定理.

**定理 3.3** 假设二维系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}^1, \tag{3.21}$$

$f$ 光滑, 对所有充分小 $|\alpha|$ 有平衡点 $x=0$, 有特征值

$$\lambda_{1,2}(\alpha)=\mu(\alpha)\pm\mathrm{i}\omega(\alpha),$$

其中 $\mu(0)=0,\ \omega(0)=\omega_0>0$.

设下面的条件满足:

(B.1) $l_1(0) \neq 0$, 其中 $l_1$ 是第一个 Lyapunov 系数;

(B.2) $\mu'(0) \neq 0$.

则存在可逆的坐标与参数变换和时间重参数化, 将 (3.21) 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \qquad \square$$

应用引理 3.2, 可以去掉 $O(\|y\|^4)$ 项, 最后得到下面的一般结果.

**定理 3.4**(Hopf 分支拓扑规范形)　*任何一个单参数一般二维系统*

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

*在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 具特征值*

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm \mathrm{i}\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

*它在原点附近局部拓扑等价于下列规范形之一:*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**注**　定理 3.4 中假设的一般性条件就是定理 3.3 中的非退化条件 (B.1) 和横截性条件 (B.2). ◇

上面两条定理和上一节的规范形分析以及关于 $l_1(0)$ 的公式 (3.20) 提供了对一般二维系统 Hopf 分支分析所有必要的工具. 在第 5 章还将看到如何处理 $n$ 维系统, 那里 $n > 2$.

**例 3.1**(一个捕食–被捕食模型的 Hopf 分支)　考虑下面两个微分方程的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(1 - x_1) - \dfrac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \\ \dot{x}_2 = -dx_2 + \dfrac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}. \end{cases} \tag{3.22}$$

这个系统刻画了单个捕食–被捕食生态系统的动力学 (Holling, 1965). 这里 $x_1$ 与 $x_2$ 是 (无量纲) 种群数, $r, c, d$ 与 $\alpha$ 是刻画孤立种群性态以及它们相互之间作用的参数. 视 $\alpha$ 为控制参数, 并假设 $c > d$.

为简化以后的计算, 考虑多项式系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_1x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2. \end{cases} \tag{3.23}$$

这个系统对 $x_1 > -\alpha$ 与原来的系统有相同的轨道 (或者轨道等价, 见第 2 章)(它是原来系统的两边乘上 $(\alpha+x_1)$, 并用 $\mathrm{d}t=(\alpha+x_1)\mathrm{d}\tau$ 引入新的时间变量 $\tau$ 而得到).

系统 (3.23) 有非平凡平衡点

$$E_0=\left(\frac{\alpha d}{c-d},\ \frac{r\alpha}{c-d}\left[1-\frac{\alpha d}{c-d}\right]\right).$$

在此平衡点的 Jacobi 矩阵为

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2}\left[\dfrac{c-d}{c-d}-\alpha\right] & -\dfrac{\alpha cd}{c-d}\\ \dfrac{\alpha r(c-d(1+d))}{c-d} & 0\end{pmatrix},$$

因此

$$\mu(\alpha)=\frac{\sigma(\alpha)}{2}=\frac{\alpha rd(c+d)}{2(c-d)^2}\left[\frac{c-d}{c+d}-\alpha\right].$$

对

$$\alpha_0=\frac{c-d}{c+d},$$

有 $\mu(\alpha_0)=0$. 此外,

$$\omega^2(\alpha_0)=\frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3}>0. \tag{3.24}$$

因此, 在 $\alpha=\alpha_0$ 平衡点 $E_0$ 有特征值 $\lambda_{1,2}(\alpha_0)=\pm \mathrm{i}\omega(\alpha_0)$, Hopf 分支产生①. $\alpha>\alpha_0$ 时平衡点稳定, $\alpha<\alpha_0$ 时不稳定. 注意, $\alpha$ 的临界值对应于 $\dot{x}_2=0$ 定义的直线通过 $\dot{x}_1=0$ 定义的曲线的最大值 (见图 3.10). 因此, 如果直线 $\dot{x}_2=0$ 在最大值的右方, 平衡点是稳定的, 如果直线在最大值的左方, 平衡点是不稳定的. 为了应用规范形定理分析 Hopf 分支, 必须验证定理 3.3 中的一般性条件是否满足. 横截性条件 (B.2) 容易验证:

$$\mu'(\alpha_0)=-\frac{\alpha_0 rd(c+d)}{2(c-d)^2}=-\frac{rd}{2(c-d)}<0.$$

为了计算第一个 Lyapunov 系数, 固定参数 $\alpha$ 在它的临界值 $\alpha_0$. 在 $\alpha=\alpha_0$, 非平凡平衡点 $E_0$ 的坐标是

$$x_1^{(0)}=\frac{d}{x+d},\quad x_2^{(0)}=\frac{rc}{(c+d)^2}.$$

① 由于 (3.23) 仅仅轨道等价于 (3.22), 由 (3.24) 给出的 $\omega(\alpha_0)$ 的值不能用来直接计算原来系统围绕 $E_0$ 的小振动的周期.

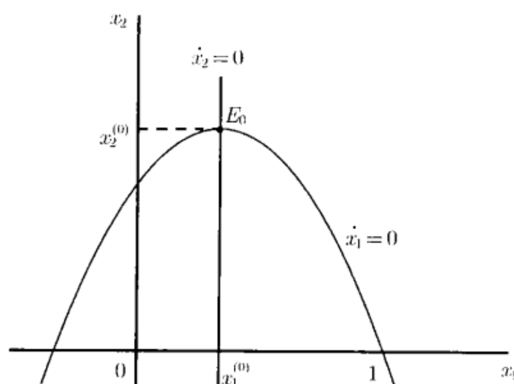



图 3.10　在 Hopf 分支的零–等倾线

用变量变换

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + \xi_1, \\ x_2 = x_2^{(0)} + \xi_2 \end{cases}$$

将坐标原点移到此平衡点. 此变换将系统 (3.23) 变为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\dfrac{cd}{c+d}\xi_2 - \dfrac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^3 \equiv F_1(\xi_1, \xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = \dfrac{rc(c-d)}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2 \equiv F_2(\xi_1\xi_2). \end{cases}$$

此系统可表为

$$\dot{\xi} = A\xi + \frac{1}{2}B(\xi,\xi) + \frac{1}{6}C(\xi,\xi,\xi),$$

这里 $A = A(\alpha_0)$, 以及多重线性函数 $B$ 和 $C$ 对平面向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^{\mathrm{T}}$ 取值

$$B(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2rd}{c+d}\xi_1\eta_1 - c(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \\ (c-d)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \end{pmatrix},$$

和

$$C(\xi,\eta,\zeta) = \begin{pmatrix} -6r\xi_1\eta_1\zeta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 $A(\alpha_0)$ 写为形式

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{cd}{c+d} \\ \dfrac{\omega^2(x+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $\omega^2$ 由公式 (3.24) 给出①. 现在容易验证, 复向量

$$q \sim \begin{pmatrix} cd \\ -i\omega(c+d) \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} \omega(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}$$

为适当的特征向量:

$$Aq = i\omega q, \quad A^{\mathrm{T}}p = -i\omega p.$$

为了必要的标准化 $\langle p, q\rangle = 1$, 例如, 可取

$$q = \begin{pmatrix} cd \\ -i\omega(c+d) \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega cd(c+d)} \begin{pmatrix} \omega(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}.$$

现在可简单计算②

$$g_{20} = \langle p, B(q,q)\rangle = \frac{cd(c^2-d^2-rd)+i\omega c(c+d)^2}{(c+d)},$$

$$g_{11} = \langle p, B(q,\bar{q})\rangle = -\frac{rcd^2}{c+d}, \quad g_{21} = \langle p, C(q,q,\bar{q})\rangle = -3rc^2d^2,$$

以及由公式 (3.20) 计算第一个 Lyapunov 系数

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{2\omega^2}\mathrm{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}) = -\frac{rc^2d^2}{\omega} < 0.$$

显然, 对固定参数的所有组合, $l_1(\alpha_0) < 0$. 由此, 定理 3.3 中的非退化条件 (B.1) 成立. 因此, 由 Hopf 分支, 当 $\alpha < \alpha_0$ 时从平衡点分支出唯一稳定极限环 (见图 3.11).

◇

① 用 $\omega$ 表示 Jacobi 矩阵总是有用的, 因为这可简化特征向量的表达式.

② 计算 $g_{20}, g_{11}$ 和 $g_{21}$ 的另一个方法 (如果用符号操作软件可能比较简单) 是定义复值函数

$$G(z,w) = \bar{p}_1F_1(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) + \bar{p}_2F_2(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2),$$

其中, $p, q$ 上面给定, 在 $z = w = 0$ 计算它关于 $z, w$ 的形式偏导数, 得到 $g_{20} = G_{zz}$, $g_{11} = G_{zw}$ 以及 $g_{21} = G_{zzw}$. 用这个方法不需要多重线性函数. 见练习 4.

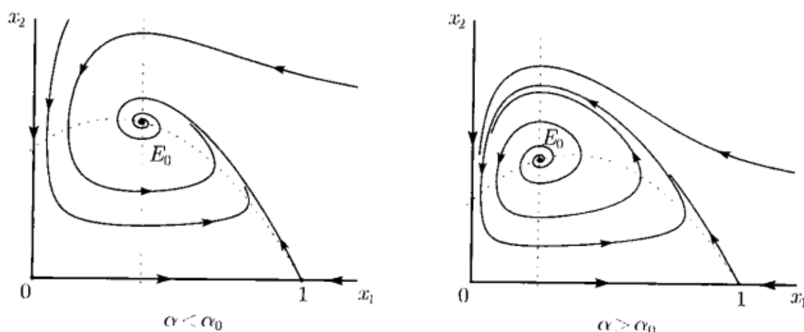



图 3.11　捕食–被捕食模型中的 Hopf 分支

## 3.6　练　　习

1. (生态学中的折分支) 考虑下面的微分方程

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha,$$

此方程模拟具常数收获的单种群动力学, 其中 $x$ 为种群个数, $r$ 和 $K$ 分别为内禀增长率与种群容纳量, $\alpha$ 为收获率, 它是控制参数. 求参数值 $\alpha_0$ 使系统在此点有折分支, 并检验定理 3.1 中的一般性条件. 基于这一分析, 按生态动力学解释可能出现超收获的结果. 这例子是否是突变分支?

2. (复记号) 验证

$$\dot{z} = \mathrm{i}z + (\mathrm{i}+1)z^2 + 2\mathrm{i}z\bar{z} + (\mathrm{i}-1)\bar{z}^2$$

是系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

的复数形式, 只要特征向量选为形式

$$q = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad p = \frac{3}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

如果选择另外满足 $\langle p, q\rangle = 1$ 的 $q, p$, 上述的复数形式有何变化?

3. (非线性稳定性) 借助复坐标 $z = x + \mathrm{i}y$ 将系统

$$\begin{cases} x = -y - xy + 2y^2, \\ y = x - x^2 y \end{cases}$$

写为复数形式, 并由公式 (3.18) 计算规范形系数 $c_1(0)$. 原点是否稳定?

4. (Brussel 振子的 Hopf 分支) 考虑第 1 章中的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A - (B+1)x_1 + x_1^2 x_2 \equiv F_2(x_1, x_2, A, B), \\ \dot{x}_2 = Bx_1 - x_1^2 x_2 \equiv F_2(x_1, x_2, A, B), \end{cases}$$

固定 $A > 0$ 并取 $B$ 为分支参数. 利用有效的计算机代数系统之一证明在 $B = 1 + A^2$ 系统具有超临界 Hopf 分支. 提示: 用下面的一序列 MAPLE 命令解决这个问题:

```
>with(linalg);
>readlib(mtaylor);
>readlib(coeftay1);
```

上面第一个命令允许我们使用 MAPLE 线性代数软件包. 其他两个命令执行 mtaylor 和 coeftay1 程序, 它们是从 MAPLE 库中分别计算多变量截断 Taylor 级数和它们的个别系数.

```
>F[1]:=A-(B+1)*X[1]+X[1]^2*X[2];
>F[2]:=B*X[1]-X[1]^2*X[2];
>J:=jacobian([F[1],F[2]],[X[1],X[2]]);
>K:=transpose(J);
```

利用这些命令将系统的右端输入 MAPLE 并计算 Jacobi 矩阵和它的转置矩阵.

```
>sol:=solve({F[1]=0,F[2]=0,trace(J)=0},{X[1],X[2],B});
>assign(sol);
>assume(A>0);
>omega:=sqrt(det(J));
```

这些命令对 $(x_1, x_2, B)$ 解下面方程组

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, A, B) = 0, \\ \mathrm{tr} F_x(x_1, x_2, A, B) = 0, \end{cases}$$

并在所求的解上验证 $\det F_x = A^2 > 0$. 因此, 在 $B = 1 + A^2$ Brussel 振子有具纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega = A > 0$ 的平衡点

$$X = \left(A, \frac{1+A^2}{A}\right)^{\mathrm{T}}.$$

```
>ev:=eigenvects(J,'radical');
>q:=ev[1][3][1];
>et:=eigenvects(K,'radical');
>P:=et[2][3][1];
```

这些命令显示

$$q=\left(-\frac{\mathrm{i}A+A^2}{1+A^2},1\right)^{\mathrm{T}},\quad p=\left(\frac{-\mathrm{i}A+A^2}{A^2},1\right)^{\mathrm{T}}$$

是 Jacobi 矩阵 $J=F_x$ 以及它的转置矩阵的临界特征向量①

$$Jq=\mathrm{i}\omega q,\quad J^{\mathrm{T}}p=-\mathrm{i}\omega p.$$

```
>s1:=simplify(evalc(conjugate(P[1])*q[1]+conjugate(P[2]*q[2])));
>c:=simplify(evalc(1/conjugate(s1)));
>p[1]:=simplify(evalc(c*P[1]));
>p[2]:=simplify(evalc(c*P[2]));
>simplify(evalc(conjugate(p[1]*q[1]*conjuate(p[2]*q[2]));
```

用上面的命令达到标准化 $\langle p,q\rangle=1$, 最后取

$$q=\left(-\frac{\mathrm{i}A+A^2}{1+A^2},\quad 1\right)^{\mathrm{T}},\quad p=\left(-\frac{\mathrm{i}(A+A^2)}{2A},\quad \frac{1-\mathrm{i}A}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

```
>F[1]:=A-(B+1)*x[1]+x[1]^2*x[2];
>F[2]:=B*x[1]-x[1]^2*x[2];
>x[1]:=evalc(X[1]+z*q[1]+z1*conjugate(q[1]));
x[2]:=evalc(X[2]+z*q[2]+z1*conjugate(q[2]));
>H:=simplify(evalc(conjugate(p[1]*F[1]+conjugate(p[2]*F[2]))));
```

用这些命令组成 $x=X+zq+\bar{z}\,\bar{q}$, 并计算函数

$$H(z,\bar{z})=\langle p,F(X+zq+\bar{z}\,\bar{q},A,1+A^2)\rangle$$

(在 MAPLE 命令中用 z1 表示 $\bar{z}$).

```
>g[2,0]:=simplify(2*evalc(coeftay1(H,[z,z1]=[0,0],[2,0])));
>g[1,1]:= simplify(evalc(coeftay1(H,[z,z1]=[0,0],[1,1])));
>g[2,1]:=simplify(2*evalc(coeftay1(H,[z,z1]=[0,0],[2,1])));
```

上面的命令是在 $(z,\bar{z})=(0,0)$ 计算 $H(z,\bar{z})$ 的 Taylor 展开所需要,

$$H(z,\bar{z})=\mathrm{i}\omega z+\sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3}\frac{1}{j!k!}g_{jk}z^j\bar{z}^k+O(|z|^4)$$

给出

$$g_{20}=A-\mathrm{i},\quad g_{11}=\frac{(A-\mathrm{i})(A^2-1)}{1+A^2},\quad g_{21}=-\frac{A(3A-\mathrm{i})}{1+A^2}.$$

① 有些 MAPLE 工具产生不同形式的特征向量.

```
>l[1]:=factor(1/2*omega^2)*Re(I*g[2,0]*g[1,1]+omega*g[2,1]);
```

最后一个命令计算 Lyapunov 系数

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{2\omega^2}\mathrm{Re}(\mathrm{i}g_{20}g_{11} + \omega g_{21}) = -\frac{2+A^2}{2A(1+A^2)} < 0,$$

并允许我们验证它是负的.

5. 验证下面每个系统在平衡点对某个 $\alpha$ 值有 Hopf 分支, 并计算第一个 Lyapunov 系数.

(a) Rayleigh 方程

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\alpha x + x = 0.$$

提示: 引入 $y = \dot{x}$ 把这方程写为两个微分方程的系统.

(b) Van der Pol 振子

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = 0.$$

(c) Bautin 的一个例子

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \alpha y + x^2 + xy + y^2. \end{cases}$$

(d) 广告扩散模型 (Feichtinger, 1992)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha[1 - x_1x_2^2 + A(x_2 - 1)], \\ \dot{x}_2 = x_1x_2^2 - x_2. \end{cases}$$

6. 假设一个系统在临界参数值对应于 Hopf 分支有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} =& -\omega y + \frac{1}{2}f_{xx}x^2 + f_{xy}xy + \frac{1}{2}f_{yy}y^2 \\ &+ \frac{1}{6}f_{xxx}x^3 + \frac{1}{2}f_{xxy}x^2y + \frac{1}{2}f_{xyy}xy^2 + \frac{1}{6}f_{yyy}y^3 + \cdots, \\ \dot{y} =& \omega x + \frac{1}{2}g_{xx}x^2 + g_{xy}xy + \frac{1}{2}g_{yy}y^2 \\ &+ \frac{1}{6}g_{xxx}x^3 + \frac{1}{2}g_{xxy}x^2y + \frac{1}{2}g_{xyy}xy^2 + \frac{1}{6}g_{yyy}y^3 + \cdots, \end{aligned}$$

用 $f$ 与 $g$ 计算 Re $c_1(0)$. 提示: 见 Guckenheimer, Holmes (1983, 156). 为应用所得公式, 需将系统明显地变换到特征基上, 如本章所描述的, 这总可以用特征向量和复数记号避免.

## 3.7　附录 A：引理 3.2 的证明

下面所叙述的是引理 3.2 的复数形式. 将在此附录中给出它的证明.

**引理 3.8**　*系统*

$$\dot{z} = (\alpha + \mathrm{i})z - z|z|^2 + O(|z|^4) \tag{A.1}$$

*在原点附近是局部等价于系统*

$$\dot{z} = (\alpha + \mathrm{i})z - z|z|^2. \tag{A.2}$$

**证明**　第一步 (环的存在性和唯一性). 将系统 (A.1) 写为极坐标 $(\rho, \varphi)$ 形式

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1 + \Psi(\rho, \varphi), \end{cases} \tag{A.3}$$

其中 $\Phi = O(|\rho|^4), \Psi = O(|\rho|^3)$, 为记号简单起见. 这些函数与 $\alpha$ 的依赖性未标明. (A.3) 从 $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$ 出发的轨道有表达式 (见图 3.12)：$\rho = \rho(\varphi; \rho_0), \rho_0 = \rho(0; \rho_0)$, $\rho$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \Phi}{1 + \Psi} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi), \tag{A.4}$$

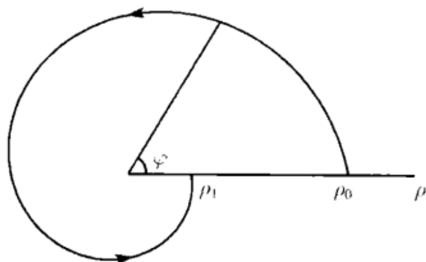



图 3.12　Hopf 分支的 Poincaré 映射

其中 $R = O(|\rho|^4)$. 注意, (A.3) 变换到 (A.4) 等价于以 $\dot{\varphi} = 1$ 引入新的时间参数化. 由此得知, 从半轴 $\varphi = 0$, $\rho_0 > 0$ 出发的所有轨道回到这个半轴的时间是相同的. 因为 $\rho(\varphi; 0) \equiv 0$, 可对 $\rho(\varphi; \rho)$ 有 Taylor 展开

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \tag{A.5}$$

将 (A.5) 代入 (A.4) 并求解所得的 $\rho_0$ 各幂满足初始条件 $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_3(0) = 0$ 的线性微分方程, 得

$$u_1(\varphi) = \mathrm{e}^{\alpha\varphi}, \quad u_2(\varphi) \equiv 0, \quad u_3(\varphi) = \mathrm{e}^{\alpha\varphi}\frac{1 - \mathrm{e}^{2\alpha\varphi}}{2\alpha}.$$

注意, 这些表达式关于项 $R(\rho, \varphi)$ 无关. 因此, 回复映射 $\rho \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$, 对所有 $R = O(\rho^4)$ 有形式

$$\rho_1 = \mathrm{e}^{2\pi\alpha}\rho_0 - \mathrm{e}^{2\pi\alpha}[2\pi + O(\alpha)]\rho_0^3 + O(\rho_0^4). \tag{A.6}$$

映射 (A.6) 对充分小 $\rho_0$ 与 $|\alpha|$ 容易被分析. 存在原点的邻域, 在此邻域内, 对小 $\alpha < 0$, 此映射只有平凡不动点. 对小 $\alpha > 0$, 此系统有另外的不动点 $\rho_0^{(0)} = \sqrt{\alpha} + \cdots$ (见图 3.13). 由 (A.6) 容易得知不动点的稳定性. 考虑到映射的正平衡点对应于系统的极限环, 得知具任何 $O(|z|^4)$ 项的系统 (A.3)(或 (A.1)) 如同系统 (A.2) 当 $\alpha > 0$ 时从原点分支出唯一 (稳定) 极限环. 换言之, 在 $z = 0$ 的某邻域内对充分小 $|\alpha|$, 高阶项并不影响极限环分支.

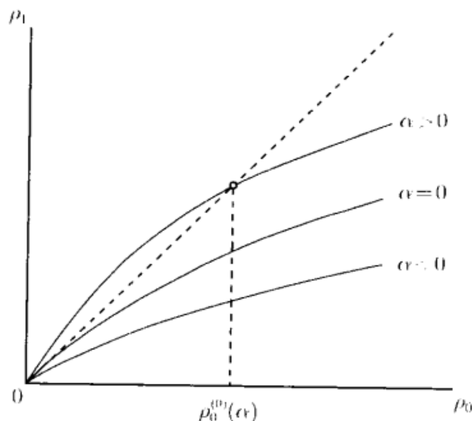



图 3.13　回复映射的不动点

第二步 (同胚的构造). 对所有应用来说, 建立极限环的存在性和唯一性就足够了, 尽管如此, 额外证明相图的拓扑等价性工作还是必须去做.

固定小而正的 $\alpha$. 系统 (A.1) 和 (A.2) 在原点某个邻域内都有极限环. 假设系统 (A.1) 中时间重参数化已经做好, 常数回归时间为 $2\pi$(见上一步). 利用 (A.1) 中的坐标的线性尺度化使得环与水平半轴的交点为 $x_1 = \sqrt{\alpha}$.

按下面的构造定义映射 $z \mapsto \tilde{z}$. 取点 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ 并求值 $(\rho_0, \tau_0)$, 这里, $\tau_0$ 是系统 (A.2) 从水平半轴上 $\rho = \rho_0$ 的点出发的轨道到达点 $z$ 的最短时间. 现在, 在此轴上取 $\rho = \rho_0$ 的点并构造系统 (A.1) 从这点出发在时间区间 $[0, \tau_0]$ 上的轨道, 以 $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + \mathrm{i}\tilde{x}_2$ 记所得的点 (见图 3.14). 对 $z = 0$, 令 $\tilde{z} = 0$.

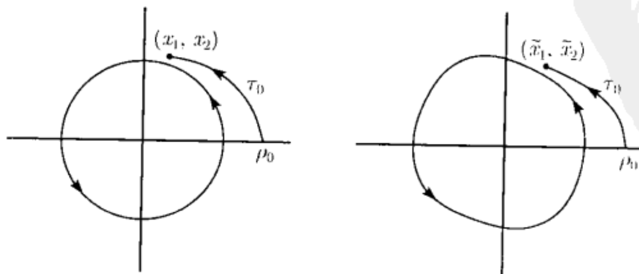



图 3.14　Hopf 分支附近同胚的构造

所构造的这个映射就是同胚, 对 $\alpha > 0$, 它在原点的某邻域内映系统 (A.2) 的轨道为 (A.1) 的轨道, 且保持时间方向. $\alpha < 0$ 的情况可用同样方法考虑, 而无需对坐标进行尺度化. □

## 3.8　附录 B: Poincaré 规范形

虽然 Hopf 分支分析其实只要求规范形理论中的一小部分. 在这个附录里还是提供这个理论较一般情形的基本介绍.

假设 $H_k$ 是分量是 $k$ 次齐次多项式的线性向量函数空间. 考虑光滑的 ODEs 系统

$$\dot{x} = Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{B.1}$$

这里 $f^{(k)} \in H_k$, $k \geqslant 2$. 引入新变量 $y \in \mathbb{R}^n$,

$$x = y + h^{(m)}(y), \tag{B.2}$$

这里 $h^{(m)} \in H_m$, 对某个固定的 $m \geqslant 2$. 现在, $h^{(m)}$ 是 $H_m$ 中任意向量多项式. 则 (B.2) 在原点附近可逆, 且逆变换

$$y = x - h^m(x) + O(\|x\|^{m+1}) \tag{B.3}$$

光滑. 因此

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} - h_x^{(m)}(x)\dot{x} + O(\|x\|^{m+1}) \\
&= \left[(I_n - h_x^{(m)}(x)) + O(\|x\|^m)\right] \left(Ax + \sum_{k=2}^{m} f^{(k)}(x) + O(\|x\|)^{m+1}\right) \\
&= Ay + \sum_{k=2}^{m-1} f^k(y) + \left[f^{(m)}(y) - \left(h_y^{(m)}(y)Ay - Ah^{(m)}(y)\right)\right] + O(\|y\|^{m+1}).
\end{aligned}$$

由此, 新变量 $y$ 满足方程

$$\dot{y} = Ay + \sum_{k=2}^{m-1} f^{(k)}(y) + \left[f^{(m)}(y) - (L_A h^{(m)})(y)\right] + O(\|y\|^{m+1}), \tag{B.4}$$

这里线性算子 $L_A$ 由公式

$$(L_A h)(y) = h_y(y)Ay - Ah(y) \tag{B.5}$$

定义.

**引理 3.9**　*若 $h \in H_m$, 则对一切 $m \geqslant 2$, 有 $L_A h \in H_m$.* □

注意, 方程 (B.4) 中所有次数小于 $m$ 的项与方程 (B.1) 中的相同, 而 $m$ 次项有变化, 与 $f^m(y)$ 相差 $-(L_A h^{(m)})(y)$. 现在, 在 $H_m$ 中引入齐次方程

$$L_A h^{(m)} = f^{(m)}. \tag{B.6}$$

若 $f^{(m)}$ 属于 $L_A$ 的值域 $L_A(H_m)$, 则 (B.6) 有解 $h^{(m)}$, 这意味着存在变换 (B.2), 使得方程 (B.1) 中所有 $m$ 次齐次项消去. 但是, 一般 $f^{(m)} = g^{(m)} + r^{(m)}$, 这里 $g^{(m)} \in L_A(H_m)$, 而 $r^{(m)}$ 属于 $L_A(H_m)$ 在 $H_m$ 中的补空间 $\tilde{H}_m$. 因此, 由变换 (B.2) 只能消去 (B.1) 中 $f^{(m)}$ 的 $g^m$ 那部分. 剩余部分 $r^{(m)}$ 项称为 *$m$ 次共振项*. 由于 $\tilde{H}_m$ 不是唯一确定的, 对共振项也一样成立.

对 $m = 2, 3, 4, \cdots$ 递归地应用叙述的消去程序, 就证明了下面的定理.

**定理 3.5**(Poincaré, 1879)　*存在多项式坐标变换*

$$x = y + h^{(2)}(y) + h^{(3)}(y) + \cdots + h^{(m)}(y), \quad h^{(k)} \in H_k,$$

*将光滑系统*

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{其中 } f(x) = O(\|x\|^2)$$

*变为*

$$\dot{y} = Ay + r^{(2)}(y) + r^{(3)}(y) + \cdots + r^{(m)}(y) + O(||y||^{m+1}), \tag{B.7}$$

*这里, 每一个 $r^{(k)}$ 仅包含 $k$ 次共振项, 即对 $k = 2, 3, 4, \cdots, m$, $r^{(k)} \in \tilde{H}_k$.* □

系统 (B.7) 称为 (B.1) 的 Poincaré *规范形*.

还有一个实际问题: 如何选择补空间 $\tilde{H}_k \subset H_k$?

对 $\tilde{H}_k \subset H_k$ 的一个自然选择是 $L_A(H_k)$ 在 $H_k$ 中的*正交补空间*. 为说明这一点, 用 Fredholm 交替定理. 设 $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ 是 $H_k$ 中的数量积, $L_A^*$ 是 $H_k$ 中对一切 $u, v \in H_k$ 满足

$$\langle u, L_A v \rangle_k = \langle L_A^* u, v \rangle_k$$

的线性算子. 于是 $L_A^*$ 的零–空间

$$\mathcal{N}_k^* = \{u \in H_k : L_A^* u = 0\} \tag{B.8}$$

是 $L_A(H_k)$ 的正交补空间. 在实践中, 可以将齐次向量多项式的所有分量的所有单项式前的系数作为 $H_k$ 中的坐标来处理. 对每个 $k$, 将 $H_k$ 与某个 $\mathbb{R}^{N(k)}$, 以及 $L_A|_{H_k^k}$ 与 $N(k) \times N(k)$ 矩阵 $M_A^{(k)}$ 分别等同. 由这些等同, 可以在 $\mathbb{R}^{N(k)}$ 中用标准数量积 $\langle u, v \rangle = u^{\mathrm{T}} v$, 使得 $L_A^*$ 用转置矩阵 $[M_A^{(k)}]^{\mathrm{T}}$ 表示. 于是, 子空间 $\mathcal{N}_k^*$ 是由 $[M_A^{(k)}]^{\mathrm{T}}$ 的零特征值所对应的所有特征向量所张成.

但是, 如果 $L_A$(或者等价地, $M_A^k$) 的零特征值没有广义特征向量与它相对应, $L_A$ 的零–空间

$$\mathcal{N}_k = \{v \in H_k : L_A v = 0\} \tag{B.9}$$

和它的值域 $L_A(H_k)$ 一起张成整个 $H_k$. 因此, 在这种情形, 可以如 $\tilde{H}_k$ 用 $\mathcal{N}_k$, 将上面所述的 $H_k$ 与 $\mathbb{R}^{N(k)}$ 的等同, 零空间 $\mathcal{N}_k$ 是由 $M_A^k$ 对应零特征值的所有特征向量所张成.

**例 B.1**(在 Hopf 分支的 Poincaré 规范形)　考虑系统 (B.1), $n = 2$ 且

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 > 0.$$

这个系统有平衡点 $x = 0$, 有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0 > 0$. 注意, 任何一个具有这样两个特征值的 $2 \times 2$ 矩阵相似于 $A$. 算子 $L_A$ 有形式

$$(L_A h)(y) = \omega_0 h_y(y) \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} - \omega_0 \begin{pmatrix} -h_2(y) \\ h_1(y) \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

首先考虑空间 $H_2$. 任一向量多项式 $f^{(2)} \in H_2$ 可以写为

$$f^{(2)}(y) = \begin{pmatrix} a_1 y_1^2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2 \\ a_4 y_1^2 + a_5 y_1 y_2 + a_6 y_2^2 \end{pmatrix}.$$

故 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 可考虑为 $H_2$ 中的坐标. 用 (B.10) 容易验证

$$(L_A f^{(2)})(y) = \omega_0 \begin{pmatrix} (a_1 + a_4)y_1^2 + (-2a_1 + 2a_3 + a_5)y_1 y_2 + (-a_2 + a_6)y_2^2 \\ (-a_1 + a_5)y_1^2 + (-a_2 - 2a_4 + 2a_6)y_1 y_2 + (-a_3 - a_5)y_2^2 \end{pmatrix},$$

故它在 $a \in \mathbb{R}^6$ 上的作用如用矩阵

$$M_A^{(2)} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的相乘. 由于 $\det(M_A^{(2)}) = 9\omega_0^6 \neq 0$, $L_A(H_2) = H_2$, 因此, 所有二次项可由坐标变换

$$x = y + h^{(2)}(y)$$

来移去, 这里 $h^{(2)}$ 由 $[M_A^{(2)}]^{-1}a$ 表示. 注意, 这个变换改变 $k \geqslant 3$ 次项.

现在, 假设所有二次项已经消去, 故 (B.1) 可以写为

$$\dot{y} = Ay + f^{(3)}(y) + O(||y||^4),$$

其中

$$f^{(3)}(y) = \begin{pmatrix} b_1 y_1^3 + b_2 y_1^2 y_2 + b_3 y_1 y_2^2 + b_4 y_2^3 \\ b_5 y_1^3 + b_6 y_1^2 y_2 + b_7 y_1 y_2^2 + b_8 y_2^3 \end{pmatrix} \in H_3.$$

可以看到 $\dim H_3 = 8$, 而 $(b_1, b_2, \cdots, b_8)$ 是 $H_3$ 中的坐标. 可以验证 $L_A$ 在 $H_3$ 上的作用可以用矩阵

$$M_A^{(3)} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

表示. 正如我们所期望的, 这个矩阵是奇异的: $\det M_A^{(3)} = 0$. 转置矩阵 $[M_A^{(3)}]^{\mathrm{T}}$ 有二维零–空间 $\mathcal{N}_k^*$, 它是由向量

$$V^* = (3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 3)^{\mathrm{T}}, \quad W^* = (0, -1, 0, -3, 3, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

所张成 (验证). 因此, 可选择 $\tilde{H}_3$ 为

$$\tilde{H}_3 = \mathrm{span}\{V^*, W^*\}.$$

对这个补空间 $\tilde{H}_3$ 的选择, $H_3$ 中的共振项对某 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ 有形式

$$r_*^3 = \alpha \begin{pmatrix} 3y_1^3 + y_1 y_2^2 \\ y_1^2 y_2 + 3y_2^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -y_1^2 y_2 - 3y_2^3 \\ 3y_1^3 + y_1 y_2^2 \end{pmatrix}.$$

但是, $M_A^3$ 的零–空间 $\mathcal{N}_k$ 是由两个向量

$$V = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad W = (0, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

所张成, 而没有与零特征值相应的广义特征向量 (验证). 因此, 另一个选择是

$$\tilde{H}_3 = \text{span}\{V, W\}.$$

按这个选择, 对某 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, $H_3$ 中的共振项是

$$r^{(3)} = \alpha \begin{pmatrix} y_1^3 + y_1 y_2^2 \\ y_1^2 y_2 + y_2^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -y_1^2 y_2 - y_2^3 \\ y_1^3 + y_1 y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha y_1 - \beta y_2)(y_1^2 + y_2^2) \\ (\beta y_1 + \alpha y_2)(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}.$$

现在, 由定理 3.5 得知光滑平面系统在 Hopf 分支可以变换成规范形

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \alpha y_1 - \beta y_2 \\ \beta y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^3).$$

引入复变量 $z = y_1 + \mathrm{i} y_2$, 得到熟悉的方程

$$\dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + c_1 z|z|^2 + O(|z|^4), \quad z \in \mathbb{C}^1,$$

这里 $c_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$. ◇

当 (B.1) 中的矩阵 $A$ 是对角形

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

时, 可容易计算 $L_A$ 在 $H_m$ 上限制的特征值. 考虑向量单项式

$$h_j(y) = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n} e_j, \tag{B.11}$$

其中 $m_i \geqslant 0$ 是满足 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$ 的整数, $e_j \in \mathbb{R}^n$ 是沿着 $y_j$ 轴的单位向量. 显然, $h \in H_m$, 利用 (B.5) 可知

$$(L_A h_j)(y) = \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k m_k - \lambda_j \right) y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n} e_j.$$

因此

$$L_A h_j = (\langle \lambda, m \rangle - \lambda_j) h_j, \tag{B.12}$$

这里

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^{\mathrm{T}}, \quad m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)^{\mathrm{T}}$$

以及用了 $\mathbb{R}^n$ 中通常的数量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 使记号简单. 方程 (B.12) 意味着由 (B.11) 确定的向量-单项式 $h_j$ 是 $L_A$ 对应于特征值

$$\mu_j = \langle \lambda, m \rangle - \lambda_j$$

的特征向量. 因此, $L_A$ 的零-空间在这种情形是由向量-单项式 $h_j$ 所张成, 相应的特征值 $\mu_j = 0$, 即

$$\lambda_j = \langle \lambda, m \rangle. \tag{B.13}$$

这种单项式称为 *m* 次共振单项式, 而这些是出现在 $r^{(m)}$ 中仅有的单项式. 对固定的 $m$ 和每个 $j = 1, 2, \cdots, n$, (B.13) 得的关于 $A$ 的特征值的条件称为**共振条件**或**共振**.

如果不存在 $m$ 次共振, 由定理 B.1 得知, (B.1) 中所有 $m$ 次项都可由多项式变换消去. 出现共振情况, 满足 (B.13) 的共振单项式不能由所有这些变换从 (B.1) 右端的 $j$ 分量中移去. 这允许我们在某些情形不用任何计算来预报 Poincaré 规范形.

**例 B.2**(共振结点的 Poincaré 规范形)　考虑系统 (B.1), $n = 2$ 和

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

原点 $x = 0$ 是不稳定结点, 特征值 $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 2$ 共振:

$$\lambda_2 = 2\lambda_1$$

这是一个 2 次共振 ($m_1 = 0$, $m_2 = 2$), 显然没有其他任何次共振. 因此, 只存在一个共振单项式-向量

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix},$$

以及 (B.1) 局部光滑等价于系统

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 + \alpha y_2^2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^m),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^1$, 以及 $m \geqslant 3$ 可取任意大, 只要 (B.1) 是 $C^\infty$ 系统. ◇

在给出另外例子之前, 我们指出, 上面对于 $x \in \mathbb{R}^m$ 考虑的 (B.1), 以及所得的所有公式对 $z \in C^n$ 都可逐字逐句地成立.

**例 B.3**(重温 Hopf 情形的规范形)　再次考虑系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{B.14}$$

其中 $\omega_0 > 0$. 若引入复变量 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$, 则 (B.14) 可写为复方程

$$\dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + g_1(z, \bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}^1,$$

其中 $g_1$ 是 $z$ 的光滑函数, $\bar{z} = x_1 - \mathrm{i}x_2$(参看引理 3.3). 由于 $\bar{z}$ 满足复共轭方程

$$\dot{\bar{z}} = -\mathrm{i}\omega_0 \bar{z} + g_2(z, \bar{z}), \quad \bar{z} \in \mathbb{C}^1,$$

这里 $g_2(z, \bar{z}) = \overline{g_1(z, \bar{z})}$, 可以形式地在 $\mathbb{C}^2$ 中引入系统

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(z_1, z_2) \\ g_2(z_1, z_2) \end{pmatrix}, \tag{B.15}$$

若作代换 $z_1 = z$, 和 $z_2 = \bar{z}$, 则第一个方程等价于 (B.14). 系统 (B.15) 称为 (B.14) 的*复化系统*. 注意, (B.15) 有对角的线性部分, $\lambda_1 = \mathrm{i}\omega_0$ 与 $\lambda_2 = -\mathrm{i}\omega_0$. 这两个特征值之和为零

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

对任何整数 $k \geqslant 1$, 这导致两个 $2k+1$ 次共振条件

$$\lambda_1 = \lambda_1 + k(\lambda_1 + \lambda_2) = (k+1)\lambda_1 + k\lambda_2,$$
$$\lambda_2 = \lambda_2 + k(\lambda_1 + \lambda_2) = k\lambda_1 + (k+1)\lambda_2.$$

因此, 共振单项式为

$$\begin{pmatrix} \zeta_1(\zeta_1\zeta_2)^k \\ 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2(\zeta_1\zeta_2)^k \end{pmatrix}$$

这里 $(\zeta_1, \zeta_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$. 因此, 所得 Poincaré 规范形的第一个方程是

$$\dot{\zeta}_1 = \mathrm{i}\omega_0\zeta_1 + c_1\zeta_1^2\zeta_2 + c_2\zeta_1^3\zeta_2^2 + \cdots,$$

或者

$$\dot{\zeta} = \mathrm{i}\omega_0\zeta + c_1\zeta|\zeta|^2 + c_2\zeta|\zeta|^4 + O(|\zeta|^6), \quad \zeta \in \mathbb{C}^1,$$

其中 $c_{1,2} \in \mathbb{C}^1$, 第二个方程是第一个方程的复共轭. 这给出了在 Hopf 分支直到第六阶规范形. ◇

应该强调, 在这个附录里仅仅确定了规范形一般结构的一个概要, 而没有给出它们的系数借助于原来系统的表达式. 这些表达式可用待定系数法得到 (见本章和第 8 章). 存在映射规范形理论的一种形式 (见第 4, 9 章). 在所有这些计算中, 符号操作系统软件是很有用的.

## 3.9 附录 C: 文献评注

平衡点的折分支本质上已经知道有 100 年了. 由于任何一个数量系统都可以写为 $\dot{x} = -V_x(x, \alpha)$, $V$ 为某个函数, 而一般依赖于参数的*梯度系统*的分类跟突变理论 (或奇点理论) 有关. 因此, 折分支的拓扑规范形出现在 Thom(1972) 的七个基本突变名单中. 如在突变理论中, 折分支规范形可用 Malgrange 预备定理导出 (Arrowsmith, Place, 1990; Murdock, 2003). 采用初等方法讨论对本书更合适.

其实, 动力系统的分支理论与光滑函数的奇点理论有着许多内在联系. Poston 和 Stewart(1978) 及 Arnold (1984) 介绍了后面这一课题. 但是应该指出, 奇点理论的大部分结果直接应用于平衡点分析但没有用到对相图的分析.

规范化技巧用在平衡点分支分析是由 Poincaré (1879) 发展的. 附录 B 给出的仅仅是规范形理论最简单变式的简短阐述. 这个附录接近于 Guckenheimer 和 Holmes(1983, 3.3 节). 规范形的介绍也可在 Arnold (1983) 和 Vanderbauwhede (1989) 中找到, 那里解释如何用这个理论到局部分支问题. 现代综合性的阐述见 Belitskii(2002) 和 Murdock (2003). 定理 3.4 是由 Arnold (1972, 1983) 用 Poincaré 规范形给出叙述和简短证明.

平面上在具一对纯虚特征值的平衡点附近一般单参数系统的相图分支首先是由 Antronov 和 Leontovich (1939) 研究. 他们用原属于 Lyapunov (1892) 的*后继函数*(回复映射) 技巧而没有受益于规范化. 用一般平面系统的 Taylor 系数来表达第一个 Lyapunov 系数的明显表达式是由 Bautin (1949) 得到的. Andronov 和他的合作者们对这个分支的结果的解释可以在 Antronov 等 (1973) 中找到.

Hopf (1942) 对平衡点具有一对纯虚特征值的 $n$ 维系统, 在某些临界参数值, 证明出现振幅递增的周期解族. 他没有考虑整个相图的分支. Hopf 文章的英文译文包含在 Marsden, McCracken (1976) 中. 这是一本很有用的书, 其中还包含有第一个 Lyapunov 系数的推导以及根据隐函数定理对 Hopf 结果的证明.

Hassard , Kazarinoff, Wan (1981) 用 Poincaré 规范形的复数形式对 Lyapunov 系数 (实际上是 $c_1$) 给出了更简单的推导. 本书实际上用了他们的技巧, 虽然没有预先假定 Poincaré 规范形是已知的. 不用系统的中间变换到它的特征基上来计算

复方程的 Taylor 系数的公式也可以从他们的书中找到 (用中心流形简化技巧到平凡的平面情形, 见第 5 章). 我们也广泛地运用时间重参数化去得到更简单的规范形, 然后用它来证明环的存在性和唯一性, 以及对整个相图分支的分析 (见附录 A).

证明在 Hopf 条件下产生周期解还有其他的途径. 一个优美的方法是将问题形式地化为在周期函数的泛函空间中求一个抽象方程的解族, 并应用 Lyapunov-Schmidt 简化. 这个方法允许推广到无穷维动力系统, 这超出本书的范围 (Chow, Hale, 1982; Kielhofer, 2004).



# 第4章　离散-时间系统不动点的单参数分支

这一章的结构很像第 3 章, 本章叙述 $n$ 维离散时间动力系统不动点的最简单分支的分支条件: 折分支、翻转分支和 Neimark-Sacker 分支. 然后在可能出现这些分支的最低可能的维数下研究这些分支: 数量系统的折分支和翻转分支以及平面系统的 Neimark-Sacker 分支. 第 5 章将说明如何将这些结果应用到 $n$ 维系统中去, 那里的 $n$ 分别大于 1 和 2.

## 4.1　最简单的分支条件

考虑依赖于参数的离散-时间动力系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

这里映射 $f$ 关于 $x$ 和 $\alpha$ 都光滑. 有时将这个系统写为

$$\tilde{x} = f(x,\alpha), \quad x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

这里 $\tilde{x}$ 表示 $x$ 在这个映射作用下的象. 设 $x = x_0$ 是这个系统在 $\alpha = \alpha_0$ 时的双曲不动点. 当参数变化时监控这个不动点以及它的乘子. 显然, 在一般情况下, 只有三种方法才能破坏双曲性条件: 对某个参数值, 要么单个正乘子趋于单位圆, 有 $\mu_1 = 1$(见图 4.1(a)), 要么单个负乘子趋于单位圆, 这时有 $\mu_1 = -1$(见图 4.1(b)), 还有就是一对单复乘子到达单位圆, 这时有 $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm i\theta_0}, 0 < \theta_0 < \pi$ (见图 4.1(c)). 显然, 需要更多参数才能分配额外的乘子在单位圆上.

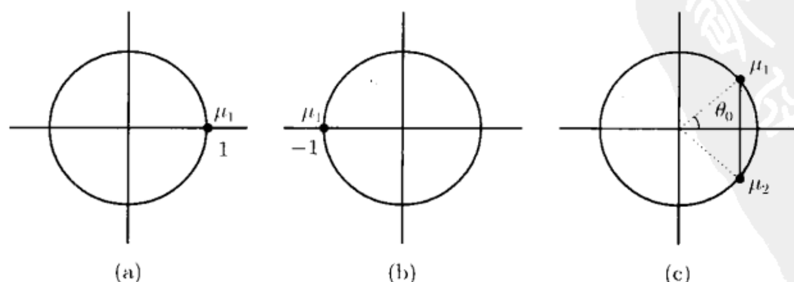



图 4.1　余维 1 临界情形

这一章其余部分是证明满足上面条件之一的非双曲不动点是结构不稳定的，以及在参数变化时局部相图对应的分支分析. 用下面的定义结束这一节，其理由后面将看清楚.

**定义 4.1**　对应于 $\mu_1 = 1$ 的分支称为折 (或切) 分支.

**注**　这个分支除了别的名字以外，也称为极限点分支、鞍–结点分支，以及转向点分支. ◇

**定义 4.2**　对应于 $\mu_1 = -1$ 的分支称为翻转(或倍周期) 分支.

**定义 4.3**　对应于 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ 的分支称为Neimark-Sacker(或环面) 分支.

注意，折分支和翻转分支只当 $n \geqslant 1$ 时才有可能，而对 Neimark-Sacker 分支，则需要 $n \geqslant 2$.

**例 4.1**(Hénon 映射的不动点分支)　考虑例 1.9 介绍的 Hénon 映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

在 $(\beta, \alpha)$ 平面上求对应于上面定义的临界情形的曲线. 更确切地说，求参数值，使得对这些参数值 (4.1) 有不动点，其乘子满足图 4.1 中直观的分支条件之一.

(4.1) 的不动点可以由方程组

$$\begin{cases} x = y, \\ y = \alpha - \beta x - y^2 \end{cases}$$

求得. 由此得知，所有不动点在直线 $y = x$ 上，它们的 $y$ 坐标满足方程

$$y^2 + (1 + \beta)y - \alpha = 0. \tag{4.2}$$

因此，(4.1) 的不动点不多于两个.

引入 (4.1) 的 Jacobi 矩阵

$$A(x, y, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2y \end{pmatrix}.$$

折分支条件导致

$$\det(A(x, y, \alpha, \beta) - I_2) = 0,$$

这里 $(x, y)$ 是不动点的坐标，$I_2$ 是 $2 \times 2$ 单位矩阵. 这个条件等价于

$$1 + \beta + 2y = 0. \tag{4.3}$$

因此, $(\alpha,\beta)$ 平面内的折分支曲线可以从不动点方程 (4.2) 和折分支条件 (4.3) 组成的代数方程组求得, 即由

$$\begin{cases} y^2+(1+\beta)y-\alpha=0, \\ 1+\beta+2y=0 \end{cases}$$

消去 $y$ 得到

$$t^{(1)}=\left\{(\beta,\alpha):\alpha=-\frac{(1+\beta)^2}{4}\right\}.$$

沿着这曲线, 映射 (4.1) 有乘子为 $\mu_1=1$ 的不动点.

类似地, 翻转分支条件可以写为

$$\det(A(x,y,\alpha,\beta)+I_2)=0$$

或者

$$1+\beta+2y=0. \tag{4.4}$$

结合不动点方程 (4.2) 和翻转分支条件 (4.4), 得方程组

$$\begin{cases} y^2+(1+\beta)y-\alpha=0, \\ 1+\beta-2y=0. \end{cases}$$

从这个方程组消去 $y$, 当它的参数属于曲线

$$f^{(1)}=\left\{(\beta,\alpha):\alpha=\frac{3(1+\beta)^2}{4}\right\}$$

时, 映射 (4.1) 有乘子 $\mu_1=-1$ 的不动点.

最后, 考虑 Neimark-Sacker 临界情形. 注意两个临界乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ 的乘积是 1:

$$\mu_1\mu_2=1.$$

由于相同的乘积等于 $A(x,y,\alpha,\beta)$ 的行列式, 由 Neimark-Sacker 条件得

$$\det A(x,y,\alpha,\beta)-1=0.$$

由此, 对 (4.1) 的两个乘子在单位圆上的不动点, 有

$$1-\beta=0. \tag{4.5}$$

但是存在两个复杂因素. 首先, 当映射 (4.1) 有不动点时仅需考虑分支条件 (4.5), 即考虑 $(\beta,\alpha)$ 平面内曲线 $t^{(1)}$ 上方的参数值. 这就需加限制 $\alpha>-1$. 其次, (4.5) 对于两个实乘子

$$\mu_1=\gamma,\quad \mu_2=\frac{1}{\gamma},\quad |\gamma|>1$$

的不动点也应成立. 这里乘子 $\mu_1$ 在单位圆外, 乘子 $\mu_2$ 在单位圆内. 因此, 有鞍点不动点, 它没有分支. 为了排除这种可能性, 必须假定 $\alpha < 3$(验证). 由此, (4.1) 沿着曲线 $t^{(1)}$ 和 $f^{(1)}$ 之间的线段

$$h^{(1)} = \{(\beta, \alpha) : \beta = 1, -1 < \alpha < 3\}$$

有具乘子 $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0}, 0 < \theta_0 < \pi$ 的不动点 (见图 4.2). ◇

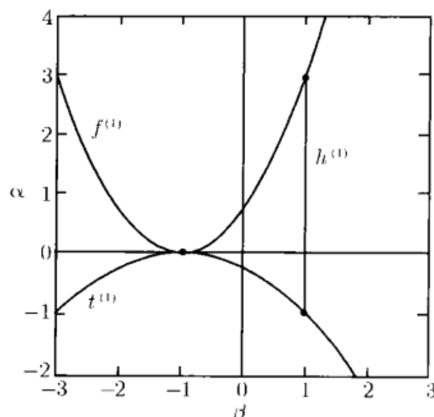



图 4.2　Hénon 映射 (4.1) 的分支曲线

## 4.2　折分支规范形

考虑下面的依赖于一个参数的一维动力系统

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 \equiv f_\alpha(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x). \tag{4.6}$$

映射 $f_\alpha$ 对小 $|\alpha|$ 在原点邻域内可逆. 系统 (4.6) 在 $\alpha = 0$ 有具乘子 $\mu = f_x(0,0) = 1$ 的非双曲不动点 $x_0 = 0$. 这个系统在 $x = 0$ 附近对小的 $|\alpha|$ 的性态如图 4.3 所示. 对

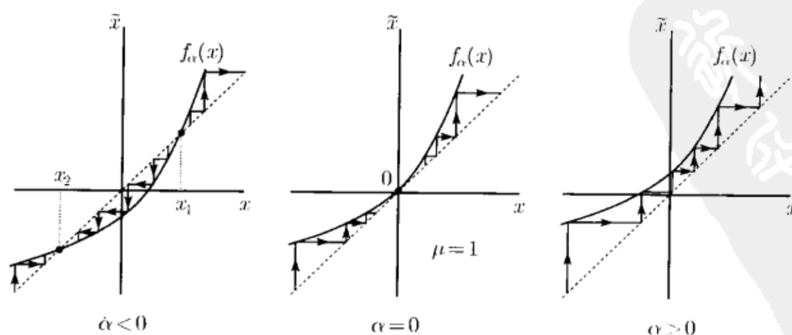



图 4.3　折分支

$\alpha<0$, 系统有两个不动点：$x_{1,2}(\alpha)=\pm\sqrt{-\alpha}$, 左边一个稳定, 右边一个不稳定. $\alpha>0$ 时, 这个系统没有不动点. 当 $\alpha$ 从负值到正值穿过零时, 两个不动点 (稳定的和不稳定的)“相碰”, 在 $\alpha=0$ 形成一个 $\mu=1$ 的不动点, 然后就消失. 这是一个离散–时间动力系统的折 (切) 分支.

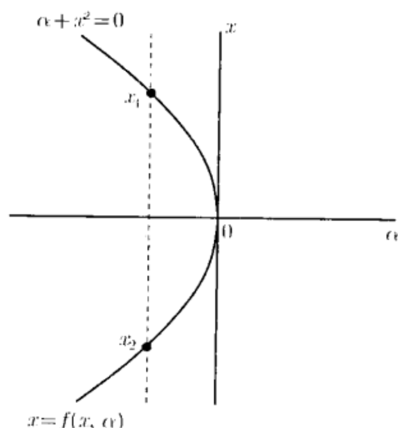



图 4.4　不动点流形

通常, 还有另外的方法叙述这种分支：在相空间和参数空间的积空间, 即在 $(x,\alpha)$ 平面内画出分支图. 不动点流形 $x-f(x,\alpha)=0$ 是一条简单的抛物线 $\alpha=-x^2$(见图 4.4). 固定某个 $\alpha$, 容易确定这个系统在这个参数值的不动点个数. 映射将不动点流形投影到 $\alpha$ 轴上时在 $(x,\alpha)=(0,0)$ 有折形奇异性.

**注**　对系统 $x\mapsto\alpha+x-x^2$ 可用同样方法考虑. 分析揭示对 $\alpha>0$ 系统出现两个不动点.◇

现在, 在 (4.6) 中加入高阶项, 即考虑系统

$$x\mapsto\alpha+x+x^2+x^3\psi(x,\alpha)\equiv F_\alpha(x),\qquad(4.7)$$

其中 $\psi=\psi(x,\alpha)$ 光滑依赖于 $(x,\alpha)$. 容易验证, 在 $x=0$ 的充分小的邻域内, 只要 $|\alpha|$ 足够小, 在对应的参数值, 系统 (4.7) 的不动点个数与稳定性与系统 (4.6) 的是相同的. 进一步, 对每一个小 $|\alpha|$, 原点邻域内映 (4.6) 的轨道为 (4.7) 对应轨道的同胚 $h_\alpha$ 可以构造出. 这个性质在第 2 章称为依赖于参数系统的*局部拓扑等价性*. 应该指出, $h_\alpha$ 的构造没有连续–时间情形 (参看引理 3.1) 那么简单. 在现在的情形, 同胚映 (4.6) 的不动点为 (4.7) 对应的不动点, 而不必将 (4.6) 的其他轨道映为 (4.7) 的轨道. 尽管如此, 对在 (0,0) 的邻域内所有 $(x,\alpha)$ 满足条件

$$f_\alpha(x)=h_\alpha^{-1}(F_\alpha(h_\alpha(x)))$$

的同胚是存在的 (参看第 2 章). 由此, 下面的引理成立.

**引理 4.1**　*系统*

$$x\mapsto\alpha+x+x^2+O(x^3)$$

*在原点附近局部拓扑等价于系统*

$$x\mapsto\alpha+x+x^2.$$

□

## 4.3　一般折分支

我们将证明系统 (4.6)(有可能 $x^2$ 项的符号有变化) 是具折分支的一般一维离散–时间系统的拓扑规范形. 在第 5 章也将看到, 在某些强意义下它刻画了一般 $n$ 维系统的折分支.

**定理 4.1**　假设一维光滑系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^1 \tag{4.8}$$

在 $\alpha=0$ 有不动点 $x_0=0$, 令 $\mu=f_x(0,0)=1$. 假定条件 (A.1) 和 (A.2) 满足, 即

$$f_{xx}(0,0) \neq 0;$$

$$f_\alpha(0,0) \neq 0.$$

则存在光滑可逆的坐标与参数变换将系统化为系统

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2 + O(\eta^3).$$

**证明**　将 $f(x,\alpha)$ 在 $x=0$ 关于 $x$ 进行 Taylor 展开

$$f(x,\alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3).$$

满足两个条件: $f_0(0)=f(0,0)=0$ (不动点条件) 以及 $f_1(0)=f_x(0,0)=1$ (折分支条件). 由于 $f_1(0)=1$, 可以写为

$$f(x,\alpha) = f_0(\alpha) + [1+g(\alpha)]x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

其中 $g(\alpha)$ 光滑且 $g(0)=0$.

如同定理 3.1 的证明, 引入新变量 $\xi$, 作坐标平移:

$$\xi = x + \delta, \tag{4.9}$$

这里 $\delta=\delta(\alpha)$ 将适当定义. 由 (4.9) 得

$$\tilde{\xi} = \tilde{x} + \delta = f(x,\alpha) + \delta = f(\xi-\delta,\alpha) + \delta.$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} =& [f_0(\alpha) - g(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ &+\xi + [g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3).\end{aligned}$$

假定

(A. 1)
$$f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \neq 0$$

成立, 于是存在光滑函数 $\delta(\alpha)$, 使得对所有充分小的 $|\alpha|$, 上面映射中依赖于参数的线性项被消去. 事实上, 使得这项消失的条件可以写为

$$F(\alpha,\delta) \equiv g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\varphi(\alpha,\delta) = 0,$$

对某个光滑函数 $\varphi$. 有

$$F(0,0)=0,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \delta}\right|_{(0,0)}=-2f_2(0)\neq 0,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right|_{(0,0)}\neq g'(0).$$

由此得知满足 $\delta(0)=0$ 和 $F(\alpha,\delta(\alpha))\equiv 0$ 的光滑函数 $\delta=\delta(\alpha)$ 的存在性 (局部) 和唯一性. 得到

$$\delta(\alpha)=\frac{g'(0)}{2f_2(0)}\alpha+O(\alpha^2).$$

借助 $\xi$, 这个映射可写为

$$\tilde{\xi}=[f_0'(0)\alpha+\alpha^2\psi(\alpha)]+\xi+[f_2(0)+O(\alpha)]\xi^2+O(\xi^3), \tag{4.10}$$

其中 $\psi$ 为某光滑函数.

把 (4.10) 中常数项 (与 $\xi$ 无关) 考虑为新参数 $\mu=\mu(\alpha)$:

$$\mu=f_0'(0)\alpha+\alpha^2\psi(\alpha).$$

有

(a) $\mu(0)=0$;

(b) $\mu'(0)=f_0'(0)=f_\alpha(0,0)$.

如果假定

$$f_\alpha(0,0)\neq 0$$

成立, 则由反函数定理, 满足 $\alpha(0)=0$ 的光滑反函数 $\alpha=\alpha(\mu)$ 存在且唯一. 由此, 方程 (4.10) 现在化为

$$\tilde{\xi}=\mu+\xi+b(\mu)\xi^2+O(\xi^3),$$

由第一个假定 (A. 1), 这里 $b(\mu)$ 是满足 $b(0)=f_2(0)\neq 0$ 的光滑函数.

令 $\eta=|b(\mu)|\xi$ 和 $\beta=|b(\mu)|\mu$, 则得到

$$\tilde{\eta}=\beta+\eta+s\eta^2+O(\eta^3),$$

其中 $s=\operatorname{sign} b(0)=\pm 1$. □

应用引理 4.1 可以消去项 $O(\eta^3)$, 最后得到下面的一般结果.

**定理 4.2**(折分支的拓扑规范形) 任何一个一般的单参数纯量系统

$$x\mapsto f(x,\alpha),$$

假设它在 $\alpha=0$ 有不动点 $x_0=0$ 满足 $\mu=f_x(0,0)=1$, 则它在原点附近局部拓扑等价于下面的规范形

$$\eta\mapsto\beta+\eta\pm\eta^2.$$ □

**注**　定理 4.2 的一般性条件就是定理 4.1 的非退化条件 (A. 1) 和横截性条件 (A. 2). ◇

## 4.4　翻转分支的规范形

下面考虑依赖于一个参数的一维动力系统

$$x \mapsto -(1+\alpha)x + x^3 \equiv f(x,\alpha) \equiv f_\alpha(x). \tag{4.11}$$

映射 $f_\alpha$ 对小的 $|\alpha|$ 在原点的邻域内可逆. 系统 (4.11) 对所有 $\alpha$ 有不动点 $x_0=0$, 乘子 $\mu=-(1+\alpha)$. 这个不动点对小 $\alpha<0$ 是线性稳定, 对 $\alpha>0$ 是线性不稳定. 在 $\alpha=0$, 它不是双曲的, 因为乘子 $\mu=f_x(0,0)=-1$, 不过它是 (非线性) 稳定的. 对小的 $|\alpha|$, 这个系统在原点附近没有其他的不动点.

现在考虑映射 (4.11) 的二次迭代 $f_\alpha^2(x)$. 令 $y=f_\alpha(x)$, 则

$$\begin{aligned} f_\alpha^2(x) &= f_\alpha(y) = -(1+\alpha)y + y^3 \\ &= -(1+\alpha)[-(1+\alpha)x + x^3] + [-(1+\alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1+\alpha)^2 x - [(1+\alpha)(2+2\alpha+\alpha^2)]x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

显然, 映射 $f_\alpha^2$ 有平凡不动点 $x_0=0$. 对小的 $\alpha>0$, 它还有两个非平凡不动点:

$$x_{1,2} = f_\alpha^2(x_{1,2}),$$

其中 $x_{1,2}=\pm\sqrt{\alpha}$(见图 4.5). 这两个点是稳定的, 且构成原来映射 $f_\alpha$ 的周期 2 环. 这意味着

$$x_2 = f_\alpha(x_1), \quad x_1 = f_\alpha(x_2),$$

这里 $x_1 \neq x_2$. 图 4.6 显示在阶梯图的帮助下系统 (4.11) 的完全分支图. 当 $\alpha$ 从上面趋于零时周期 2 环 “收缩” 并消失. 这是一个翻转分支.

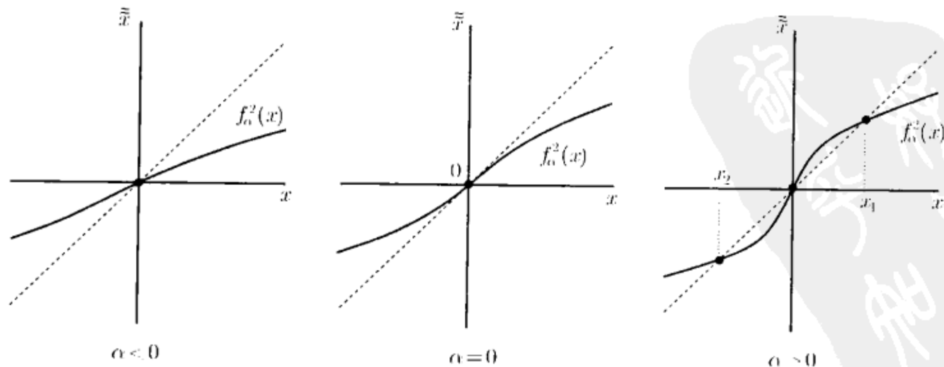



图 4.5　翻转分支附近的二次迭代

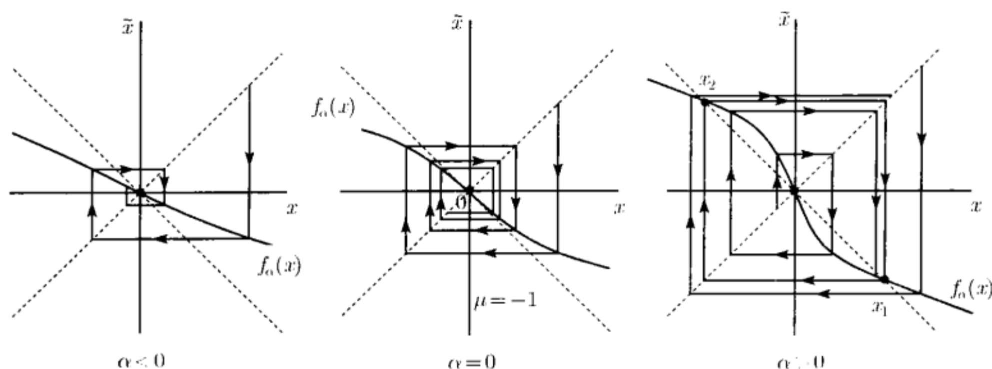



图 4.6 翻转分支

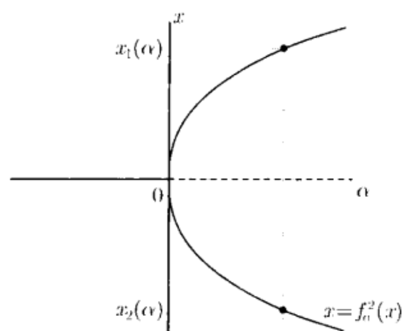



图 4.7 对应于二次迭代叉分支的翻转

另外, 叙述这个分支的方法是用 $(t,\alpha)$ 平面 (见图 4.7). 在这个图中, 水平轴对应 (4.11) 的不动点 ($\alpha<0$ 时稳定, $\alpha>0$ 时不稳定),"抛物线" 代表 $\alpha>0$ 时存在稳定的周期 2 环 $\{x_1,x_2\}$.

如通常, 考虑高阶项对系统 (4.11) 的影响.

**引理 4.2** *系统*

$$x\mapsto-(1+\alpha)x+x^3+O(x^4)$$

*在原点附近局部拓扑等价于系统*

$$x\mapsto-(1+\alpha)x+x^3.$$

□

不动点以及周期 2 环的分析是一个简单的练习. 证明的剩余部分并不容易, 这里略去.

情形

$$x\mapsto-(1+\alpha)x-x^3 \tag{4.12}$$

可用同样方法处理. 对 $\alpha\neq0$, 不动点 $x_0=0$ 有如 (4.11) 一样的稳定性. 在临界参数值 $\alpha=0$ 不动点不稳定. (4.12) 的二次迭代的分析揭示它在 $\alpha<0$ 时有一个不稳定的周期 2 环, 此环在 $\alpha=0$ 处消失. 高阶项并不影响分支图.

**注** 类似于 Antronov-Hopf 分支, 系统 (4.11) 中的翻转分支称为*超临界*或者"*软*" 的, 系统 (4.12) 中的翻转分支称之为*亚临界*或者 "*硬*" 的. 分支类型由不动点在临界参数值的稳定性确定.

◇

## 4.5　一般翻转分支

**定理 4.3**　考虑一维系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

光滑函数 $f$ 对所有 $\alpha$ 和 $x_0 = 0$ 满足 $f(x_0,\alpha) = x_0$, 令 $\mu = f_x(0,0) = -1$. 假设下面的非退化条件满足:

(B. 1) $\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0,0,0) \neq 0$;

(B. 2) $f_{x\alpha}(0,0) \neq 0$.

则存在光滑的坐标与参数的可逆变换将系统变为

$$\eta \mapsto -(1+\beta)\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4).$$

**证明**　映射 $f$ 可以写为

$$f(x,\alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4), \tag{4.13}$$

其中 $f_1(\alpha) = -[1+g(\alpha)]$, $g$ 为某个光滑函数. 因为 $g(0) = 0$, 且按照假设 (B. 2),

$$g'(0) = f_{x\alpha}(0,0) \neq 0,$$

函数 $g$ 局部可逆, 且可用作引入的新参数

$$\beta = g(\alpha).$$

映射 (4.13) 现在取形式

$$\tilde{x} = \mu(\beta)x + \alpha(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4),$$

这里 $\mu(\beta) = -1(1+\beta)$, 函数 $a(\beta)$ 和 $b(\beta)$ 光滑. 有

$$a(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0), \quad b(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0).$$

执行光滑坐标变换

$$x = y + \delta y^2, \tag{4.14}$$

其中 $\delta = \delta(\beta)$ 是待定的光滑函数. 变换 (4.14) 在原点的某个邻域内可逆, 它的逆可以用待定系数法求得

$$y = x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4). \tag{4.15}$$

利用 (4.14) 和 (4.15) 得到

$$\tilde{y} = \mu y + (a + \delta\mu - \delta\mu^2)y^2 + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(\delta\mu + a) + 2\delta^2\mu^3)y^3 + O(y^4).$$

由此, 对所有充分小 $|\beta|$, 令

$$\delta(\beta) = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)},$$

就可以 "去除掉" 二次项. 由于 $\mu^2(0) - \mu(0) = 2 \neq 0$, 这是可以办到的. 这就给出

$$\tilde{y} = \mu y + \left(b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu}\right) y^3 + O(y^4) = -(1+\beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4),$$

其中某个光滑函数 $c(\beta)$, 满足

$$c(0) = a^2(0) + b(0) = \frac{1}{4}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0). \tag{4.16}$$

注意, 由假设 (B. 1) 知 $c(0) \neq 0$.

应用重尺度化

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{|c(\beta)|}}.$$

在新的坐标 $\eta$ 下, 系统取所期望的形式

$$\tilde{\eta} \mapsto -(1+\beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4),$$

其中 $s = \operatorname{sign} c(0) = \pm 1$. □

应用引理 4.2, 得到下面的一般性结果.

**定理 4.4**(翻转分支的拓扑规范形) *任何一个一般的单参数纯量系统*

$$x \mapsto f(x, \alpha),$$

*假定它在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x_0$, 乘子 $\mu = f_x(0,0) = -1$, 则该系统在原点附近拓扑等价于下面规范形之一:*

$$\eta \mapsto -(1+\beta)\eta \pm \eta^3.$$ □

**注** 当然, 定理 4.4 中的一般性条件就是定理 4.2 中的非退化条件 (B. 1) 和横截性条件 (B. 2). ◇

**例 4.2**(Ricker 方程) 下面考虑一个单种群模型 (Ricker, 1954):

$$x_{k+1} = \alpha x_k \mathrm{e}^{-x_k},$$

其中 $x_k$ 是种群在 $k$ 年的密度, $\alpha > 0$ 是种群增长率. 右端函数顾及到在高密度种群内部竞争的负作用. 上面的递推关系对应于离散–时间动力系统

$$x \mapsto \alpha x e^{-x} \equiv f(x, \alpha). \tag{4.17}$$

系统 (4.17) 对所有的参数值 $\alpha$ 有平凡的不动点 $x_0 = 0$. 但是, 在 $\alpha_0 = 1$, 出现非平凡正不动点

$$x_1(\alpha) = \ln \alpha.$$

这个不动点的乘子由表达式

$$\mu(\alpha) = 1 - \ln \alpha$$

给出. 因此, $1 < \alpha < \alpha_1$ 时, $x_1$ 稳定, $\alpha > \alpha_1$ 时, $x_1$ 不稳定. 这里 $\alpha_1 = e^2 = 7.38907\cdots$. 在这个临界参数值 $\alpha = \alpha_1$, 不动点有乘子 $\mu(\alpha_1) = -1$. 因此翻转分支产生. 为应用定理 4.4, 需要验证对应的非退化条件, 其中所有的导数都必须在不动点 $x_1(\alpha_1) = 2$ 和在临界参数值 $\alpha_1$ 处计算.

可以验证

$$c(0) = \frac{1}{6} > 0, \quad f_{x\alpha} = -\frac{1}{e^2} \neq 0.$$

因此, 当 $\alpha > \alpha_1$ 时, 从 $x_1$ 产生唯一且稳定的周期 2 环分支.

这个周期 2 环的命运可以进一步跟踪. 可以数值证实 (见练习 4), 这个环在 $\alpha_2 = 12.50925\cdots$ 由于翻转分支而失去稳定性, 导致产生一个稳定的周期 4 环. 它又在 $\alpha_4 = 14.24425\cdots$ 产生一个稳定的周期 8 环, 而它又在 $\alpha_8 = 14.65267\cdots$ 失去稳定性. 接下来的倍周期发生在 $\alpha_{16} = 14.74212\cdots$(图 4.8 给出了几个倍周期).

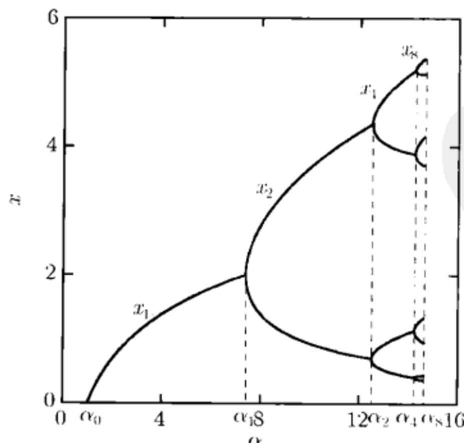



图 4.8　Ricker 方程中的倍–周期 (翻转) 分支的瀑布 (级联)

很自然, 假设存在一个分支值的*无穷序列*: $\alpha_{m(k)}, m(k)=2^k, k=1,2,\cdots (m(k)$ 是 $k$ 倍前一个环的周期). 进一步可以验证, 至少这个序列前面几个元素接近于等**比级数**. 事实上, 当 $k$ 增加时, 商

$$\frac{\alpha_{m(k)}-\alpha_{m(k-1)}}{\alpha_{m(k+1)}-\alpha_{m(k)}}$$

趋于 $\mu_F=4.6692\cdots$. 这个现象称为倍周期的 Feigenbaum *级联*, 常数 $\mu_F$ 就称为 Feigenbaum *常数*. 最奇怪的事实是许多具有翻转分支级联的不同系统的这个常数是相同的. 这个普适性有其深刻意义, 这一章的附录 A 中再讨论. ◇

## 4.6 Neimark-Sacker 分支的"规范形"

考虑下面的依赖于一个参数的二维离散-时间系统

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\alpha)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2+x_2^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

其中 $\alpha$ 是参数; $\theta=\theta(\alpha), b=b(\alpha)$ 和 $d=d(\alpha)$ 是光滑函数; $0<\theta(0)<\pi, d(0)\neq 0$.

这个系统对所有 $\alpha$ 有不动点 $x_1=x_2=0$, 其 Jacobi 矩阵

$$A=(1+\alpha)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

这个矩阵有特征值 $\mu_{1,2}=(1+\alpha)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$, 使得对所有小 $|\alpha|$, 在原点附近映射 (4.18) 可逆. 如所看到的, 由于这对复特征值在单位圆上, 当 $\alpha=0$ 时这个在原点的不动点是非双曲的. 为了分析对应的分支, 引入复变量

$$z=x_1+\mathrm{i}x_2, \quad \bar{z}=x_1-\mathrm{i}x_2, \quad |z|^2=z\bar{z}=x_1^2+x_2^2,$$

并令 $d_1=d+\mathrm{i}b$. 于是, 这个方程化为对 $z$ 的方程

$$z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z(1+\alpha+d_1|z|^2)=\mu z+c_1 z|z|^2,$$

其中 $\mu=\mu(\alpha)=(1+\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\alpha)}$, 以及 $c_1=c_1(\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\alpha)}d_1(\alpha)$ 是参数 $\alpha$ 的复函数.

应用表达式 $z=\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 得到关于 $\rho=|z|$ 的映射

$$\rho\mapsto\rho[1+\alpha+d_1(\alpha)\rho^2].$$

由于

$$
\begin{aligned}
[1+\alpha+d_1(\alpha)\rho^2] &= (1+\alpha)\left(1+\frac{2d(\alpha)}{1+\alpha}\rho^2+\frac{|d_1(\alpha)|^2}{(1+\alpha)^2}\rho^4\right)^{1/2} \\
&= 1+\alpha+d(\alpha)\rho^2+O(\rho^4),
\end{aligned}
$$

得到系统 (4.8) 的下面的极坐标形式

$$
\begin{cases}
\rho \mapsto \rho(1+\alpha+d(\alpha)\rho^2)+\rho^4 R_\alpha(\rho), \\
\varphi \mapsto \varphi+\theta(\alpha)+\rho^2 Q_\alpha(\rho),
\end{cases} \tag{4.19}
$$

$R$ 和 $Q$ 是 $(\rho,\alpha)$ 的光滑函数. 当 $\alpha$ 穿过零时, 系统相图的分支用后面这个形式的方程容易被分析, 因为映射 $\rho$ 关于 $\varphi$ 是独立的. (4.19) 的第一个方程定义了一个一维动力系统, 对所有 $\alpha$, 它有不动点 $\rho=0$. 当 $\alpha<0$ 时, 它是线性稳定, 当 $\alpha>0$ 时, 它变成线性不稳定. 这个点在 $\alpha=0$ 时的稳定性由系数 $d(0)$ 的符号所决定. 假设 $d(0)<0$, 则原点当 $\alpha=0$ 时 (非线性) 稳定. 此外, (4.19) 中的 $\rho$ 映射还有另外的 $\alpha>0$ 时的稳定不动点

$$
\rho_0(\alpha)=\sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}}+O(\alpha).
$$

(4.19) 中的 $\varphi$ 映射刻画一个依赖于 $\rho$ 与 $\alpha$ 的旋转角度, 它近似等于 $\theta(\alpha)$. 因此, 由 (4.19) 定义的两个映射的叠加, 就得到原来的二维系统 (4.18) 的分支图 (见图 4.9).

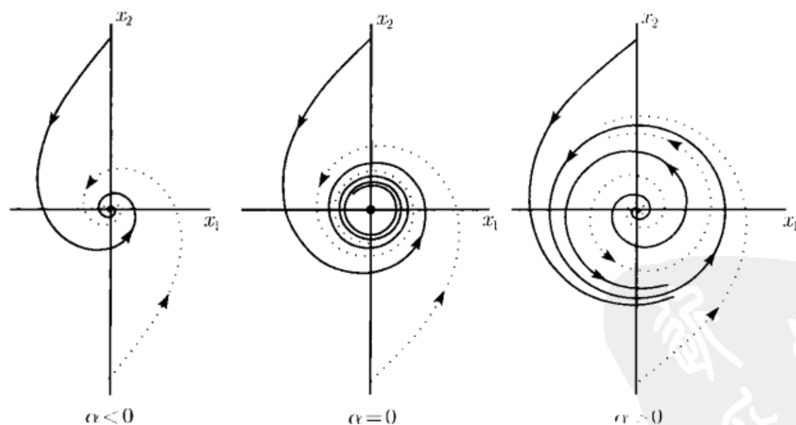



图 4.9　超临界 Neimark-Sacker 分支

这个系统永远有在原点的不动点. $\alpha<0$ 时稳定, $\alpha>0$ 时不稳定. 系统在原点附近的不变曲线, 当 $\alpha<0$ 时看上去像连续–时间系统稳定焦点附近的轨道, $\alpha>0$ 时像不稳定焦点附近的轨道. 在临界参数值 $\alpha=0$ 这个点非线性稳定. 当 $\alpha>0$ 时这点被一条唯一且稳定的孤立闭不变曲线所围绕. 这条曲线是半径为 $\rho_0(\alpha)$ 的圆

周. 所有其他从这闭不变曲线的内外出发的轨道除原点以外在 (4.19) 的迭代下都趋于这条曲线. 这是 Neimark-Sacker 分支.

这种分支也可以在 $(x_1, x_2, \alpha)$ 空间中叙述. 所出现的由 $\alpha$ 参数化的闭不变曲线族构成一个*抛物面*.

$d(0) > 0$ 的情形可以用同样方法分析. 这个系统在 $\alpha = 0$ 产生 Neimark-Sacker 分支. 与上面考虑的情形相反, 存在一条*不稳定*闭不变曲线, 当 $\alpha$ 从负到正穿过零时消失 (图 4.10).

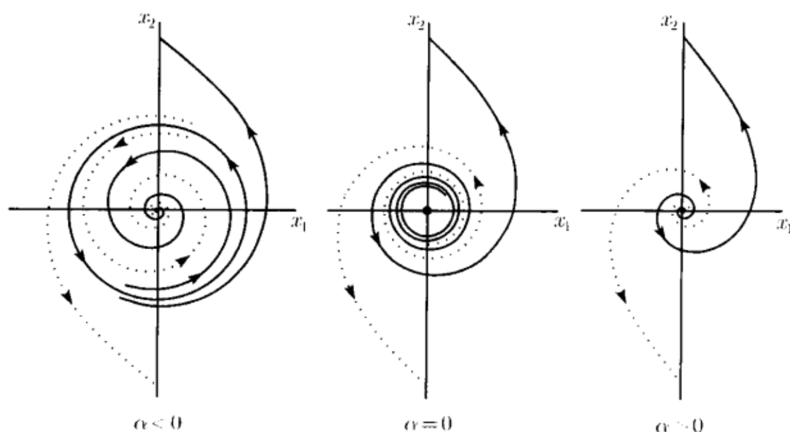



图 4.10　亚临界 Neimark-Sacker 分支

**注**　(1) 如同 Andronov-Hopf 分支和翻转分支, 这两种情形通常称为*超临界*和*亚临界*(或者, 好一点,"*软*" 和 "*硬*") Neimark-Sacker 分支. 通常, 分支的类型由不动点在分支参数值的稳定性所确定.

(2) (4.19) 在不变圆周上的轨道结构依赖于旋转角 $\Delta\varphi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ 和 $2\pi$ 之比在圆周上是有理数还是无理数. 若是有理数, 则所有在这曲线上的轨道是周期的. 更精确地说, 若

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q},$$

$p$ 和 $q$ 是整数, 则曲线上的所有点是映射 $p$ 次迭代的周期为 $q$ 的环. 若这个比是无理数, 则没有周期轨道且所有轨道在这个圆周上稠密. ◇

现在, 在系统 (4.18) 中加入高阶项, 例如, 考虑系统

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\alpha)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4). \quad (4.20)$$

这里, 项 $O(\|x\|^4)$ 可光滑依赖于 $\alpha$. 遗憾的是, 不能够说系统 (4.20) 局部拓扑等价于系统 (4.18). 在此情形, 高阶项影响系统的分支性态. 如果把 (4.20) 写为极坐标形式, 现在关于 $\rho$ 的映射依赖于 $\varphi$. 这个系统可以表示为类似于 (4.19), 但 $R$ 与 $Q$ 是 $2\pi$ 周期函数. 尽管如此, 系统 (4.18) 和 (4.20) 的相图具有某些重要的共同特性. 也就是说, 下面的引理成立.

**引理 4.3**　项 $O(\|x\|^4)$ 并不影响 (4.20) 中的闭不变曲线分支. 也就是说, 从原点分支出的局部唯一的不变曲线, 与系统 (4.18) 的有相同的方向以及相同的稳定性. □

这个引理的证明有点困难, 我们在附录 A 给出. 证明的几何思想是简单的. 我们期望映射 (4.20) 在映射 (4.18) 的不变圆周附近有不变曲线. 固定 $\alpha$ 并考虑圆周

$$S_0 = \left\{(\rho, \varphi) : \rho = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}}\right\},$$

它位于没有项 $O(\|x\|^4)$ 的 "未被扰动" 映射的不变圆周附近. 可以证明, 逐次迭代 $F^k S_0, k = 1, 2, \cdots$, 其中, $F$ 是由 (4.20) 定义的映射, 收敛于闭不变曲线

$$S_\infty = \{(\rho, \varphi) : \rho = \Psi(\varphi)\},$$

它不是圆周但接近于 $S_0$. 这里的 $\Psi$ 是在极坐标下刻画 $S_\infty$ 的 $\varphi$ 的 $2\pi$ 周期函数. 为建立收敛性, 必须在围绕 $S_0$ 的带子 (它的直径和宽度随 $\alpha \to 0$ 都 "收缩") 内引入 "径向" 变量 $u$, 并证明映射 $F$ 在 $2\pi$ 周期函数 $u = u(\varphi)$ 适当的函数空间内定义了一个*压缩映射*$\mathcal{F}$. 于是, 由压缩映射原理 (见第 1 章), 存在 $\mathcal{F}$ 的不动点 $u^{(\infty)}$: $\mathcal{F}(u^{(\infty)}) = u^{(\infty)}$. 对固定 $\alpha$, 周期函数 $u^{(\infty)}(\varphi)$ 代表的闭不变曲线 $S_\infty$ 就是我们要找的. 本质上, $S_\infty$ 在带内的唯一性与稳定性由压缩性得知. 可以验证在带外不存在 (4.20) 的非平凡不变集.

**注**　当参数改变时 (1) 系统 (4.18) 和 (4.20) 在闭不变曲线上的轨道结构以及这个结构的变化一般是不相同的. 第 7 章将回到对不变曲线上的分支分析. 在这里仅仅指出, 一般地, 在闭不变曲线上只存在*有限个*周期轨道. 设 $a(0) < 0$, 则映射 (4.20) 的某个 $p$ 次迭代可以有两类 $q$ 周期轨道: 全稳定 $q$ 周期的 "结点" 环和 $q$ 周期的鞍点环 (见图 4.11). 通过折分支时, 环存在于某 "参数窗口", 而消失于它的边界. 对应不同窗口, 一般系统具有无穷多个这样的分支.

(2) 在 (4.20) 中分支出的不变闭曲线有*有限次*光滑性: 函数 $\Psi(\varphi)$ 在极坐标下关于 $\varphi$ 一般只有有限次连续导数, 即使映射 (4.20) 无穷多次可微. 光滑性次数随着 $|\alpha| \to 0$ 而增加. 当鞍点的不稳定 (稳定) 流形遇到 "结点" 时出现不光滑性. ◇

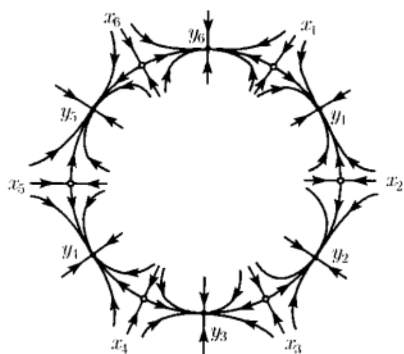



图 4.11　在不变圆周上的鞍点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$ 和稳定的周期 6 轨道 $\{y_1, y_2, \cdots, y_6\}$

## 4.7　一般 Neimark-Saker 分支

现在证明, 任何一个具有 Neimark-Sacker 分支的一般二维系统都可变换成 (4.20) 的形式.

考虑系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

函数 $f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有不动点且具单特征值 $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$. 鉴于 $\mu = 1$ 不是 Jacobi 矩阵的特征值①, 对所有充分小 $|\alpha|$, 由隐函数定理, 在原点的某邻域内系统存在唯一不动点 $x_0(\alpha)$. 可以作依赖于参数的坐标平移, 将这个不动点移到原点. 因此, 不失一般性, 可以假设对充分小 $|\alpha|$, $x = 0$ 是这个系统的不动点. 由此, 系统可以写为

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{4.21}$$

这里 $F$ 是光滑向量函数, 其分量 $F_{1,2}$ 关于 $x$ 有至少从二次项开始的 Taylor 展开, 对所有充分小 $|\alpha|$, $F(0, \alpha) = 0$. Jacobi 矩阵 $A(\alpha)$ 有两个乘子

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi(\alpha)},$$

这里 $r(0) = 1, \varphi(0) = \theta_0$. 因此, 对某光滑函数 $\beta(\alpha), \beta(0) = 0$, 有 $r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha)$. 假定 $\beta'(0) \neq 0$, 于是, 可用 $\beta$ 作为新参数, 并借助于 $\beta$ 表示乘子: $\mu_1(\beta) = \mu(\beta), \mu_2(\beta) = \bar{\mu}(\beta)$, 其中

$$\mu(\beta) = (1 + \beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)},$$

函数 $\theta(\beta)$ 光滑且满足 $\theta(0) = \theta_0$.

①由于 $\mu = 0$ 不是特征值, 系统对充分小 $|\alpha|$ 在原点某个邻域内可逆.

**引理 4.4**　利用引入复变量和新参数, 对所有充分小的 $|\alpha|$, 系统 (4.16) 可变成为形式

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta), \tag{4.22}$$

这里 $\beta \in \mathbb{R}^1, z \in \mathbb{C}^1, \mu(\beta) = (1+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}$, 以及 $g$ 是 $z, \bar{z}$ 和 $\beta$ 的复值光滑函数, 它关于 $(z, \bar{z})$ 的 Taylor 展开中包含二次项与高阶项

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geqslant 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l, \quad k, l = 0, 1, \cdots. \qquad \square$$

引理的证明完全类似于第 3 章的 Andronov-Hopf 分支分析, 留作练习.

如同 Andronov-Hopf 情形, 我们从作非线性(复) 坐标变换开始简化映射 (4.22). 首先移去所有的二次项.

**引理 4.5**　利用依赖于参数的可逆复坐标变换

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

对所有充分小 $|\beta|$, 将映射

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3) \tag{4.23}$$

化为没有二次项的映射

$$w \mapsto \mu w + O(|w|^3),$$

只要

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \neq 1 \quad 和 \quad \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0} \neq 1,$$

其中$\mu = \mu(\beta) = (1+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\theta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$.

**证明**　变换的逆是

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

因此, 在新坐标 $w$ 下, 映射 (4.23) 取形式

$$\begin{aligned} \tilde{w} = &\mu w + \frac{1}{2}(g_{20} + (\mu - \mu^2) h_{20}) w^2 + (g_{11} + (\mu - |\mu|^2 h_{11}) w \bar{w} \\ &+ \frac{1}{2}(g_{02} + (\mu - \bar{\mu}^2) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3). \end{aligned}$$

由此, 若令

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu^2 - \mu}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{|\mu|^2 - \mu}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu},$$

就“去掉”了 (4.23) 中的所有二次项. 若对所有充分小的 $|\beta|$ 包括 $\beta=0$, 所有分母都不为零, 则这些变换生效. 事实上, 由于对 $\theta_0$ 的限制, 有

$$\mu^2(0)-\mu(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}-1)\neq 0,$$

$$|\mu(0)|^2-\mu(0)=1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\neq 0,$$

$$\bar{\mu}(0)^2-\mu(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta_0}-1)\neq 0. \qquad \square$$

**注**　(1) 设 $\mu_0=\mu(0)$. 则引理中关于 $\theta_0$ 的条件可以写为

$$\mu_0\neq 1,\quad \mu_0^3\neq 1.$$

注意, 由于对 $\theta_0$ 的最初假设, 上面第一个条件自动成立.

(2) 所得的变换是多项式变换, 多项式的系数光滑依赖于 $\beta$. 在原点的某个邻域内变换接近恒同.

(3) 注意, 变换改变了(4.23) 中三次项的系数. ◇

假定已经移去了所有二次项, 再尝试去除三次项.

**引理 4.6**　利用一个可逆的依赖于参数的坐标变换

$$z=w+\frac{h_{30}}{6}w^3+\frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w}+\frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2+\frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

对所有充分小 $|\beta|$, 将映射

$$z\mapsto \mu z+\frac{g_{30}}{6}+\frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z}+\frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2+\frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3+O(|z|^4) \tag{4.24}$$

变成为三次项只有一项的映射

$$w\mapsto \mu w+c_1w^2\bar{w}+O(|w|^4),$$

只要

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}\neq 1\quad 和\quad \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta_0}\neq 1,$$

这里 $\mu=\mu(\beta)=(1+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}$, $g_{ij}=g_{ij}(\beta)$.

**证明**　逆变换是

$$w=z-\frac{h_{30}}{6}z^3-\frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z}-\frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2-\frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3+O(|z|^4).$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{w}=&\lambda w+\frac{1}{6}(g_{30}+(\mu-\mu^3)h_{30})w^3+\frac{1}{2}(g_{21}+(\mu-\mu|\mu|^2)h_{21})w^2\bar{w}\\&+\frac{1}{2}(g_{12}+(\mu-\bar{\mu}|\mu|^2)h_{12})w\bar{w}^2+\frac{1}{6}(g_{03}+(\mu-\bar{\mu}^3)h_{03})\bar{w}^3+O(|w|^4).\end{aligned}$$

由此, 若令

$$h_{30}=\frac{g_{30}}{\mu^3-\mu},\quad h_{12}=\frac{g_{12}}{\bar{\mu}|\mu|^2-\mu},\quad h_{03}=\frac{g_{03}}{\bar{\mu}^3-\mu},$$

就可以在所得映射中消去除了 $w^2\bar{w}$ 项以外的所有三次项, 那个三次项必须分别处理. 由于对 $\theta_0$ 的假设, 对充分小 $|\beta|$, 所有分母都不为零, 故变换有效.

下面也可以尝试形式地令

$$h_{21}=\frac{g_{21}}{\mu(1-|\mu|^2)}$$

来消去项 $w^2\bar{w}$. 这对小 $\beta\neq 0$ 是可能的, 但是对所有 $\theta_0$ 分母在 $\beta=0$ 为零. 于是, 没有 $\theta_0$ 的额外条件可以帮忙. 为得到光滑依赖于 $\beta$ 的变换, 令 $h_{21}=0$, 得

$$c_1=\frac{g_{21}}{2}.$$ □

**注**　(1) 引理中加在 $\theta_0$ 的条件意味着

$$\mu_0^2\neq 1,\quad \mu_0^4\neq 1,$$

因此, 特别, $\mu_0\neq -1$ 以及 $\mu_0\neq \mathrm{i}$. 由对 $\theta_0$ 的原始假设, 第一个条件自动满足.

(2) 剩下的三次项 $w^2\bar{w}$ 称为共振项. 这一项的系数与原来映射 (4.24) 中的三次项 $z^2\bar{z}$ 的系数是相同的. ◇

结合上面两个引理得

**引理 4.7** (Neimark-Sacker 分支的规范形)　映射

$$z\mapsto \mu z+\frac{g_{20}}{2}z^2+g_{11}z\bar{z}+\frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2+\frac{g_{30}}{6}z^3+\frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z}+\frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2+\frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3+O(|z|^4),$$

这里 $\mu=\mu(\beta)=(1+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}, g_{ij}=g_{ij}(\beta)$ 以及 $\theta_0=\theta(0)$, 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0}\neq 1, k=1,2,3,4$, 可以用一个可逆的光滑依赖于参数的复坐标变换

$$z=w+\frac{h_{20}}{2}w^2+h_{11}w\bar{w}+\frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2+\frac{h_{30}}{6}w^3+\frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2+\frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

对所有充分小 $|\beta|$, 将原来的映射变成三次项只含共振项的映射

$$w\mapsto \mu w+c_1w^2\bar{w}+O(|w|^4),$$

其中 $c_1=c_1(\beta)$. □.

上面两个引理中定义的变换的截断复合给出所要求的坐标变换. 首先, 消去所有的二次项. 这也改变三次项的系数, $w^2\bar{w}$ 的系数是 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$, 以代替 $\frac{1}{2}g_{21}$. 然后消去

除了共振项以外的所有三次项. 这一项的系数仍是 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$. 因此, 所有所需要的是借助于所给的方程计算 $c_1$ 的系数, 它是经过二次变换后 $w^2\bar{w}$ 项的新系数 $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$. 对 $c_1(\alpha)$ 计算结果得下面的表达式

$$c_1=\frac{g_{20}g_{11}(\bar{\mu}-3+2\mu)}{2(\mu^2-\mu)(\bar{\mu}-1)}+\frac{|g_{11}|^2}{1-\bar{\mu}}+\frac{|g_{02}|^2}{2(\mu^2-\bar{\mu})}+\frac{g_{21}}{2}, \tag{4.25}$$

由此给出 $c_1$ 的临界值

$$c_1(0)=\frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1-2\mu_0)}{2(\mu_0^2-\mu_0)}+\frac{|g_{11}(0)|^2}{1-\bar{\mu}_0}+\frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mu_0^2-\bar{\mu}_0)}+\frac{g_{21}(0)}{2}, \tag{4.26}$$

这里 $\mu_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$.

现在将所得的结果总结成下面的定理.

**定理 4.5** 假设二维离散–时间系统

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, 对所有充分小 $|\alpha|$, 它有平衡点 $x=0$, 具乘子

$$\mu_{1,2}(\alpha)=r(\alpha)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi(\alpha)},$$

其中 $r(0)=1,\varphi(0)=\theta_0$.

设下面的条件满足:

(C.1) $r'(0)\neq 0$;

(C.2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0}\neq 1$, 对 $k=1,2,3,4$.

则存在光滑可逆的坐标与参数变换将上述系统变成

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\mapsto&(1+\beta)\begin{pmatrix}\cos\theta(\beta)&-\sin\theta(\beta)\\\sin\theta(\beta)&\cos\theta(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\\&+(y_1^2+y_2^2)\begin{pmatrix}\cos\theta(\beta)&-\sin\theta(\beta)\\\sin\theta(\beta)&\cos\theta(\beta)\end{pmatrix}\\&\cdot\begin{pmatrix}d(\beta)&-b(\beta)\\b(\beta)&d(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+O(||y||^4),\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $\theta(0)=\theta_0$, 和 $d(0)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}c_1(0))$, 这里, $c_1(0)$ 由公式 (4.26) 给出.

**证明** 剩下的只需验证关于 $d(0)$ 的公式. 事实上, 由引理 4.4~ 引理 4.7, 系统可以变成复 Poincaré 规范形

$$w\mapsto\mu(\beta)w+c_1(\beta)w|w|^2+O(|w|^4),$$

其中 $\mu(\beta) = (1+\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}$. 这个映射可以写为

$$w \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}(1+\beta+d_1(\beta)|w|^2)w + O(|w|^4),$$

这里 $d_1(\beta) = d(\beta) + \mathrm{i}b(\beta)$, 对某实函数 $d(\beta), b(\beta)$. 回到实坐标 $(y_1, y_2), w = y_1 + \mathrm{i}y_2$, 给出系统 (4.27). 最后,

$$d(\beta) = \mathrm{Re}d_1(\beta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\beta)}c_1(\beta)).$$

由此

$$d(0) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}c_1(0)).$$ □

利用引理 4.3, 可以叙述为下面的一般结果.

**定理 4.6** (一般 Neimark-Saker 分支)　*任何一个一般的单参数二维系统*

$$x \mapsto f(x, \alpha),$$

*假设它在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x_0 = 0$, 具复乘子 $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0}$, 则存在 $x_0$ 的邻域, 在此邻域内, 当 $\alpha$ 穿过零时, 从 $x_0$ 分支出唯一闭不变曲线.* □

**注**　定理中假设的一般性条件是定理 4.5 中的横截性条件 (C.1) 和非退化条件 (C.2), 以及额外的非退化条件

(C.3)　$d(0) \neq 0$.

应该强调的是条件 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0} \neq 1$, 对 $k = 1, 2, 3, 4$ 不仅仅是技术方面的. 如果它们不满足, 闭不变曲线甚至可以不出现, 或者可能从不动点分支出几条不变曲线 (见第 9 章) ◇

系数 $d(0)$ 确定具有 Neimark-Sacker 分支的一般系统出现不变曲线的方向. 它可以从下面的公式计算

$$d(0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}g_{21}}{2}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}}{2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})}g_{20}g_{21}\right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2. \quad (4.28)$$

在第 5 章将看到如何处理 $n$ 维离散–时间动力系统, $n > 2$, 以及如何应用这些结果到连续–时间系统中的极限环分支.

**例 4.3**(时滞逻辑方程中的 Neimark-Sacker 分支)　考虑下面的递归方程

$$u_{k+1} = ru_k(1 - u_{k-1}).$$

这是一个单种群动力学模型, 其中 $u_k$ 表示种群在时间 $k$ 时的密度, $r$ 是增长率. 假定增长率不仅由流动种群密度, 而且也由种群过去的密度所确定.

如果引入 $v_k = u_{k-1}$, 则方程可写为

$$\begin{cases} u_{k+1} = ru_k(1-v_k), \\ v_{k+1} = v_k, \end{cases}$$

它们依次定义了一个二维离散时间动力系统

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx_1(1-x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x,r) \\ F_2(x,r) \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

这里 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$. 映射 (4.29) 对所有 $r$ 值, 有不动点 $(0,0)^{\mathrm{T}}$. 对 $r > 1$, 出现非平凡不动点 $x^0$, 其坐标为

$$x_1^0(r) = x_2^0(r) = 1 - \frac{1}{r}.$$

映射 (2.29) 在这个非平凡不动点的 Jacobi 矩阵为

$$A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它有特征值

$$\mu_{1,2}(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}.$$

如果 $r > \frac{5}{4}$, 则特征值是复的, 且 $|\mu_{1,2}|^2 = \mu_1\mu_2 = r - 1$. 因此, 在 $r = r_0 = 2$ 非平凡不动点失去稳定性, 有 Neimark-Sacker 分支: 临界乘子是

$$\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

显然, 条件 (C.1) 和 (C.2) 满足.

为验证非退化条件 (C.3), 必须计算 $a(0)$. 临界 Jacobi 矩阵 $A_0 = A(r_0)$ 有特征向量

$$A_0 q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} q, \quad A_0^{\mathrm{T}} p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} p,$$

其中

$$q \sim \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \quad p \sim \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}.$$

为了达到标准化 $\langle p, q\rangle = 1$, 例如, 取

$$q = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \quad p = \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{\mathrm{T}}.$$

现在构造 $x = x^0 + zq + \bar{z}\,\bar{q}$, 并计算函数

$$H(z, \bar{z}) = \langle p, F(x^0 + zq + \bar{z}\,\bar{q}, r_0) - x^0 \rangle.$$

计算它在 $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 的 Taylor 展开:

$$H(z, \bar{z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} z + \sum_{2 \leqslant j+k \leqslant 3} \frac{1}{j!k!} g_{j\ k} z^j \bar{z}^k + O(|z|^4),$$

给出

$$g_{20} = -2 + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{11} = \mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{02} = 2 + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{21} = 0,$$

于是可以求得临界实部

$$d(0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} g_{21}}{2}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{(1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}}{2(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})} g_{20} g_{11}\right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2 = -2 < 0.$$

因此, 当 $r > 2$ 时, 从非平凡不动点分支出唯一稳定的闭不变曲线 (见图 4.12).　◇

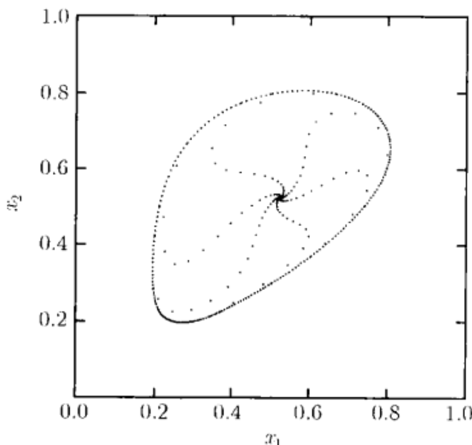



图 4.12　时滞逻辑方程中的稳定不变曲线

## 4.8　练　　习

1. 证明: 映射 (4.1) 和 (4.13) 在 $x = 0$ 的小邻域内, 不动点和周期轨道的个数和稳定性与高阶项无关, 只要 $|\alpha|$ 充分小. 提示: 应用渐近稳定性论述, 证明不存在长周期环.

2. 证明: 翻转分支规范形 (4.16) 中的系数 $c$ 可以借助映射的二次迭代来计算:

$$c = -\frac{1}{12} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f_\alpha^2(x)\bigg|_{(x,\alpha)=(0,0)},$$

这里 $f_\alpha(x) = f(x,\alpha)$. 提示：考虑到 $f_x(0,0) = -1$.

3. (逻辑映射) 考虑下面依赖于一个参数 $\alpha$ 的映射 (May, 1974)：

$$f_\alpha(x) = \alpha x(1-x).$$

(a) 求证：当 $\alpha_1 = 3$ 时, 此映射有翻转分支, 即 $f_\alpha$ 的稳定不动点变成不稳定, 当 $\alpha > 3$ 时, 一个稳定的周期 2 环从此点分支出. 提示：用练习 2 的公式.

(b) 证明：在 $\alpha_0 = 1+\sqrt{8}$, 这个逻辑映射有折分支, 当 $\alpha$ 增加时它产生一个稳定和一个不稳定周期 3 环.

4. (Ricker 模型中第二个倍周期) 验证 Ricker 映射 (4.17) 第二个倍周期发生在 $\alpha_2 = 12.50925\cdots$. 提示：引入 $y = \alpha x e^{-x}$, 并把系统写为三个未知量 $(x, y, \alpha)$ 的三个方程, 它确定了一个周期 2 环 $\{x, y\}$, 具乘子 $\mu = -1$. 利用标准常规工具之一 Newton 法 (见第 10 章), 从某个适当的初始值开始数值求解这个系统.

5. (重温 Hénon 映射) 证明：由 Henon(1976) 引入的原来映射

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1+Y-aX^2 \\ bX \end{pmatrix},$$

可以用坐标和参数的线性变换变成映射 (4.1).

6. 推导 Neimark-Sacker 分支的 $c_1(0)$ 的公式 (4.26).

7. (离散时间捕食–被捕食模型) 考虑下面的离散–时间系统 (Maynard Smith, 1968)：

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k(1-x_k) - x_k y_k, \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{\beta} x_k y_k. \end{cases}$$

这是 Voltera 模型的离散–时间形式. 这里 $x_k$ 和 $y_k$ 分别是被捕食者与捕食者在 $k$ 年 (代) 的数目. 并假定没有被捕食者的情况下捕食者绝灭于一代.

(a) 求证此映射的非平凡不动点在 $(\alpha,\beta)$ 平面内的一条曲线上产生 Neimark-Sacker 分支, 并计算闭不变曲线的分支方向.

(b) 猜测当参数值不在分支曲线上时闭不变曲线会发生什么情况.

## 4.9　附录 A：Feigenbaum 普适性

正如前面指出的, 许多一维的依赖于参数的动力系统

$$x \mapsto f_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{A.1}$$

具有无穷多个倍周期级联. 此外, 对应的翻转分支参数值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots$ 构成 (渐近地) 一个几何数列：

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \to \mu_F, \quad \text{当 } i \to \infty \text{ 时},$$

这里 $\mu_F = 4.6692\cdots$ 是一个与系统无关 (普适) 的常数. 序列 $\{\alpha_i\}$ 有极限 $\alpha_\infty$. 在 $\alpha_\infty$ 系统动力学变成 "混沌", 因为它的轨道变得是不规则. 非周期的序列.

这个现象第一次解释是对特殊的不可逆动力系统 (A. 1), 对所有参数值这个系统属于某个类 $\mathcal{Y}$, 就是说, 这个类的系统

$$x \mapsto f(x) \tag{A.2}$$

满足下列条件:

(1) $f(x)$ 是光滑偶函数, $f: [-1, 1] \to [-1, 1]$;

(2) $f'(0) = 0$, $x = 0$ 是唯一的极大点, $f(0) = 1$;

(3) $f(1) = -a < 0$;

(4) $b = f(a) > a$;

(5) $f(b) = f^2(a) < a$,

这里 $a$ 和 $b$ 是正数 (见图 4.13). 函数 $f_\alpha(x) = 1 - \alpha x^2$ 对 $\alpha > 1$ 是属于这个类的.

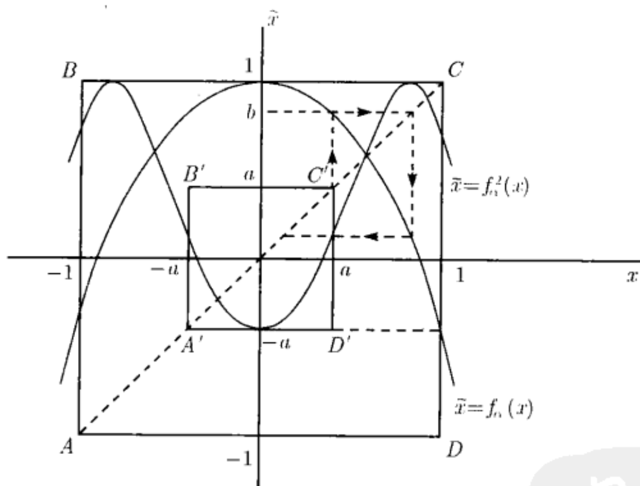



图 4.13　满足条件 (1)~(5) 的映射以及它的二次迭代

考虑满足条件 (1)~(5) 的映射的二次迭代 $f_\alpha^2$. 在正方形 $A'B'C'D'$ 内 (见图 4.13), $f_\alpha^2$ 的图经坐标扩大和改变符号, 看上去类似于 $f_\alpha$ 在单位正方形 $ABCD$ 内的图. 例如, 若 $f_\alpha(x) = 1 - \alpha x^2$, 则 $f_\alpha^2(x) = (1 - \alpha) + 2\alpha^2 x^2 + \cdots$. 这个观察导致我们在 $\mathcal{Y}$ 中引入一个定义在函数上的映射

$$(Tf)(x) = -\frac{1}{a} f(f(-ax)), \tag{A.3}$$

其中 $a = -f(1)$. 注意, $a$ 是依赖于 $f$ 的.

**定义 4.4** 映射 $T$ 称为二重算子.

可以验证, 映射 (A. 3) 将函数 $f \in \mathcal{Y}$ 映为某个函数 $Tf \in \mathcal{Y}$. 因此, 可以考虑离散-时间动力系统$\{\mathbb{Z}_+, \mathcal{Y}, T^k\}$, 这是一个以函数空间 $\mathcal{Y}$ 为状态空间的无穷维动力系统. 此外, 这个二重算子一般是不可逆的. 由此, 必须仅考虑 $T$ 的正迭代.

下面将叙述几个不给证明的定理. 借助计算机和精细的误差估计的帮助, 这些定理已被证明.

**定理 4.7**(不动点存在性) 由 (A. 3) 定义的映射 $T: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, 有不动点 $\varphi \in \mathcal{Y}$: $T\varphi = \varphi$. □

已经找到

$$\varphi(x) = 1 - 1.52763\cdots x^2 + 0.104815\cdots x^4 + 0.0267057\cdots x^6 + \cdots$$

第 10 章的练习 1 将讨论如何得到 $\varphi(x)$ 的某些近似.

**定理 4.8**(不动点的鞍点性质) 二重算子 $T$ 在它的不动点 $\varphi$ 处的线性部分 $L$ 只有一个特征值 $\mu_F = 4.6692\cdots$, 满足 $|\mu_F| > 1$. $L$ 的剩余谱严格地位于单位圆内. □

$L$ 的 "线性部分" 和 "谱" 等的术语是 Jacobi 矩阵和特征值在无穷维情形中的推广. 有兴趣的读者可以在标准的泛函分析教科书中找到严格的定义.

定理 4.7 和定理 4.8 表明系统 $\{\mathbb{Z}_+, \mathcal{Y}, T^k\}$ 有鞍点不动点. 这个不动点 $\varphi$(这是个函数, 二重算子将它映为它自身) 有余维一稳定不变流形 $W^s(\varphi)$ 和一维不稳定不变流形 $W^u(\varphi)$. 稳定流形是由函数 $f \in \mathcal{Y}$ 组成, 在 $T$ 的迭代下它变得越来越像 $\varphi$. 不稳定流形是由那些在 $T$ 作用下它们所有的前象保持接近于 $\varphi$ 的函数所构成. 这是函数空间 $\mathcal{Y}$ 中的一条曲线 (图 4.14 描绘了这个流形的结构).

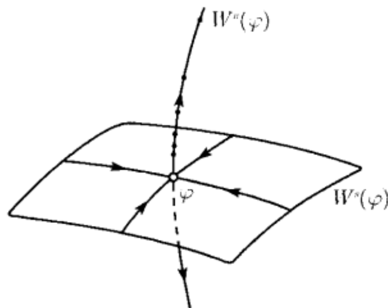



图 4.14 不动点 $\varphi$ 的稳定和不稳定流形

注意, 映射 $Tf$ 与 $f^2$ 是拓扑等价的 (有关的同胚是简单的伸缩, 见 (A. 3)). 因此, 若 $Tf$ 有周期 $N$ 的周期轨道, 则 $f^2$ 有相同周期的周期轨道, 从而 $f$ 有 $2N$ 周期的周期轨道. 这一简单的观察在下面起着中心作用. 考虑 $\mathcal{Y}$ 中所有映射, 它们的

不动点具乘子 $\mu = -1$. 这些映射构成了一个余维一流形 $\Sigma \subset \mathcal{Y}$. 借助计算机的帮助, 也得到下面的结果.

**定理 4.9**(流形相交性)　*流形 $\Sigma$ 与不稳定流形 $W^u(\varphi)$ 横截相交.* □

与有限维鞍点类似, 显然前象 $T^{-k}\Sigma$ 当 $k \to \infty$ 时凝聚在 $W^s(\varphi)$ 上 (见图 4.15). 考虑到前面的观察可以得知, $T^{-1}\Sigma$ 是由具乘子 $-1$ 的周期 2 环的映射所组成, $T^{-2}\Sigma$ 是由具乘子 $-1$ 的周期 4 环所组成, 等等. 任何一个从所考虑类中的一般单参数动力系统 $f_\alpha$ 对应于 $\mathcal{Y}$ 中的曲线 $\Lambda$. 如果这条曲线充分接近于 $W^u(\varphi)$, 它将与所有的前象 $T^{-k}\Sigma$ 相交. 交点定义了一个对应于倍周期瀑布的分支参数值序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$. 这个序列的渐近性显然由不稳定特征值 $\mu_F$ 所确定. 事实上, 设 $\xi$ 是沿 $W^u(\varphi)$ 的坐标, $\xi_k$ 表示 $W^u(\varphi)$ 与 $T^{-k}\Sigma$ 的交点坐标. 二重算子在不稳定流形上的限制有形式

$$\xi \mapsto \mu_F \xi + O(\xi^2),$$

它是可逆的, 其逆为

$$\xi \mapsto \frac{1}{\mu_F}\xi + O(\xi^2).$$

由于

$$\xi_{k+1} = \frac{1}{\mu_F}\xi_k + O(\xi_k^2),$$

如同在曲线 $\Lambda$ 上分支参数值的序列一样, 有

$$\frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\xi_{k+1} - \xi_k} \to \mu_F, \quad 当\ k \to \infty\ 时.$$

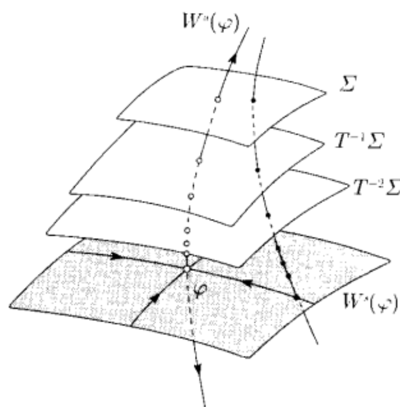



图 4.15　曲面 $\Sigma$ 的前象与不稳定流形 $W^u(\varphi)$ 相交

## 4.10　附录 B: 引理 4.3 的证明

在这个附录中证明下面的引理, 它是引理 4.3 的复模拟.

**引理 4.8**　映射

$$\tilde{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\alpha)} z(1 + \alpha + d_1(\alpha)|z|^2) + g(z, \tilde{z}, \alpha) \tag{B.1}$$

对充分小 $\alpha > 0$ 有稳定的闭不变曲线, 其中 $d_1(\alpha) = d(\alpha) + \mathrm{i}b(\alpha); b(\alpha), d(\alpha)$ 以及 $\theta(\alpha)$ 是光滑实值函数; $d(0) < 0, 0 < \theta(0) < \pi$, $g = O(|z|^4)$ 是 $z, \bar{z}, \alpha$ 的光滑复值函数.

**证明**　第一步 (重尺度化和平移). 首先, 由公式

$$z = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1 + s), \tag{B.2}$$

引入新变量 $(s, \varphi)$. 将 (B.2) 代入 (B.1) 得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + \theta(\alpha))}(1 + s)[1 - \alpha(2s + s^2) + \mathrm{i}\alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2] + \alpha^{\frac{3}{2}} h(s, \varphi, \alpha),$$

其中

$$\nu(\alpha) = -\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)},$$

$h$ 是 $(s, \varphi, \alpha^{\frac{1}{2}})$ 的光滑复值函数. 因此, 映射 (B. 1) 在 $(S, \varphi)$ 坐标下为

$$\begin{cases} \tilde{s} = (1 - 2\alpha)s - \alpha(3s^2 + s^3) + \alpha^{\frac{3}{2}} p(s, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} q(s, \varphi, \alpha), \end{cases} \tag{B.3}$$

这里的 $p, q$ 是 $(s, \varphi, \alpha^{\frac{1}{2}})$ 的光滑实值函数. 现在, 应用尺度化

$$s = \sqrt{\alpha}\xi, \tag{B.4}$$

经尺度化 (B. 4) 后, 映射 (B. 3) 取形式

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{\frac{3}{2}}(3\xi^2 + \alpha^{\frac{1}{2}}\xi^3) + \alpha p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + [\theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)] + \alpha^{\frac{3}{2}}\nu(\alpha)(2\xi + \alpha^{\frac{1}{2}}\xi^2) + \alpha^{\frac{3}{2}} q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \end{cases} \tag{B.5}$$

其中

$$p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = p(\alpha^{\frac{1}{2}}\xi, \varphi, \alpha), \quad q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = q(\alpha^{\frac{1}{2}}\xi, \varphi, \alpha)$$

是 $(\xi, \varphi, \alpha^{\frac{1}{2}})$ 的光滑函数. 记 $\omega(\alpha) = \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)$, 并注意 $p^{(1)}$ 可以写为

$$p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{\frac{1}{2}} r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha).$$

现在 (B. 5) 可以写为

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}} r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}} q^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha), \end{cases} \tag{B.6}$$

其中

$$r^{(2)}(\xi,\varphi,\alpha) = -(3\xi^2 + \alpha^{\frac{1}{2}}\xi^3) + r^{(1)}(\xi,\varphi,\alpha),$$
$$q^{(2)}(\xi,\varphi,\alpha) = \nu(\alpha)(2\xi + \alpha^{\frac{1}{2}}\xi^2) + q^{(1)}(\xi,\varphi,\alpha).$$

函数 $r^{(2)}$ 和 $q^{(2)}$ 有与 $p^{(1)}$ 和 $q^{(1)}$ 相同的光滑性. 最后, 平移坐标以消去 (B.6) 中第一个方程中的项 $\alpha r^{(0)}(\varphi,\alpha)$:

$$\xi = u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi,\alpha). \tag{B.7}$$

这给出了映射 $F$, 从现在起将对它工作:

$$F: \begin{cases} \tilde{u} = (1-2\alpha)u + \alpha^{\frac{3}{2}}H_\alpha(u,\varphi), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}}K_\alpha(u,\varphi), \end{cases} \tag{B.8}$$

其中 $\omega(\alpha)$ 光滑且

$$H_\alpha(u,\varphi) = r^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi,\alpha),\varphi,\alpha\right),$$
$$K_\alpha(u,\varphi) = q^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi,\alpha),\varphi,\alpha\right)$$

是 $(u,\varphi,\alpha^{\frac{1}{2}})$ 的光滑函数, 是 $\varphi$ 的 $2\pi$ 周期函数.

注意, 带域 $\{(u,\varphi): |u| \leqslant 1, \varphi \in [0,2\pi]\}$ 对应于 (B. 1) 中以 $O(\alpha)$ 为宽度围绕圆周

$$S_0(\alpha) = \left\{z : |z|^2 = -\frac{\alpha}{d(\alpha)}\right\}$$

的带域. 此圆周在原坐标 $z$ 中的半径为 $O(\alpha^{\frac{1}{2}})$. 为下面方便, 引入一个数

$$\lambda = \sup_{|u|\leqslant 1,\varphi\in[0,2\pi]} \left\{|H_\alpha|, |K_\alpha|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial K_\alpha}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial \varphi}\right|, \left|\frac{\partial K_\alpha}{\partial \varphi}\right|\right\}. \tag{B.9}$$

这样定义的 $\lambda$ 依赖于 $\alpha$, 但当 $\alpha \to 0$ 时保持有界.

第二步 (函数空间的定义). 将用函数空间 $U$ 中的元素描述闭曲线. 由定义, $u \in U$ 是满足下面两个条件的 $2\pi$ 周期函数 $u = u(\varphi)$:

(U.1) 对一切 $\varphi$,$|u(\varphi)| \leqslant 1$;

(U.2) 对一切 $\varphi_1$,$\varphi_2$, 有 $|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)| \leqslant |\varphi_1 - \varphi_2|$.

第一个性质表明 $u(\varphi)$绝对有界, 上界为 1, 第二个性质表示 $u(\varphi)$ 是 Lipschitz 连续, Lipschitz 常数是 1. 空间 $U$ 关于范数

$$||u|| = \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} |u(\varphi)|$$

是完备的距离空间

由第 1 章, 映射 $\mathcal{F}: U \to U$(将函数 $u(\varphi) \in U$ 映为另一个函数 $\tilde{u}(\varphi) = (\mathcal{F}u)(\varphi) \in U$) 称为压缩的, 如果存在 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, 使得对一切 $u_{1,2} \in U$, 有

$$||\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)|| \leqslant \varepsilon ||u_1 - u_2||.$$

压缩映射在完备的距离空间中有唯一的不动点 $u^{(\infty)} \in U$:

$$\mathcal{F}(u^{(\infty)}) = u^{(\infty)}.$$

此外, 不动点 $u^{(\infty)}$ 是无穷维动力系统 $\{U, \mathcal{F}\}$ 的大范围稳定平衡点, 即对一切 $u \in U$, 有 (见图 4.16)

$$\lim_{k \to +\infty} ||\mathcal{F}^k(u) - u^{(\infty)}|| = 0.$$

上面两个事实通常就是指压缩映射原理.

第三步 (映射 $\mathcal{F}$ 的压缩性). 考虑由 $F$ 在 $U$ 上的诱导映射 $\mathcal{F}$. 这意味着, 若 $u$ 表示一条闭曲线, 则 $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ 表示在由 (B. 8) 定义的映射 $F$ 作用下它的象.

假设 $U$ 中的函数 $u = u(\varphi)$ 已知. 为了构造映射 $\mathcal{F}$, 必须对每一个给定的 $\varphi$ 指定一个方法, 求得对应的 $\tilde{u}(\varphi) = (\mathcal{F}u)(\varphi)$. 但是, $F$ 对 $\varphi$ 几乎旋转了角度 $\omega(\alpha)$. 因此, 在所得的曲线中点 $(\tilde{u}(\varphi), \varphi)$ 是在原曲线具不同角坐标 $\hat{\varphi}$ 的点 $(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi})$ 的象 (见图 4.17).

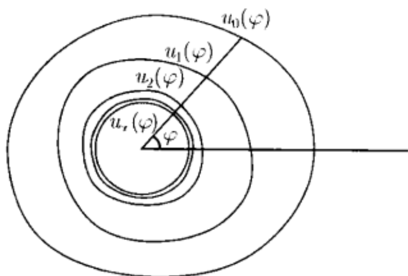



图 4.16　凝聚闭曲线

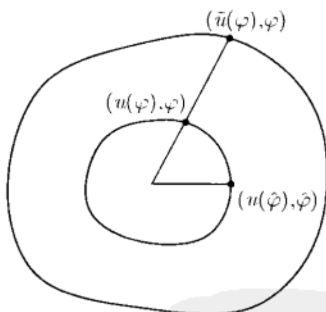



图 4.17　映射的定义

为了证明 $\hat{\varphi}$ 是唯一确定的, 必须证明对任何给定的 $u \in U$, 方程

$$\varphi = \hat{\varphi} + \omega(\alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}} K_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}) \tag{B.10}$$

有唯一解 $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$. 由于 (B. 10) 的右端是 $\hat{\varphi}$ 的严格增函数, 这一事实成立. 事实上, 设 $\varphi_2 > \varphi_1$, 于是由 (B.8) 得

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_2 - \varphi_1 + \alpha^{\frac{3}{2}} [K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)| \\ &\geqslant \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha^{\frac{3}{2}} [K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)|.\end{aligned}$$

考虑到 $K_\alpha$ 是光滑函数以及 (B. 9) 和 (U.2), 得

$$\begin{aligned}|K_\alpha(u(\varphi_2),\varphi_2)-K_\alpha(u(\varphi_1),\varphi_1)| \leqslant&\lambda[|u(\varphi_2)-u(\varphi_1)|+|\varphi_2-\varphi_1|]\\ \leqslant&2\lambda|\varphi_2-\varphi_1|=2\lambda(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}$$

最后一个估计也可以写成

$$-|K_\alpha(u(\varphi_2),\varphi_2)-K_\alpha(u(\varphi_1),\varphi_1)| \geqslant -2\lambda(\varphi_2-\varphi_1),$$

由此得

$$\tilde{\varphi}_2-\tilde{\varphi}_1 \geqslant (1-2\lambda\alpha^{\frac{3}{2}})(\varphi_2-\varphi_1).$$

因此, 只要 $\alpha$ 足够小,(B.10) 的右端是严格增函数, 它的解是唯一确定的①. 由上面的估计得知, 由 (B. 10) 给出的反函数 $\hat{\varphi}(\varphi)$ 是 Lipschitz 连续的:

$$|\hat{\varphi}(\varphi_1)-\hat{\varphi}(\varphi_2)| \leqslant (1-2\lambda\alpha^{\frac{3}{2}})^{-1}|\varphi_1-\varphi_2|. \tag{B.11}$$

现在, 可以由公式

$$\tilde{u}(\varphi)=(1-2\alpha)u(\hat{\varphi})+\alpha^{\frac{3}{2}}H_\alpha(u(\hat{\varphi}),\hat{\varphi}) \tag{B.12}$$

定义映射 $\tilde{u}=\mathcal{F}(u)$, 这里 $\hat{\varphi}$ 是 (B.10) 的解. 当然, 仅仅定义还不够的, 还必须验证当 $u\in U$ 时 $\mathcal{F}(u)\in U$, 就是说, 对 $\tilde{u}=\mathcal{F}(u)$ 验证 (U.1) 和 (U.2).

关于 $\tilde{u}$ 的条件 (U.1), 可以从

$$|\tilde{u}(\varphi)| \leqslant (1-2\alpha)|u(\hat{\varphi})|+\alpha^{\frac{3}{2}}|H_\alpha(u(\hat{\varphi}),\hat{\varphi})| \leqslant 1-2\alpha+\lambda\alpha^{\frac{3}{2}}$$

得到, 这里对 $u$ 用了 (U.1) 以及 $\lambda$ 的定义 (B. 9). 因此, 若 $\alpha$ 足够小且是正的, 则 $|\tilde{u}| \leqslant 1$. 对 $\tilde{u}$ 的条件 (U.2) 由一系列的估计得到

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(\varphi_1)-\tilde{u}(\varphi_2)| \leqslant&(1-2\alpha)|u(\hat{\varphi}_1)-u(\hat{\varphi}_2)|+\alpha^{\frac{3}{2}}|H_\alpha(u(\hat{\varphi}_1),\hat{\varphi}_1)-H_\alpha(u(\hat{\varphi}_2),\hat{\varphi}_2)|\\ \leqslant&(1-2\alpha)|u(\hat{\varphi}_1)-u(\hat{\varphi}_2)|+\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda[|u(\hat{\varphi}_1)-u(\hat{\varphi}_2)|+|\hat{\varphi}_1-\hat{\varphi}_2|]\\ \leqslant&(1-2\alpha+2\lambda\alpha^{\frac{3}{2}})|\hat{\varphi}_1-\hat{\varphi}_2|,\end{aligned}$$

最后一个不等式的成立是由于 $u$ 的 Lipschitz 连续性. 插入估计 (B.11), 得到

$$|\tilde{u}(\varphi_1)-\tilde{u}(\varphi_2)| \leqslant (1-2\alpha+2\lambda\alpha^{\frac{3}{2}})(1-2\lambda\alpha^{\frac{3}{2}})^{-1}|\varphi_1-\varphi_2|.$$

由此, 对所有充分小正的 $\alpha$,(U.2) 对 $\tilde{u}$ 也成立. 因此, 映射 $\tilde{u}=\mathcal{F}(u)$ 定义好了.

① 其中, $\hat{\varphi} \approx \varphi-\omega(\alpha)$.

第四步 (压缩性质的验证). 现在假设给定两个函数 $u_1, u_2 \in U$. 需要用 $||u_1 - u_2||$ 来估计 $||\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2||$. 由 $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ 的定义 (B. 12), 有

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| \leqslant&(1-2\alpha)|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &+ \alpha^{\frac{3}{2}}|H_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - H_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ \leqslant&(1-2\alpha)|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &+ \alpha^{\frac{3}{2}}\lambda[|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|],\end{aligned} \tag{B.13}$$

这里, $\hat{\varphi}_1$ 和 $\hat{\varphi}_2$ 分别是

$$\varphi = \hat{\varphi}_1 + \omega(\alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}}K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) \tag{B.14}$$

和

$$\varphi = \hat{\varphi}_2 + \omega(\alpha) + \alpha^{\frac{3}{2}}K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2) \tag{B.15}$$

的唯一解. 估计 (B. 13) 还没有解决问题, 因为必须对右端仅仅用 $||u_1 - u_2||$. 首先, 用 $||u_1 - u_2||$ 和 $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$ 表达 $|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)|$:

$$\begin{aligned}|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| =&|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1) + u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ \leqslant&|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1)| + |u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ \leqslant&||u_1 - u_2|| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|.\end{aligned} \tag{B.16}$$

最后不等式的得到是用了范数定义和 $u_2$ 的 Lipschitz 连续性. 为完成估计, 还需要用 $||u_1 - u_2||$ 表达 $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$. 由 (B. 14) 减去 (B. 15), 移项, 取绝对值得

$$\begin{aligned}|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| \leqslant&\alpha^{\frac{3}{2}}|K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ \leqslant&\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda[|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|].\end{aligned}$$

将 (B. 16) 插入这个不等式, 且合并所有项包括 $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$ 于左端, 得

$$|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| \leqslant (1 - 2\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda)^{-1}\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda||u_1 - u_2||. \tag{B.17}$$

利用估计 (B. 16) 和 (B. 17), 对 (B. 13) 最后得到

$$|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2| \leqslant \varepsilon||u_1 - u_2||,$$

这里

$$\varepsilon = (1-2\alpha)\left[1 + \alpha^{\frac{3}{2}}\lambda(1 - 2\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda)^{-1}\right] + \alpha^{\frac{3}{2}}\lambda\left[1 + 2\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda(1 - 2\alpha^{\frac{3}{2}}\lambda)^{-1}\right].$$

由于

$$\varepsilon = 1 - 2\alpha + O(\alpha^{\frac{3}{2}}),$$

映射 $\mathcal{F}$ 对小的正数 $\alpha$ 在 $U$ 中是压缩的. 因此, 它有唯一稳定不动点 $u^{(\infty)} \in U$.

第五步 (不变曲线的稳定性). 现在, 在带域 $\{(u,): |u| \leqslant 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 内取点 $(u_0, \varphi_0)$. 如果这个点属于由 $u^{(\infty)}$ 给出的曲线, 它在 $F$ 的迭代下留在此曲线上, 因为映射 $\mathcal{F}$ 映此曲线为它自身. 如果这个点不在这条不变曲线上, 取某条通过它的闭曲线 (不是不变的), 记为 $u^{(0)} \in U$. 这样的曲线总是存在的. 应用由 (B. 8) 定义的映射 $F$ 对这一点进行迭代. 得一点列

$$\{(u_k, \varphi_k)\}_{k=0}^{\infty}.$$

显然, 这个序列的每一点属于在映射 $\mathcal{F}$ 作用下对应于曲线 $u^{(0)}$ 的迭代. 我们刚刚说明曲线的迭代收敛于不变曲线 $u^{(\infty)}$. 因此, 点列必须也收敛于这曲线. 如同对映射的不变集的一样, 这就证明了闭不变曲线的稳定性, 证明完毕. □

## 4.11　附录 C：文献评注

由一维映射产生的动力系统是古典数学的课题, 已经有详细的研究 (见 Whitley(1983) 以及 van Strien(1991) 的评述). 不动点以及周期 2 环的性质, 包括折分支和翻转分支很早以前就知道了. 这些分支的拓扑规范形定理的明确的阐述属于 Arnold (1983). 规范形中截断高阶项以得到局部拓扑等价系统的完全证明发生了意想不到的困难 (Newhose,Palis,Takens,1983; Arnold et al, 1994).

当一对复乘子穿过单位圆时, 围绕不动点出现闭不变曲线的事实是由 Andronov 得到并由 Neimark(1959) 研究的(所有的一般性条件他没有明确叙述). Sacker(1965) 给出了完全的证明, 他独立地发现了分支. 在 Ruelle 和 Takens (1971) 以及 Marsden 和 McCracken (1976) 以后如 "映射的 Hopf 分支" 一样变得大家都知道了. 关于平面映射的 Neimark-Sacker 分支的近代叙述可以在 Iooss(1979) 中找到, 那里计算了规范形系数 $d(0)$(也可参看 Wan (1978b)). 在附录 B 中给出的基本上是根据 Marsden 和 McCraken (1976) 提供的证明.

映射的规范形理论是由 Arnold (1983) 阐述的. 在本书中对不动点余维 1 分支的分析时仅仅需要这个理论的一小部分, 对这一小部分也作了 "即时" 的发展.

二次映射 $x \mapsto x^2 - \lambda$ 中的倍-周期分支瀑布是被 Myrberg(1962) 发现并研究的. 数学生态学家在研究一维离散-时间种群模型时独立地观察到这一现象：Shapiro (1974) 分析了 Ricker(1954) 提供的模型, May(1974) 用了逻辑映射. Feigenbaum (1978) 以及 Coullet 和 Eckmann (1980) 在这类瀑布中发现了普适性, 并在二重算子

性质的基础上对它的结构作了解释. 有关的定理是被 Lanford (1980,1984) 借助于计算机以及精误差估计证明 (也可见 Babenko 和 Petrovich(1983,1984) 及 Petrovich (1990)). 解析证明在比较后才给出 (评述见 Lyubich(2000)). Feigenbaum 类型的普适性也在某类高维离散–时间动力系统中得到证明.

时滞逻辑模型与离散–时间捕食–被捕食模型源于 Maynard Smith (1968). 对时滞逻辑映射, 当参数从 Neimark-Sacker 分支 "移开" 时, 其闭不变曲线的命运的分析是由 Aronson,Chory,Hall 和 McGehee(1982) 给出的.



# 第 5 章　$n$ 维动力系统的平衡点分支与周期轨道分支

上面两章在相空间的维数尽可能最低的情况下，研究了一般单参数动力系统的平衡点分支和不动点分支. 这些已分析的系统不是一维就是二维. 本章将指出这些分支"本质上"以同样方式出现在一般的 $n$ 维系统. 正如我们将看到的，存在某些依赖于参数的一维或二维不变流形，系统在它上面具有对应的分支. 而离开这个流形，其性态显得有些"平凡"，例如，流形可以是指数式吸引. 此外，对许多耗散的无穷维动力系统，也存在这样的流形 (称为中心流形). 下面在分支参数值上推导有限维系统中心流形的二次近似以及限制在中心流形上的系统. 利用这些结果推导在平衡点和不动点的所有已经被研究过的余维 1 分支临界规范形系数的明确不变公式. 在附录 A 考虑了一个在区间上的反应扩散系统，以说明在处理无穷维系统时要作必要的技术修改.

## 5.1　中心流形定理

我们不加证明地给出下面的主要定理，这个定理允许我们在局部分支附近对所给系统的维数给予缩减. 从临界情形开始，这一节假定系统的参数是固定在它的分支值，对这个值，系统有非双曲平衡点 (不动点). 以下分开处理连续–时间系统和离散–时间系统.

### 5.1.1　连续–时间系统的中心流形

考虑由

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

定义的连续–时间动力系统，其中 $f$ 充分光滑，$f(0) = 0$. 设在平衡点 $x_0 = 0$ 的 Jacobi 矩阵的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 假设平衡点不是双曲的，则存在具零实部的特征值. 设有 $n_+$ 个特征值 (计算重次)$\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, $n_0$ 个特征值 $\mathrm{Re}\ \lambda = 0$ 以及 $n_-$ 个特征值 $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$(见图 5.1). 令 $T^c$ 表示 $A$ 对应于虚轴上 $n_0$ 个特征值并的线性 (广义) 特征空间. 满足 $\mathrm{Re}\lambda = 0$ 的特征值如同空间 $T^c$ 称为是临界的. 设 $\varphi^t$ 表示对应于 (5.1) 的流. 在这些假设下，下面定理成立.

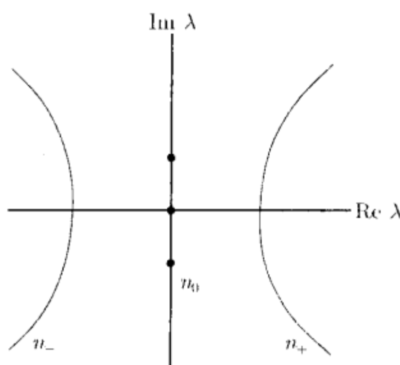



图 5.1　平衡点的临界特征值

**定理 5.1**(中心流形定理)　(5.1) 存在局部定义的光滑 $n_0$ 维不变流形 $W^c_{\text{loc}}(0)$, 在 $x=0$ 切于 $T^c$.

此外, 存在 $x_0=0$ 的邻域 $U$, 使得若对一切 $t\geqslant 0$ ($t\leqslant 0$), 有 $\varphi^t x\in U$, 则当 $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$) 时, 有 $\varphi^t x\to W^c_{\text{loc}}(0)$. □

**定义 5.1**　流形 $W^c_{\text{loc}}$ 称为中心流形.

这里不给出定理的证明. 如果 $n_0$=0, 流形 $W^c_{\text{loc}}$ 可以作为在 $\varphi^1$ 作用下 $T^c$ 迭代的局部极限来构造. 为了简化记号, 从现在起省略足标 "loc". 图 5.2 和图 5.3 显示定理对平面上的折分支 ($n=2, n_0=1, n_-=1$) 和 $\mathbb{R}^3$ 中的 Hopf 分支 ($n=3$, $n_0=2$, $n_-=1$). 在第一种情形, 中心流形 $W^c$ 切于对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量, 在第二种情形, 它切于由对应于 $\lambda_1=\mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0>0$ 的复特征向量的实部和虚部所张成的平面.

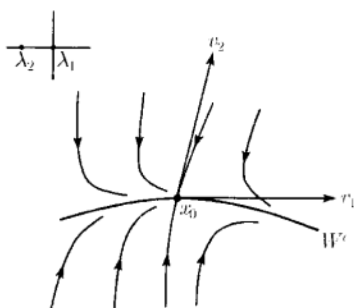



图 5.2　在折分支的一维中心流形

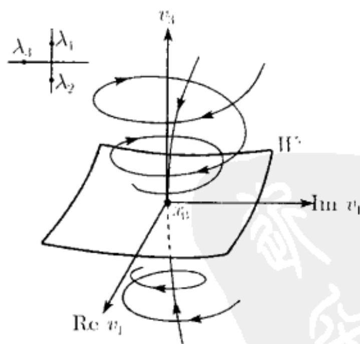



图 5.3　在 Hopf 分支的二维中心流形

**注**　(1) 定理的第二部分说明, 当 $t\geqslant 0$ 或 $t\leqslant 0$ 时, 停留在平衡点附近的轨道按对应的时间方向趋于 $W^c$. 若还知道从 $U$ 出发的所有轨道将永远停留在此邻域内 (出现这种情况的必要条件是 $n_+$=0), 则由定理得知, 当 $t\to+\infty$ 时, 这些轨道

都趋于 $W^c(0)$. 在这情形流形是“吸引”的.

(2) $W^c$ 不需是唯一的. 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

有平衡点 $(x, y) = (0, 0)$, 在此点 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$(折分支情形). 它有一维中心流形族

$$W_\beta^c(0) = \{(x, y) : y = \psi_\beta(x)\},$$

其中

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \beta \exp\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(见图 5.4(a)). 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2), \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

有平衡点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, 特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}, \lambda_3 = -1$ (Hopf 情形). 系统存在一族由下面式子给出的二维中心流形,

$$W_\beta^c(0) = \{(x, y, z) : z = \varphi_\beta(x, y)\},$$

其中

$$\varphi_\beta(x, y) = \begin{cases} \beta \exp\left(-\dfrac{1}{2(x^2 + y^2)}\right), & \text{当 } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{当 } x = y = 0 \end{cases}$$

(见图 5.4(b)). 如我们将看到的, 对应用这种不唯一性实际上没有什么关系.

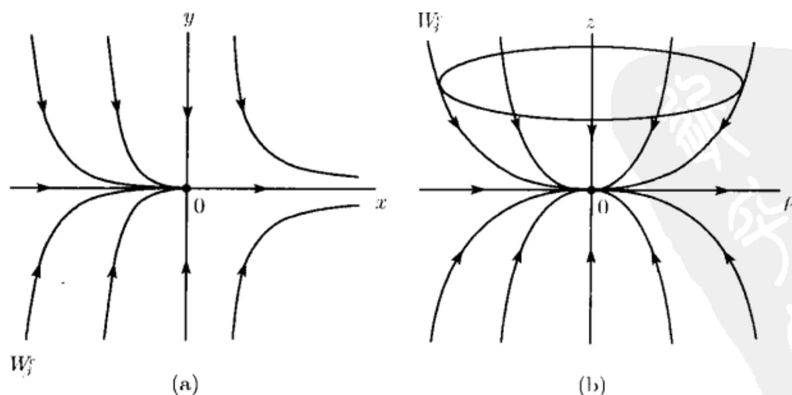



图 5.4　中心流形的不唯一性: (a) 折分支; (b) Hopf 分支

(3) 在 $x_0$ 的某邻域 $U$ 内, 中心流形 $W^c$ 与 $f$ 有相同的有限次光滑性 (若 $f \in C^k$, $k$ 有限, 则 $W^c$ 是 $C^k$ 流形). 但是, 当 $k \to \infty$ 时邻域 $U$ 可能收缩以至于对某 $C^\infty$ 系统 $C^\infty$ 流形 $W^c$ 不存在 (见练习 1). ◇

为了更明确地刻画在非双曲平衡点 $x_0 = 0$ 附近的动力学, 在由 $A$ 的所有 (广义) 特征向量 (或者它们的线性组合, 如果对应的特征值是复数) 构成的特征基上改写 (5.1). 合并临界和非临界分量, 可以将系统 (5.1) 重写为

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u,v), \\ \dot{v} = Cv + h(u,v), \end{cases} \tag{5.2}$$

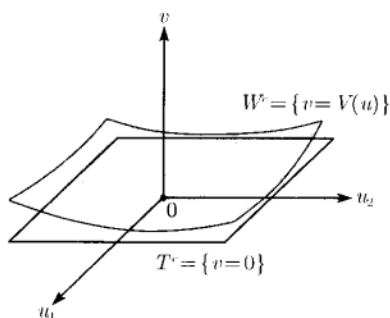



图 5.5　作为函数 $v = V(u)$ 的图像的中心流形

这里 $u \in \mathbb{R}^{n_0}, v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}, B$ 是一个 $n_0 \times n_0$ 矩阵, 它所有 $n_0$ 个特征值在虚轴上, $C$ 是一个 $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ 矩阵, 它没有特征值在虚轴上①. 函数 $g$ 和 $h$ 有至少从二次项开始的 Taylor 展开. 系统 (5.2) 的中心流形可局部地表示为光滑函数

$$W^c = \{(u,v) : v = V(u)\}$$

的图像 (见图 5.5). 这里 $V : \mathbb{R}^{n_0} \to \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, 且由 $W^c$ 的相切性, $V(u) = O(\|u\|^2)$.

**定理 5.2**(约化原理)　*在原点附近系统 (5.2) 局部拓扑等价于系统*

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, V(u)), \\ \dot{v} = Cv. \end{cases} \tag{5.3}$$

*如果存在多于一个中心流形, 则对不同的 $V$, 所有系统 (5.3) 都是局部光滑等价.* □

我们指出, (5.3) 关于 $u, v$ 的方程是互相独立的. 第一个方程是 (5.2) 在它的中心流形上的限制. 因此, 结构不稳定系统 (5.2) 的动力学本质上由这个限制所决定, 因为 (5.3) 的第二个方程是线性的, 它有指数式衰减/增长的解. 例如, 若 $u = 0$ 是限制的渐近稳定平衡点, 而 $C$ 的所有特征值都有负实部, 则 $(u, v) = (0, 0)$ 是 (5.2) 的渐近稳定平衡点. 显然, 中心流形上的动力学不仅由 (5.2) 的线性项而且也由它的非线性项所确定.

**例 5.1** (切近似的失败)　考虑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + x^3, \\ \dot{y} = -y - 2x^2. \end{cases} \tag{5.4}$$

① 实际上, 在非临界特征空间上的任何基是允许的, 换句话说, 矩阵 $C$ 可以没有实标准 (Jordan) 型.

它有平衡点 $(x,y)=(0,0)$. 它是稳定还是不稳定? Jacobi 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

有特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$. 因此, 系统 (5.4) 写为形式 (5.2), 它有由下面的纯量函数所表示的一维中心流形 $W^c$:

$$y=V(x).$$

求这个函数 Taylor 展开的二次项

$$V(x)=\frac{1}{2}wx^2+\cdots,$$

未知系数 $w$ 可以由 $\dot{y}$ 的表达式来寻找:

$$\dot{y}=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=(wx+\cdots)\dot{x}=wx^2y+wx^4+\cdots=w\left(\frac{1}{2}w+1\right)x^4+\cdots,$$

或者, 另外表示为

$$\dot{y}=-y-2x^2=-\left(\frac{1}{2}w+2\right)x^2+\cdots.$$

因此, $w+4=0$,

$$w=-4.$$

由此, 中心流形有下面的二次近似

$$V(x)=-2x^2+O(x^3),$$

而 (5.4) 在这个流形上的限制是

$$\dot{x}=xV(x)+x^3=-2x^3+x^3+O(x^4)=-x^3+O(x^4).$$

因而, 原点是*稳定*的. 系统在平衡点附近的相图如图 5.6 所示. (5.4) 在它的临界特征空间 $y=0$ 上的限制为

$$\dot{x}=x^3.$$

原点是这个方程的不稳定点, 但这给出稳定问题的错误答案. 图 5.7 对在 $W^c$ 和 $T^c$ 上的两个限制方程进行比较.

◇

(5.3) 的第二个方程可以用标准的*鞍点方程*

$$\begin{cases} \dot{v}=-v, \\ \dot{w}=w \end{cases} \tag{5.5}$$

代替, $(v, u) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$. 因此, 约化原理可以用下面的方法简洁地表示为: **非双曲平衡点附近的系统局部拓扑等价于标准鞍点在中心流形上的限制的扭扩**(suspesion).

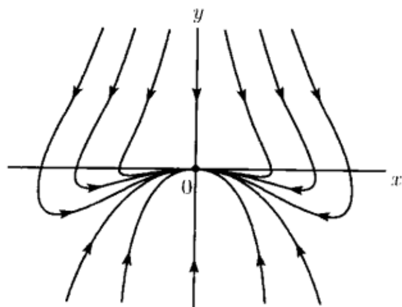



图 5.6　(5.4) 的相图: 原点是稳定的

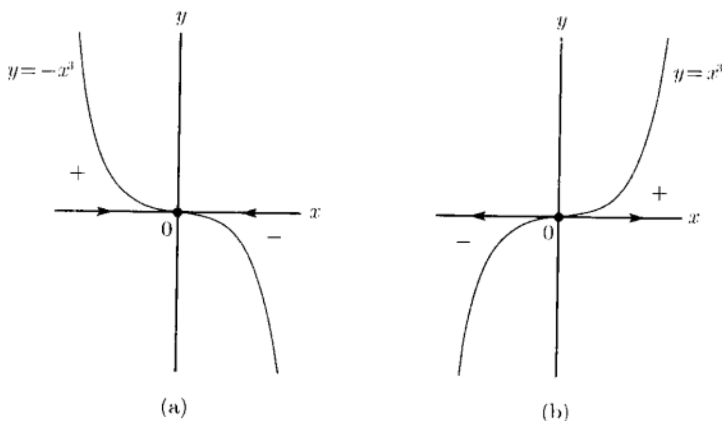



图 5.7　限制方程: (a) 在中心流形 $W^c$ 上; (b) 在切线 $T^c$ 上

### 5.1.2　离散-时间系统的中心流形

现在考虑由

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.6}$$

定义的离散-时间动力系统, 这里 $f$ 充分光滑, $f(0) = 0$. 设 Jacobi 矩阵 $A$ 在不动点 $x_0 = 0$ 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, 称为乘子. 假设平衡点不是双曲的, 因此有乘子在单位圆上 (绝对值为 1). 假定有 $n_+$ 个乘子在单位圆外, $n_0$ 个乘子在单位圆上, 以及 $n_-$ 个乘子在单位圆内 (见图 5.8). 设 $T^c$ 表示 $A$ 对应于单位圆上的 $n_0$ 个乘子并的线性不变 (广义) 特征空间. 如果仅考虑整数值时间并令 $\varphi^k = f^k$, $f$ 的 $k$ 次迭代, 于是定理 5.1 对系统 (5.6) 可完全一样成立. 利用 $A$ 的特征基和以前相同的

记号, 可将系统重写为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu+g(u,v) \\ Cv+h(u,v) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

但是, 现在 $B$ 有特征值在单位圆上, 而 $C$ 所有的特征值在圆内或圆外. 中心流形具有局部表示 $v=V(u)$, 约化原理仍成立.

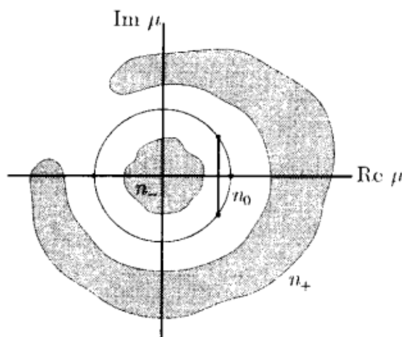



图 5.8　不动点的临界乘子

**定理 5.3**　*系统 (5.7) 在原点附近拓扑等价于系统*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu+g(u,V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

*若存在多个中心流形, 则具有不同 $V(u)$ 的所有映射 (5.8) 都是局部光滑共轭.* □

标准的鞍点结构对离散-时间更加复杂, 因为必须考虑到映射在膨胀方向和压缩方向的定向性质. 首先, 为简单起见, 假设没有乘子在单位圆外 (即 $n_+=0$). 于是, 若 $\det C>0$, 则 (5.8) 中的映射 $v\mapsto Cv$ 可以用

$$v\mapsto \frac{1}{2}v$$

代替, 这是标准的保持方向的稳定结点. 但是, 若 $\det C<0$, 则映像 (5.8) 必须用

$$\begin{cases} v_1 \mapsto \dfrac{1}{2}v_1, \\ v_2 \mapsto -\dfrac{1}{2}v_2 \end{cases}$$

代替, 这里 $v_1\in\mathbb{R}^{n_--1}, v_2\in\mathbb{R}^1$, 这是标准的逆向稳定结点. 若现在有 $n_+$ 个乘子在单位圆外, 则标准的不稳定结点$w\mapsto\tilde{w}$, $w,\tilde{w}\in\mathbb{R}^{n_+}$ 应该加入式 (5.8). 类似于标准的稳定结点, 定义标准的不稳定结点, 但是以乘子 2 代替 $\dfrac{1}{2}$. 标准的稳定和不稳定结点一起定义了 $\mathbb{R}^{n_-+n_+}$ 中的标准鞍点映射.

## 5.2 依赖于参数的系统的中心流形

现在考虑光滑依赖于参数的连续-时间系统:

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{5.9}$$

假设在 $\alpha = 0$ 系统有非双曲平衡点 $x = 0$, 有 $n_0$ 个在虚轴上的特征值和 $(n - n_0)$ 个特征值具非零实部. 设它们有 $n_-$ 个有负实部, $n_+$ 个有正实部. 考虑**扩展系统**

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0, \\ \dot{x} = f(x,\alpha). \end{cases} \tag{5.10}$$

注意, 扩展系统 (5.10) 可以是非线性的, 即使原来的系统 (5.9) 是线性的.(5.10) 在平衡点 $(\alpha, x) = (0,0)$ 的 Jacobi 矩阵是 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha(0,0) & f_x(0,0) \end{pmatrix},$$

它有 $(n_0+1)$ 个特征值在虚轴上, $(n-n_0)$ 个特征值有非零实部. 因此, 可以对系统 (5.10) 应用中心流形定理. 定理保证中心流形 $\mathcal{W}^c \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{W}^c = n_0 + 1$ 的存在性. 这个流形在原点切于 $J$ 对应于具零实部的 $(n_0+1)$ 个特征值的 (广义) 特征空间. 因为 $\dot{\alpha} = 0$, 超平面 $\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha, x) : \alpha = \alpha_0\}$ 关于 (5.10) 也是不变的. 因此, 流形 $\mathcal{W}^c$ 是由 $n_0$ 维不变流形

$$W_\alpha^c = \mathcal{W}^c \cap \Pi_\alpha$$

组成的叶状流形 (见图 5.9). 由此, 有下面的引理.

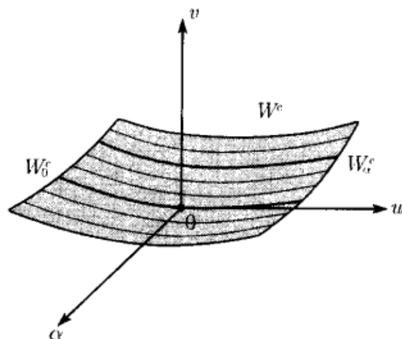



图 5.9 扩展系统的中心流形

**引理 5.1** *系统 (5.9) 有依赖于参数的局部不变流形 $W_\alpha^c$. 若 $n_+ = 0$, 则这个流形是吸引的.* □

注意, 如上一节所定义的, $W_0^c$ 是 (5.10) 在 $\alpha = 0$ 的中心流形. 通常, $W_\alpha^c$ 称为对所有 $\alpha$ 的**中心流形**. 对每个小 $|\alpha|$, 可以把系统 (5.9) 限制在 $W_\alpha^c$ 上. 如果在 $W_\alpha^c$ 引入 (依赖于参数) 坐标系统, 以 $u \in \mathbb{R}^{n_0}$ 作为坐标①, 这个限制将以光滑系统

$$\dot{u} = \Phi(u,\alpha) \tag{5.11}$$

①由于 $W_0^c$ 切于 $T^c$, 所以可以对小 $|\alpha|$, 用从 $W_\alpha^c$ 到 $T^c$ 的 (局部) 投影, 在 $T^c$ 上的坐标参数化 $W_\alpha^c$.

表示. 在 $\alpha$=0, 系统 (5.11) 等价于 (5.9) 在它的中心流形 $W_0^c$ 上的限制, 在 5.4 节将对所有余维 1 分支对它明确地计算到三次项.

**定理 5.4**(Shoshitaishvili,1972)　*系统 (5.9) 局部拓扑等价于由标准鞍点 (5.5) 作的 (5.11) 的扭扩. 此外, (5.11) 可以由任何一个局部拓扑等价系统所代替.* □

这个定理意味着, 分支参数值附近不变流形 $W_\alpha^c$ 上出现的所有 "本质" 事件都可由 $n_0$ 维系统 (5.11) 来捕获. 类似的定理可以对离散–时间动力系统, 以及系统含有多个参数的情形加以叙述. 下面将这个定理应用到折分支和 Hopf 分支.

**例 5.2**($\mathbb{R}^2$ 中的一般折分支)　考虑平面系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{5.12}$$

假设在 $\alpha = 0$, 它有平衡点 $x_0 = 0$, 一个特征值 $\lambda_1 = 0$, 另一个 $\lambda_2 < 0$. 对小 $|\alpha|$, 引理 5.1 给出 (5.12) 的一个光滑的局部定义以及一维的吸引不变流形 $W_\alpha^c$ 的存在性. 在 $\alpha = 0$, 限制方程有形式

$$\dot{u} = bu^2 + O(u^3).$$

如果 $b \neq 0$, 限制方程一般依赖于参数, 故如同第 3 章中的证明, 它是局部拓扑等价于规范形

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2,$$

这里 $\sigma = \text{sign}\ b = \pm 1$. 在这些一般性条件下, 由定理 5.4 得知 (5.12) 局部拓扑等价于系统

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2, \\ \dot{v} = -v. \end{cases} \tag{5.13}$$

方程 (5.13) 中的两个方程是互相独立的. 对情形 $\sigma > 0$, 所得相图如图 5.10 所示. 对 $\sigma < 0$, 存在两个双曲不动点、稳定结点和鞍点. 它们在 $\alpha = 0$ 时相碰, 形成了一个**鞍–结点**, 再消失. $\alpha > 0$ 时系统没有平衡点. (5.13) 中的流形 $W_\alpha^c$ 可考虑为与参数无关并由 $v = 0$ 给出. 显然, 这是无穷多个选择之一 (见例 5.3 的注). 同样的事情对 (5.12) 发生在某个一维, 依赖于参数的不变流形上, 这是局部吸引的 (见图 5.11). 所有的平衡点都属于这个流形. 图 5.10 和图 5.11 解释为什么通常称折分支为**鞍–结点分支**. 应该清楚如何把这些考虑推广到包括 $\lambda_2 > 0$ 情形和 $n$ 维情形. ◇

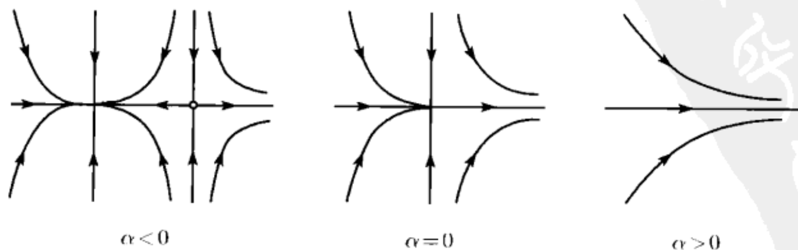



图 5.10　$\sigma = 1$ 时标准系统 (5.13) 的折分支

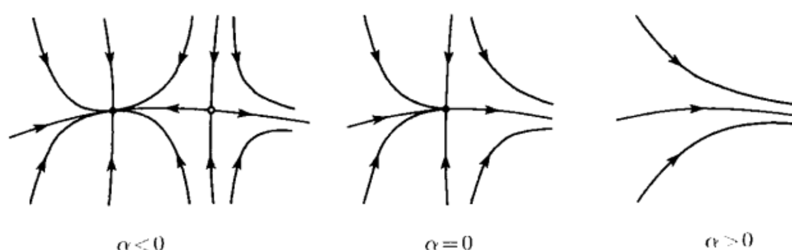



图 5.11　一般平面系统的折分支

**例 5.3**($\mathbb{R}^3$ 中的一般 Hopf 分支)　考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^3,\alpha\in\mathbb{R}^1. \tag{5.14}$$

假设在 $\alpha=0$, 它有平衡点 $x_0=0$, 特征值 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}\omega_0,\omega_0>0$ 和一个负特征值 $\lambda_3<0$. 对小 $|\alpha|$, 引理 5.1 给出了 (5.14) 的依赖于参数、光滑、局部的二维不变流形 $W^c_\alpha$ 的存在性. 在 $\alpha=0$ 限制方程 (5.11) 可以写成复数形式

$$\dot{z}=\mathrm{i}\omega_0 z+g(z,\bar{z}),\quad z\in\mathbb{C}^1.$$

若这个方程的 Lyapunov 系数 $l_1(0)$ 不为零, 而限制方程一般地依赖于参数, 则如同第 3 章的证明, 它局部拓扑等价于规范形

$$\dot{z}=(\alpha+\mathrm{i})z+\sigma z^2\bar{z},$$

其中 $\sigma=\operatorname{sign} l_1(0)=\pm1$. 在这些一般性条件下, 由定理 5.4 得知 (5.14) 是局部拓扑等价于系统

$$\begin{cases}\dot{z}=(\alpha+\mathrm{i})z+\sigma z^2\bar{z},\\ \dot{v}=-v.\end{cases} \tag{5.15}$$

对 $\sigma=-1$, (5.15) 的相图如图 5.12 所示. 超临界 Hopf 分支在不变平面 $v=0$ 上发生, 它是吸引的. 同样情况对 (5.14) 发生在某个二维吸引流形上 (见图 5.13). 这种结构可以推广到任意维数 $n\geqslant 3$. ◇

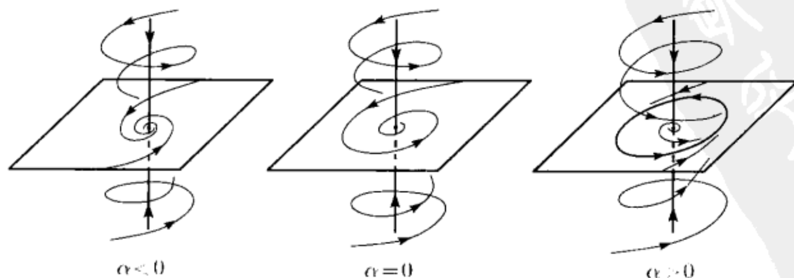



图 5.12　$\sigma=-1$ 时, 标准系统 (5.15) 的 Hopf 分支

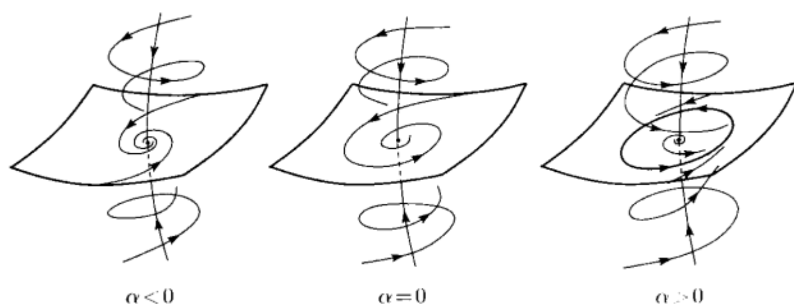



图 5.13　一般三维系统中的超临界 Hopf 分支

**注**　应该注意, 不管是折分支情形还是 Hopf 分支情形, 流形 $W_\alpha^c$ 不唯一, 但是分支出的平衡点或环都属于任何一个中心流形 (参看 5.1.1 节中心流形定理的注 (2)). 在折分支情形, 在鞍点附近流形是唯一的, 且与它的不稳定流形重合, 只要它存在. 在稳定结点失去唯一性. 类似地, 在 Hopf 分支情形, 流形唯一且与鞍-焦点的不稳定流形重合直到出现稳定极限环 $L_\alpha$, 在那里唯一性破裂. 图 5.14 显示系统 (5.15) 在 $(\rho, v)$ 坐标下, 对 $\sigma=-1$, 当 $\alpha>0$ 时的 Hopf 情形, $W_\alpha^c$ 可自由选择. ◇

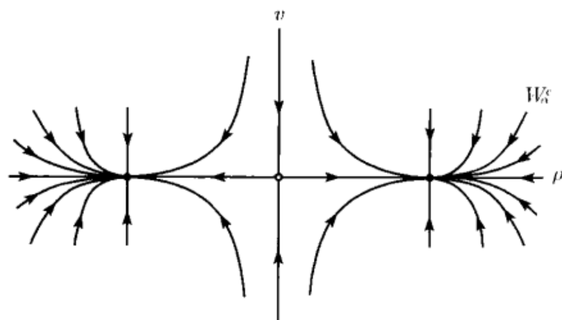



图 5.14　Hopf 分支附近依赖于参数的中心流形的非唯一性

## 5.3　极限环分支

结合 Poincaré 映射 (见第 1 章) 和中心流形方法, 可以用第 4 章的结果到 $n$ 维连续-时间系统的极限环分支.

设 $L_0$ 是系统 (5.9) 在 $\alpha=0$ 时的一个极限环 (孤立周期轨道). 设 $P_\alpha$ 表示对附近的 $\alpha$ 相应的 Poincaré 映射 $P_\alpha: \Sigma \to \Sigma$, 这里 $\Sigma$ 是 $L_0$ 的局部截面. 若在 $\Sigma$ 上引入某个坐标 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$, 则 $\tilde{\xi}=P_\alpha(\xi)$ 定义为 (5.9) 的 $\Sigma$ 上以 $\xi$ 为坐标的初始点的轨道的下一个与 $\Sigma$ 的交点. $\Sigma$ 与 $L_0$ 的交点给出 $P_0$ 的不动点 $P_0(\xi_0)=\xi_0$. 映射 $P_\alpha$ 是光滑且局部可逆.

假设环 $L_0$ 是非双曲的, 它有 $n_0$ 个乘子在单位圆上. 于是中心流形定理给出了

$P_\alpha$ 的依赖于参数的不变流形 $W_\alpha^c \subset \Sigma$, 在这个流形上 "本质" 事情发生. Poincaré 映射 $P_\alpha$ 局部拓扑等价于由标准鞍点映射在这个流形上限制的扭扩. 为简单起见, 固定 $n = 3$, 考虑这个定理对极限环的含义.

### 5.3.1　环的折分支

假设在 $\alpha = 0$ 环有单乘子 $\mu_1 = 1$, 另外一个乘子满足 $0 < \mu_2 < 1$. $P_\alpha$ 在不变流形 $W_\alpha^c$ 上的限制是一维映射, 它在 $\alpha = 0$ 有不动点, 其乘子 $\mu_1 = 1$. 正如在第 4 章中看到的, 一般地, 可知当 $\alpha$ 穿过零时两个不动点相碰而消失. 在关于 $\mu_2$ 的假设下, 这个情况在 $P_\alpha$ 的一维吸引不变流形上发生. 因此, 一个稳定点和一个鞍点不动点包含在这个分支中 (见图 5.15). Poincaré 映射的每个不动点对应于连续–时间系统的极限环. 因此, 系统 (5.9) 中的两个极限环 (稳定的和鞍点的) 在这个分支相碰而消失 (见图 5.15).

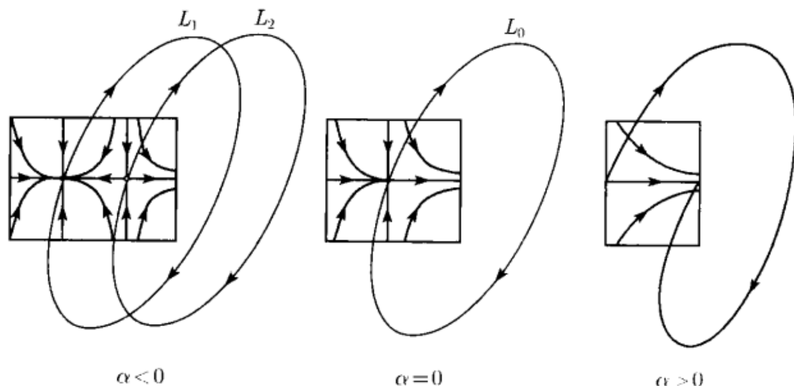



图 5.15　极限环的折分支

### 5.3.2　环的翻转分支

假设在 $\alpha = 0$ 环有单乘子 $\mu_1 = -1$, 另一个 $-1 < \mu_2 < 0$. 于是 $P_\alpha$ 在不变流形上的限制一般地显示倍周期 (翻转) 分支: 当不动点改变它的稳定性时这个映射出现周期 2 环 (见图 5.16). 由于这个流形是吸引的, 例如, 稳定不动点失去稳定性而变成鞍点, 这时周期 2 环出现. 不动点对应于相关稳定性的极限环. 映射的周期 2 环对应于 (5.9) 的唯一稳定极限环, 其周期近似于"基本" 环 $L_0$ 周期的两倍. 倍–周期环使得在 $L_0$ 附近在它闭合之前有两个大 "游弋". 确切的分支情景由在 $\alpha = 0$ 计算的限制 Poincaré 映射的规范形系数所确定.

### 5.3.3　环的 Neimark-Sacker 分支

最后一个余维 1 分支对应于乘子是复且单的, 并在单位圆上, $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0}$. 于是 Poincaré 映射有依赖于参数的二维不变流形, 在这个流形上, 一般地, 从不动点

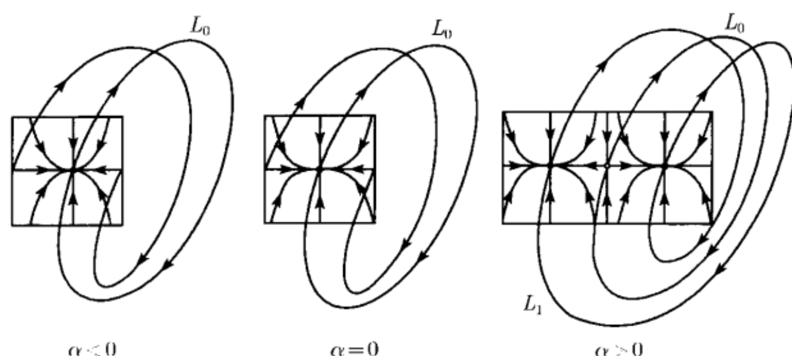



图 5.16　极限环的翻转分支

分支出闭不变曲线 (见图 5.17). 这个闭曲线对应于 (5.9) 的二维不变环面 $\mathbb{T}^2$. 这个分支是由在临界参数值的限制 Poincaré 映射的规范形系数所确定. 在环面 $\mathbb{T}^2$ 上的轨道结构是由 Poincaré 映射在这个闭不变曲线上的限制所确定. 因此, 一般地, 存在位于这个环面上的不同稳定性类型的长周期环 (见第 7 章).

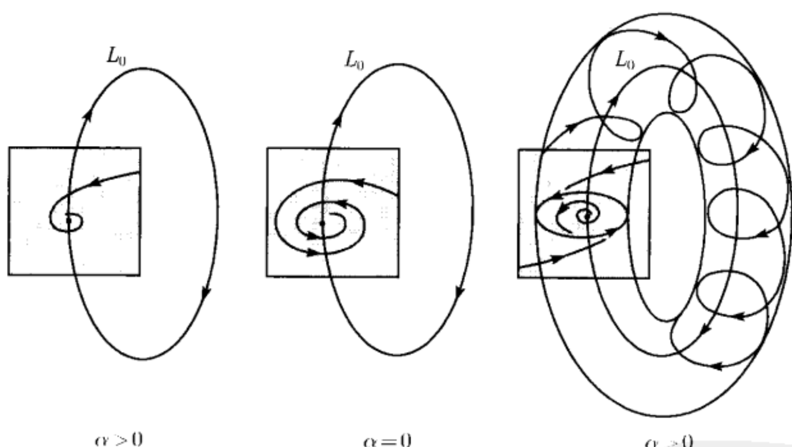



图 5.17　极限环的 Neimark-Sacker 分支

## 5.4　中心流形的计算

如前面几节指出, 高维系统对平衡点和不动点 (因而, 极限环) 的分支分析化为对在不变流形 $W_\alpha^c$ 上限制的微分方程 (映射) 的分析. 由于这些分支是由在临界参数值 $\alpha=0$ 的限制系统的规范形系数决定, 因而必须能够计算中心流形 $W^c=W_0^c$ 以及限制在这个流形上的 ODEs 或映射直到足够的高阶项.

表示中心流形 $W^c$ 的函数的 Taylor 展开的未知系数可以用递推方法计算, 其

中每一步包含求解线性代数方程组. 即使中心流形不唯一, 如此得到的系数对所有这些流形是相同的. 在 $C^\infty$ 情形, 这意味着这些流形只差个 "平坦"(flat) 函数. 前面推导了平衡点和不动点所有余维 1 分支的中心流形的二次 Taylor 系数的明显公式. 现在应该清楚, 对这些情形 $W^c$ 或者是一维或者是二维, $n_0 = 1, 2$. 为了分析这些分支, 首先计算限制临界 ODEs 或者映射直到 (包括) 三次项, 然后求对应规范形的系数. 在 8.7 节以及 9.7 节将用更先进的方法计算中心流形结合在这个流形上限制方程的规范化.

这一节对中心流形的计算用投影法, 从而避免把系统变换到特征基上 (即 (5.2) 或 (5.7) 的形式), 代之以仅仅用对应于 $A$ 以及它的转置 $A^{\mathrm{T}}$ 的特征向量, 把系统"投影"到临界特征空间和它的补空间. 这个方法是基于 Fredholm 交替定理, 并且可用于连续–时间和离散–时间有限维系统, 以及某些无穷维动力系统 (见附录 A), 不过要略作修改.

### 5.4.1 ODEs 的限制规范化方程

如通常, 从连续–时间情形开始. 假设系统 (5.1) 有形式

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.16}$$

其中 $F(x) = O(\|x\|^2)$ 是光滑函数. 在 $x = 0$ 附近, 它的 Taylor 展开为

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, y) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \tag{5.17}$$

这里 $B(x, y)$ 和 $C(x, y, z)$ 是多重线性函数. 在坐标下的分量为

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right|_{\xi=0} x_j y_k \tag{5.18}$$

和

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l}\right|_{\xi=0} x_j y_k z_l, \tag{5.19}$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, n$.

1. 折分支

在这种情形, $A$ 有单零特征值 $\lambda_1 = 0$, 对应的临界特征空间 $T^c$ 是由满足 $Aq = 0$ 的特征向量 $q \in \mathbb{R}^n$ 张成的一维空间. 设 $p \in \mathbb{R}^n$ 是伴随特征向量, 即 $A^{\mathrm{T}}p = 0$, 这里 $A^{\mathrm{T}}$ 是矩阵的转置①. 可以方便地把 $p$ 关于 $q$ 标准化: $\langle p, q\rangle = 1$, 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准数量积. 由 Fredholm 交替定理得下面引理.

① 回忆对任何 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $\langle x, Ay\rangle = \langle A^{\mathrm{T}}x, y\rangle$.

**引理 5.2**　设 $T^{su}$ 表示 $A$ 所有异于零的特征值的对应的 $(n-1)$ 维线性特征空间. 则 $y \in T^{su}$ 当且仅当 $\langle p, y\rangle = 0$. □

利用这个引理, 可 "分解" 任何向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 为

$$x = uq + y,$$

这里 $uq \in T^c, y \in T^{su}$. 如果 $q$ 和 $p$ 已经如上面标准化了, 就得到 $u$ 和 $y$ 的明确表达式:

$$\begin{cases} u = \langle p, q\rangle, \\ y = x - \langle p, x\rangle q. \end{cases} \tag{5.20}$$

由此可定义两个算子:

$$P_c x = \langle p, x\rangle q, \quad P_{su} x = x - \langle p, x\rangle q.$$

这些算子分别是在 $T^c$ 和 $T^{su}$ 上的投影, 且

$$P_c^2 = P_c, \quad P_{su}^2 = P_{su}, \quad P_c P_{su} = P_{su} P_c = 0.$$

数量 $u$ 和向量 $y$ 可以考虑为 $\mathbb{R}^n$ 上的新 "坐标". 虽然 $y \in \mathbb{R}^n$, 总能满足正交性条件 $\langle p, y\rangle = 0$. 在这些新坐标下, 系统 (5.16) 可写为

$$\begin{cases} \dot{u} = \langle p, F(uq + y)\rangle, \\ \dot{y} = Ay + F(uq + y) - \langle p, F(uq + y)\rangle q. \end{cases} \tag{5.21}$$

为了得到这些方程, 必须考虑到 (5.20) 以及特征向量定义和标准化. 等价地, 可应用上面的投影算子到系统 (5.16).

应用 Taylor 展开 (5.17) 和方程 $Aq = 0$, 可写为

$$F(uq + y) = Ay + \frac{1}{2}(u^2 B(q, q) + 2uB(q, y) + B(y, y)) + \frac{1}{6}u^3 C(q, q, q) + \cdots,$$

这里的省略号 $\cdots$ 表示所有没有列出的 $(u, y)$ 的三次项和高阶项. 于是 (5.21) 变成

$$\begin{cases} \dot{u} = bu^2 + uB(q, y) + ru^3 + \cdots, \\ \dot{y} = Ay + \dfrac{1}{2}au^2 + \cdots, \end{cases} \tag{5.22}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^n$, 以及对 $b, r \in \mathbb{R}^1$ 和 $a \in \mathbb{R}^n$, 有下面的不变表达式:

$$b = \frac{1}{2}\langle p, B(q, p)\rangle, \tag{5.23}$$

$$r = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q)\rangle, \quad a = B(q, q) - \langle p, B(q, q)\rangle q. \tag{5.24}$$

实际上, (5.22) 中只有那些本质的项才在下面表达式中出现①.

我们寻求代表中心流形 $y = V(u)$ 的 Taylor 展开式的二次项

$$V(u) = \frac{1}{2}w_2u^2 + O(u^3), \tag{5.25}$$

这里 $w_2 \in \mathbb{R}^n$ 是未知向量. 由于对小的 $u, w \in T^{su}$, $V(u) \in T^{su}$ 得 $\langle p, w_2\rangle = 0$.

现在如例 5.1 进行. 中心流形 $W^c$ 的不变性意味着

$$\dot{y} = V_u(u)\dot{u}, \tag{5.26}$$

其中 $\dot{y}$ 和 $\dot{u}$ 满足 (5.22). 将表达式 (5.25) 代入 (5.26) 并合并 $u^2$ 项, 则向量 $w_2$ 应该满足方程

$$Aw_2 = -a. \tag{5.27}$$

但是, 这里有个问题, 因为 $A$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中显然是不可逆的 ($\lambda = 0$ 是特征值). 这个困难容易克服. 注意到, 由于 $\langle p, \alpha\rangle = 0$, 有 $a \in T^{su}$. 对应于 $A$ 的线性变换在它的不变子空间 $T^{su}$ 上的限制是可逆的. 因此, 方程 (5.27) 有唯一解 $w_2 \in T^{su}$. 如果记这个解为

$$w_2 = -A^{\mathrm{INV}}a,$$

(5.22) 在中心流形上的限制取形式

$$\dot{u} = bu^2 + cu^3 + O(u^4),$$

其中 $b$ 由 (5.23) 定义且

$$c = r - \frac{1}{2}\langle p, B(q, A^{\mathrm{INV}}a)\rangle = \frac{1}{6}\langle p, C(q,q,q) - 3B(q, A^{\mathrm{INV}}a))\rangle. \tag{5.28}$$

为了验证折分支是非退化的, 仅仅需要利用 (5.23) 计算 $b$. 如果 $b = 0$, 系数 $c$ 必须计算 (见 8.2 节).

在实践中, 对 $w \in \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathbb{R}^1$, 可用求解 $(n+1)$ 维加边系统

$$\begin{pmatrix} A & q \\ p^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

来计算 $w = A^{\mathrm{INV}}a$. 这里 $q$ 和 $p$ 分别是上面定义的 $A$ 和 $A^{\mathrm{T}}$ 对应它们单零特征值的已经被标准化了的特征向量.

**引理 5.3** 加边系统 (5.29) 的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵是非奇异的.

① 例如, (5.22) 中两个方程的项 $O(\|y\|^2)$ 在下文是无关紧要的, 因为它们并不影响限制方程的二次项和三次项.

**证明**　事实上, 由

$$\begin{pmatrix} A & q \\ p^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

得 $\eta=0$ 和 $\xi=0$, 故这个加边矩阵的零空间是平凡的. 为验证这点, 假设 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^1$ 构成 (5.30) 的解, 即

$$\begin{cases} A\eta+\xi q=0, \\ \langle p,\eta\rangle=0. \end{cases}$$

第一个方程关于 $p$ 取数量积, 得

$$\langle p,A\eta\rangle+\xi\langle p,q\rangle=0.$$

但是, $\langle p,q\rangle=1$, 而 $\langle p,A\eta\rangle=\langle A^{\mathrm{T}}p,\eta\rangle=0$. 因此, $\xi=0$, 第一个方程变成

$$A\eta=0.$$

这表明 $\eta$ 是 $A$ 的零向量, 由此, 对某个 $\gamma\in\mathbb{R}^1$, 应有 $\eta=\gamma q$. 于是由第二个方程得

$$\gamma\langle p,q\rangle=0.$$

由于 $\langle p,q\rangle=1$, 得知 $\gamma=0$, 故 $\eta=0$. 因此, 零不是加边矩阵的特征值, 这个矩阵可以按通常意义求逆. □

现在假定 $(w,u)^{\mathrm{T}}$ 是由引理 5.3 保证的 (5.29) 的唯一解. 等价地, 是

$$\begin{cases} Aw+uq=a, \\ \langle p,w\rangle=0 \end{cases}$$

的唯一解. 因此, 按照第二个方程, $w\in T^{su}$. 第一个方程关于 $p$ 取数量积, 得

$$\langle p,Aw\rangle+u\langle p,q\rangle=\langle p,a\rangle.$$

如前, $\langle p,q\rangle=1,\langle p,a\rangle=0$ 以及 $\langle p,Aw\rangle=\langle A^{\mathrm{T}}p,w\rangle=0$, 因此, $u=0$ 且

$$Aw=a.$$

因此, 由定义, $w=A^{\mathrm{INV}}a$.

**注**　(1) 借助于 $F$ 的方向导数有 $b,r,a$ 下面的表达式:

$$b=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\langle p,F(uq)\rangle\bigg|_{u=0},\qquad r=\frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial u^3}\langle p,F(uq)\rangle\bigg|_{u=0},\quad a=\frac{\partial^2}{\partial u^2}F(uq)\bigg|_{u=0}-\sigma q,$$

这里, 代替 $F$, (5.1) 的右端的 $f$ 被用到.

(2) $q$ 标准化的选择是无关紧要. 事实上, 如果以 $\gamma q$ 代替 $q$, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ 是某个非零数. 但有关的标准化 $\langle p, q\rangle = 1$ 仍保持, 限制方程的系数将有变化, 虽然这个方程可以用变换 $u \mapsto \dfrac{1}{\gamma}u$ 容易地变回到原来的形式. 对二次项和三次项这个容易从 (5.28) 和 (5.29) 看出. ◇

2. Hopf 分支

在这种情形, $A$ 有一对单复特征值在虚轴上, $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0 > 0$,, 这些是满足 $\operatorname{Re}\lambda = 0$ 的仅有的两个特征值. 令 $q \in \mathbb{C}^n$ 为对应于 $\lambda_1$ 的复特征向量:

$$Aq = \mathrm{i}\omega_0 q, \quad A\bar{q} = -\mathrm{i}\omega_0 \bar{q}$$

(如同折分支情形, 它的特殊的标准化是不重要的). 也引入伴随特征向量 $p \in \mathbb{C}^n$, 它有性质:

$$A^{\mathrm{T}}p = -\mathrm{i}\omega_0 p, \quad A^{\mathrm{T}}\bar{p} = \mathrm{i}\omega_0 \bar{p},$$

且满足标准化条件

$$\langle p, q\rangle = 1, \tag{5.31}$$

这里 $\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i q_i$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中标准数量积 (关于第二个变量是线性的). 对应于 $\pm \mathrm{i}\omega_0$ 的临界实特征空间 $T^c$ 现在是二维且由 $\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}$ 张成. 对应于 $A$ 的所有其他异于 $\pm \mathrm{i}\omega_0$ 的特征值的实特征空间 $T^{su}$ 是 $(n-2)$ 维. 下面的引理成立.

**引理 5.4** $y \in T^{su}$ 当且仅当 $\langle p, q\rangle = 0$. □

这里 $y \in \mathbb{R}^n$ 是实的, 而 $p \in \mathbb{C}^n$ 是复的. 因此引理的条件导致对 $y$ 有两个实约束 ($\langle p, y\rangle$ 的实部和虚部必须为零). 如同前一情形, 这个引理允许我们把任何一个 $x \in \mathbb{R}^n$ 分解为

$$x = zq + \bar{z}\,\bar{q} + y,$$

其中 $z \in \mathbb{C}^1$ 且 $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$, $y \in T^{su}$. 复变量 $z$ 是 $T^c$ 上的坐标. 有

$$\begin{cases} z = \langle p, x\rangle, \\ y = x - \langle p, x\rangle q - \langle \bar{p}, x\rangle \bar{q} \end{cases} \tag{5.32}$$

(注意, $\langle p, \bar{q}\rangle = 0$, 见引理 3.3). 在 (5.32) 坐标系下, 系统 (5.16) 有形式

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y)\rangle, \\ \dot{y} = Ay + F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y) \\ \qquad -\langle p, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y)\rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y)\rangle \bar{q}. \end{cases} \tag{5.33}$$

系统 (5.33) 是 $(n+2)$ 维的, 但是必须记住两个加在 $y$ 上的实约束.

利用 (5.17) 以及特征向量的定义, 可以写 (5.33) 为形式

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} \\ \qquad + z\langle p, B(q,y)\rangle + \bar{z}\langle p, B(\bar{q},y)\rangle + \cdots, \\ \dot{y} = Ay + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \cdots, \end{cases} \tag{5.34}$$

这里 $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}^1, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$, 并用到了 $\mathbb{C}^n$ 中的数量积. 如通常, 只显示有关系的项. (5.34) 中的复数和向量可以由下面公式计算:

$$G_{20} = \langle p, B(q,q)\rangle, \quad G_{11} = \langle p, B(q,\bar{q})\rangle, \quad G_{02} = \langle p, B(\bar{q},\bar{q})\rangle, \tag{5.35}$$

$$G_{21} = \langle p, C(q,q,\bar{q})\rangle \tag{5.36}$$

和

$$\begin{cases} H_{20} = B(q,q) - \langle p, B(q,q)\rangle q - \langle \bar{p}, B(q,q)\rangle \bar{q}, \\ H_{11} = B(q,\bar{q}) - \langle p, B(q,\bar{q})\rangle q - \langle \bar{p}, B(q,\bar{q})\rangle \bar{q}. \end{cases} \tag{5.37}$$

由于 $y \in \mathbb{R}^n$, 有 $\bar{H}_{ij} = H_{ji}$.

中心流形 $W^c$ 现在有表达式

$$y = V(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

其中 $\langle p, w_{ij}\rangle = 0$. 合并 $W^c$ 的不变性条件中的关于 $z$ 和 $\bar{z}$ 的二次项, 得

$$\dot{y} = V_z\dot{z} + V_{\bar{z}}\dot{\bar{z}},$$

可以指出, 未知向量 $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ 应该满足线性方程组

$$\begin{cases} (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)w_{20} = H_{20}, \\ -Aw_{11} = H_{11}, \\ (-2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)\omega_{02} = H_{02}, \end{cases}$$

这里 $I_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵. 因为 $0, \pm 2\mathrm{i}\omega_0$ 不是 $A$ 的特征值, 上面左端的矩阵在通常意义下可逆, 故这些方程有唯一解 $w_{20}, w_{11}$ 和 $w_{02}$. 因此, 在这情形甚至比折分支情形更简单. 在 $W^c$ 上的限制方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{z} =& \mathrm{i}\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 \\ &+ \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle p, B(q, A^{-1}H_{11})\rangle \\ &+ \langle p, B(\bar{q}, (2\mathrm{i}\omega_0 E - A)^{-1}H_{20})\rangle)z^2\bar{z} + \cdots, \end{aligned} \tag{5.38}$$

其中用了 $\mathbb{C}^n$ 中的数量积.

下面的任务是如第 3 章所述计算限制系统 (5.38) 的第一个 Lyapunov 系数. 将 (5.35)~(5.37) 代入 (5.38), 考虑到恒等式

$$A^{-1}q = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_0}q, \quad A^{-1}\bar{q} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega_0}\bar{q}, \quad (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1}q = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_0}q,$$

$$(2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{3\mathrm{i}\omega_0}\bar{q},$$

(5.38) 变成方程

$$\dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \cdots,$$

其中

$$g_{20} = \langle p, B(q,q)\rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q,\bar{q})\rangle,$$

以及

$$\begin{aligned} g_{21} = &\langle p, C(q,q,\bar{q})\rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q,q))\rangle \\ &+ \frac{1}{\mathrm{i}\omega_0}\langle p, B(q,q)\rangle\langle p, B(q,\bar{q})\rangle - \frac{2}{\mathrm{i}\omega_0}|\langle p, B(q,\bar{q})\rangle|^2 - \frac{1}{3\mathrm{i}\omega_0}|\langle p, B(\bar{q},\bar{q})\rangle|^2. \end{aligned}$$

注意, 最后一行各项都是纯虚数, 而第三行包含有与积 $g_{20}g_{11}$ 相同的数量积. 因此, 应用公式 (3.20) 得

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2}\mathrm{Re}(\mathrm{i}g_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

这给出了第一个 Lyapunov 系数的*不变表达式*:

$$\begin{aligned} l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}\Big[&\langle p, C(q,q,\bar{q})\rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle \\ &+\langle p, B(\bar{q}, (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q,q))\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{5.39}$$

这个公式看上去对 $n$ 维系统 ($n \geqslant 2$) 的 Hopf 分支的分析处理最方便. 它不要求系统先要变换到特征基上, 而且用原来的线性项、二次项和三次项表示 $l_1(0)$, 只假定 Jacobi 矩阵的临界 (通常的和伴随的) 特征向量是已知的. 第 10 章将指出如何使用这个公式对 $l_1(0)$ 进行数值计算.

**例 5.4**(反馈控制系统中的 Hopf 分支) 考虑下面依赖于参数 $(\alpha, \beta)$ 的非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \alpha\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y(1-y) = 0,$$

这是描述 Lure 型简单的反馈控制系统. 引入 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}$ 以及 $x_3 = \dot{x}_2$, 可以把方程写为等价的三阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - \beta x_2 - x_1 + x_1^2. \end{cases} \tag{5.40}$$

对所有 $(\alpha,\beta)$ 值, 系统 (5.40) 有两个平衡点 $x^{(0)} = (0,0,0)$ 和 $x^{(1)} = (1,0,0)$. 我们分析在原点的平衡点.(5.40) 在 $x^{(0)}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

有特征方程

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0.$$

为了寻找 $x^{(0)}$ 的对应于 Hopf 分支的 $\alpha$ 和 $\beta$ 之间的关系, 将 $\lambda = \mathrm{i}\omega$ 代入最后一个方程. 若

$$\alpha = \alpha_0(\beta) = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0. \tag{5.41}$$

则特征多项式有一对纯虚特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\omega$, $\omega > 0$. 容易验证, 当 $\alpha > \alpha_0$ 时, 原点稳定, 当 $\alpha < \alpha_0$ 时不稳定. 稳定性的转变起因于单对复共轭特征值在 $\lambda = \pm\mathrm{i}\omega$ 穿过虚轴, 这里

$$\omega^2 = \beta.$$

穿过的速度不为零, 且第三个特征值 $\lambda_3$ 在临界参数值附近保持为负值①. 因此, Hopf 分支发生. 为了分析这个分支 (即确定极限环分支的方向), 必须计算在临界参数值在中心流形上的限制系统的第一个 Lyapunov 系数 $l_1(0)$. 如果 $l_1(0) < 0$, 分支是超临界, 且 $\alpha < \alpha_0(\beta)$ 时从原点分支出唯一稳定极限环. 如我们将看到的, 这实际上是系统 (5.40) 的情形.

因此, 把 $\alpha$ 固定在由 (5.41) 给出的临界值 $\alpha_0$, 而让 $\beta$ 自由变动. 注意, Jacobi 矩阵的元素是 $\omega^2$ 的有理函数:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\omega^2 & -\dfrac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}.$$

---

① 在临界参数值 (5.41), $\lambda_3 = -\dfrac{1}{\beta} < 0$.

由于矩阵 $A$ 不是实标准型, 我们将用投影方法进行.

容易验证, 向量

$$q \sim \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

分别是 $A$ 和 $A^{\mathrm{T}}$ 对应于特征值 $i\omega$ 和 $-i\omega$:

$$Aq = i\omega q, \quad A^{\mathrm{T}} p = i\omega p$$

的特征向量. 为了达到适当的标准化 (5.31), 应该尺度化这些向量. 例如下面的尺度化就够了:

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega(\omega^3 + i)} \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}.$$

线性部分的分析现在已经完成了.

(5.40) 中只有一项非线性项 (二次项). 因此, 由两个向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ 定义的双线性函数 $B(x, y)$(见 (5.18)) 可表示为

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

而 $C(x, y, z) \equiv 0$. 因此

$$B(q, q) = B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2q_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求解对应的线性系统得

$$s = A^{-1} B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$r = (2i\omega E - A)^{-1} B(q, q) = -\frac{2}{3(1 + 2i\omega^3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\omega \\ -4\omega^2 \end{pmatrix}.$$

最后, 由公式 (5.39) 求得第一个 Lyapunov 系数

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega}\mathrm{Re}(-4\bar{p}_3 q_1 s_1 + 2\bar{p}_3\bar{q}_1 r_1) = -\frac{\omega^3(1+8\omega^6)}{(1+4\omega^6)(1+\omega^6)}.$$

用代换 $\omega^2 = \beta$, 现在就可回到参数 $\beta$:

$$l_1(0) = -\frac{(1+8\beta^3)\beta\sqrt{\beta}}{(1+4\beta^3)(1+\beta^3)} < 0.$$

显然, Lyapunov 系数对所有正 $\beta$ 都是负的. 因此, Hopf 分支是非退化的且永远是超临界. ◇

### 5.4.2　映射的限制规范化方程

现在把投影方法开发到离散–时间情形. 这时可以把系统 (5.6) 写为

$$\tilde{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.42}$$

这里 $F(x) = O(\|x\|^2)$ 是光滑函数, 它的 Taylor 展开写为形式 (5.17). 下面的计算类似于上一节.

1. 折分支和翻转分支

考虑折分支和翻转分支. 在每一个情形, $A$ 有单临界特征值 (乘子) $\lambda_1 = \pm 1$, 对应的临界特征空间 $T^c$ 是一维的, 它是由满足 $Aq = \mu_1 q$ 的特征向量 $q \in \mathbb{R}^n$ 所张成. 设 $p \in \mathbb{R}^n$ 是伴随特征向量, 即有 $A^{\mathrm{T}}p = \mu_1 p$, 其中 $A^{\mathrm{T}}$ 是 $A$ 的转置矩阵. 将 $p$ 关于 $q$ 标准化即满足 $\langle p, q\rangle = 1$. 如同上一节, 设 $T^{su}$ 是 $A$ 对应于所有异于 $\mu_1$ 的特征值的 $(n-1)$ 维线性特征空间. 应用引理 5.2 到矩阵 $(A - \mu_1 E)$ 并注意到它与矩阵 $A$ 有公共有的不变空间, 得知 $y \in T^{su}$ 当且仅当 $\langle p, y\rangle = 0$.

现在可以 “分解” 任何向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 为

$$x = uq + y,$$

其中 $uq \in T^c$, $y \in T^{su}$, 且

$$\begin{cases} u = \langle p, x\rangle, \\ y = x - \langle p, x\rangle q. \end{cases}$$

在坐标 $(u, y)$ 下, 映射 (5.42) 可写为

$$\begin{cases} \tilde{u} = \mu_1 u + \langle p, F(uq+y)\rangle, \\ \tilde{y} = Ay + F(uq+y) - \langle p, F(uq+y)\rangle q. \end{cases} \tag{5.43}$$

应用 Taylor 展开式 (5.17), 可以将 (5.43) 写为形式

$$\begin{cases} \tilde{u} = \mu_1 u + bu^2 + u\langle p, B(q,y)\rangle + ru^3 + \cdots, \\ \tilde{y} = Ay + \frac{1}{2}au^2 + \cdots, \end{cases} \tag{5.44}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^n, b, r \in \mathbb{R}^1, a \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准数量积. 这里的 $b, r$ 和 $a$ 是 (5.23) 和 (5.24) 所给.

(5.44) 的中心流形有表达式

$$y = V(u) = \frac{1}{2}w_2 u^2 + O(u^3),$$

其中 $w_2 \in T^{su} \subset \mathbb{R}^n$, 故 $\langle p, w_2 \rangle = 0$. 向量 $w_2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足折分支和翻转分支情形的方程

$$(A - I_n)w_2 = -a. \tag{5.45}$$

从这个方程由比较关于 $W^c$,

$$\tilde{y} = V(\tilde{u}),$$

的不变性条件中的二次项系数得到, 其中 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{y}$ 由 (5.44) 所给.

在折分支情形, 矩阵 $(A - I_n)$ 由于 $\mu_1 = 1$ 是 $A$ 的特征值而在 $\mathbb{R}^n$ 中不可逆. 如同上一节, 由于 $\langle p, a \rangle = 0$, 故 $a \in T^{su}$. 对应于 $(A - I_n)$ 的线性变换在它的不变子空间 $T^{su}$ 上的限制是可逆的, 故方程 (5.45) 有唯一解 $w_2 \in T^{su}$. 如果记这个解为

$$w_2 = -(A - I_n)^{\mathrm{INV}} a,$$

(5.44) 在中心流形上的限制取形式

$$\tilde{u} = u + bu^2 + cu^3 + O(u^4),$$

其中 $u^2$ 项前面的系数

$$b = \frac{1}{2}\langle p, B(q;p)\rangle \tag{5.46}$$

决定折分支的非退化性. 如果 $b = 0$, 则三次项 $u^3$ 前面的系数

$$c = \frac{1}{6}(\langle p, C(q,q,q) - 3B(q, (A - I_n)^{\mathrm{INV}} a)\rangle). \tag{5.47}$$

应该考虑. 如同连续-时间情形, 可以对 $w \in \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathbb{R}^1$ 求解下面一个 $(n+1)$ 维带边系统

$$\begin{pmatrix} A - I_n & q \\ p^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

来计算 $w = (A - I_n)^{\mathrm{INV}}$.

在翻转分支情形, 矩阵 $(A - I_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中可逆, 因为 $\lambda = 1$ 不是 $A$ 的特征值. 因此方程 (5.45) 可以直接求解, 得 $w_2 = -(A - I_n)^{-1}a$, 以及 (5.44) 在中心流形上的限制取形式

$$\tilde{u} = -u + bu^2 + \left(r - \frac{1}{2}\langle p, B(q, (A - I_n)^{-1}a)\rangle\right)u^3 + O(u^4),$$

这里 $b, r$ 和 $a$ 仍由 (5.23) 和 (5.24) 给出. 这个限制映射可以进一步简化. 利用 (5.23) 和恒等式

$$(A - I_n)^{-1}q = -\frac{1}{2}q,$$

可以将限制映射写为

$$\tilde{u} = -u + a_0u^2 + b_0u^3 + O(u^4), \tag{5.48}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2}\langle p, B(q, q)\rangle$$

以及

$$b_0 = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q)\rangle - \frac{1}{4}(\langle p, B(q, q)\rangle)^2 - \frac{1}{2}\langle p, B(q, (A - I_n)^{-1}B(q, q))\rangle.$$

在 4.5 节已经指出映射 (5.48) 可以变换成规范形

$$\tilde{\xi} = -\xi + c\xi^3 + O(\xi^4),$$

这里

$$c = \alpha_0^2 + b_0$$

(见公式 (4.16)). 因此, 临界规范形系数 $c$ 决定翻转分支的非退化性, 且可以预测周期 2 环的分支方向, 这个系数由下面不变公式给出

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q)\rangle - \frac{1}{2}\langle p, B(q, (A - I_n)^{-1}B(q, q))\rangle. \tag{5.49}$$

2. Neimark-Sacker 分支

在这种情形, $A$ 有单对复特征值 (乘子) 在单位圆上: $\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}, 0 < \theta_0 < \pi$, 且这两个乘子是 $A$ 满足 $|\mu| = 1$ 仅有的乘子. 设 $q \in \mathbb{C}^n$ 是对应 $\mu_1$ 的复特征向量:

$$Aq = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}q, \quad A\bar{q} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}\bar{q}.$$

也引入伴随特征向量$p \in \mathbb{C}^n$, 它有性质

$$A^{\mathrm{T}}p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}p, \quad A^{\mathrm{T}}\bar{p} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\bar{p}$$

且满足标准化

$$\langle p, q\rangle = 1,$$

其中 $\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i q_i$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中标准数量积. 对应 $\mu_{1,2}$ 的临界实特征空间 $T^c$ 是由 $\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}$ 张成的二维空间. $A$ 对应异于 $\mu_{1,2}$ 的其他特征值的实特征空间 $T^{su}$ 是 $(n-2)$ 维的. 引理 5.4 仍成立, 即 $y \in T^{su}$ 当且仅当 $\langle p, y\rangle = 0$. 注意, $y \in \mathbb{R}^n$ 是实的, 而 $p \in \mathbb{C}^n$ 是复的. 因此, 条件 $\langle p, y\rangle = 0$ 导致对 $y$ 的两个实约束. 如在上一节, 分解 $x \in \mathbb{R}^n$ 为

$$x = zq + \bar{z}\,\bar{q} + y,$$

其中 $z \in \mathbb{C}^1$, 以及 $zq + \bar{z}\,\bar{q} \in T^c$, $y \in T^{su}$. 复变量 $z$ 是 $T^c$ 上的坐标. 有

$$\begin{cases} z = \langle p, x\rangle, \\ y = x - \langle p, x\rangle q - \langle \bar{p}, x\rangle \bar{q}. \end{cases}$$

在这个坐标下, 映射 (5.42) 取形式

$$\begin{cases} \tilde{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} z + \langle p, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y)\rangle, \\ \tilde{y} = Ay + F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y)\rangle q \\ \qquad -\langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + y)\rangle \bar{q}. \end{cases} \tag{5.50}$$

系统 (5.50) 是 $(n+2)$ 维的, 但是, 必须记住加在 $y$ 上的两个实约束. 这个系统可写为

$$\begin{cases} \tilde{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} z\bar{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 z\bar{z} \\ \qquad + z\langle p, B(q, y)\rangle + \bar{z}\langle p, B(\bar{q}, y)\rangle + \cdots, \\ \tilde{y} = Ay + \frac{1}{2} H_{20} z^2 + H_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} H_{02} \bar{z}^2 + \cdots, \end{cases} \tag{5.51}$$

这里 $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}^1; H_{ij} = \bar{H}_{ji} \in \mathbb{C}^n$, 并用到了 $\mathbb{C}^n$ 中的数量积. (5.51) 中的复数和向量可以用公式 (5.35)~(5.37) 计算.

(5.51) 中的中心流形有表达式

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} w_{20} z^2 + w_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} w_{02} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

其中 $\langle p, w_{ij}\rangle = 0$. 向量 $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ 可以从线性方程

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0} I_n - A) w_{20} = H_{20}, \\ (I_n - A) w_{11} = H_{11}, \\ (\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0} I_n - A) w_{02} = H_{02} \end{cases}$$

求得. 这些方程有唯一解. 由于 1 不是 $A$ 的特征值 ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\neq 1$), 矩阵 $(I_n-A)$ 可逆. 如果

$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}\neq 1,$$

矩阵 $(\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中也可逆, 因为 $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\theta_0}$ 不是 $A$ 的特征值. 由此, 一般地①, 限制映射可写为

$$\begin{aligned}\tilde{z}=&\mathrm{i}\omega_0 z+\frac{1}{2}G_{20}z^2+G_{11}z\bar{z}+\frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2+\frac{1}{2}(G_{21}+2\langle p,B(q,(I_n-A)^{-1}H_{11})\rangle\\&+\langle p,B(\bar{q},(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)^{-1}H_{20})\rangle)z^2\bar{z}+\cdots,\end{aligned}\tag{5.52}$$

在这个一般情况, 将 (5.35)~(5.37) 代入 (5.52), 并考虑恒等式

$$(I_n-A)^{-1}q=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}q,\quad (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)^{-1}q=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}-1}q,$$

和

$$(I_n-A)^{-1}\bar{q}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}}\bar{q},\quad (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)^{-1}\bar{q}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}-1}\bar{q},$$

将 (5.52) 映为

$$\tilde{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}z+\frac{1}{2}g_{20}z^2+g_{11}z\bar{z}+\frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2+g_{21}z^2\bar{z}+\cdots,\tag{5.53}$$

这里

$$g_{20}=\langle p,B(q,q)\rangle,\quad g_{11}=\langle p,B(q,\bar{q})\rangle,\quad g_{02}=\langle p,B(\bar{q},\bar{q})\rangle,$$

以及

$$\begin{aligned}g_{21}=&\langle p,C(q,q,\bar{q})\rangle+2\langle p,B(q,(I_n-A)^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle\\&+\langle p,B(\bar{q},(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)^{-1}B(q,q))\rangle+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}\langle p,B(q,q)\rangle\ \langle p,B(q,\bar{q})\rangle\\&-\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}}|\langle p,B(q,\bar{q})\rangle|^2-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}-1}|\langle p,B(\bar{q},\bar{q})\rangle|^2.\end{aligned}$$

如第 4 章指出的, 在不出现强共振情况下, 即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0}\neq 1,\quad 对\ k=1,2,3,4,$$

限制映射 (5.53) 可变换成形式

$$\tilde{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}z(1+d_1|z|^2)+O(|z|^4),$$

---

① 如果 $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}=1$, 即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}$, 则 $w_{20}=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}I_n-A)^{\mathrm{INV}}H_{20}, w_{02}=\bar{w}_{20}$, 这里 INV 是 $T^{su}$ 的逆.

其中实数 $d = \mathrm{Re}d_1$ 决定闭不变曲线的分支方向, 它可由下面公式来计算:

$$d = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}g_{21}}{2}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}}{2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})}g_{20}g_{11}\right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2.$$

利用这个公式以及上面定义的系数, 得到下面的不变表达式

$$\begin{aligned} d =& \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}[\langle p, C(q,q,\bar{q})\rangle + 2\langle p, B(q,(I_n - A)^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle \\ &+ \langle p, B(\bar{q},(e^{2i\theta_0}I_n - A)^{-1}B(q,q))\rangle]\}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

可以用这个紧密的公式去检验 $n(n \geqslant 2)$ 维映射在非共振 Neimark-Sacker 分支的非线性项的非退化性. 我们也指出, 所有的计算可以在原来的基上进行.

## 5.5 练　　习

1. (中心流形的有限光滑性) 考虑系统 (Arrowsmith, Place, 1990)

$$\begin{cases} \dot{x} = xz - x^3, \\ \dot{y} = y + x^4, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

求证: 这个系统有中心流形 $y = V(x,z)$, 其中 $V$ 当 $z < \frac{1}{6}$ 时是 $x$ 的 $C^6$ 函数, 但当 $z < \frac{1}{4}$ 时仅为 $x$ 的 $C^4$ 函数. 提示: 求得表达式 $V(x,z) = \sum\limits_{j=0} a_j(z)x^j$ 的系数 $a_j(z)$, 并分析它们的分母.

2. (Lorenz 系统中的非 Neimark-Sacker 分支) 证明: 极限环 Neimark-Sacker 分支永远不会出现在 Lorenz(1963) 系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{E.1}$$

这里参数 $(\sigma, r, b)$ 是正数. 提示: 利用乘子积的公式, 并注意到事实 $\mathrm{div}\, f = -(\sigma + b + 1) < 0$, 这里 $f$ 是 (E.1) 的右端给的向量场.

3. 证明引理 5.2.

4. 验证

$$P_c^2 = P_c, \quad P_{su}^2 = P_{su}, \quad P_cP_{su} = P_{su}P_c = 0,$$

这里 $P_c$ 和 $P_{su}$ 是引理 5.2 后面定义的投影算子.

5. (Moon 和 Rand (1985) 的反馈控制模型) 求证：系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - xv, \\ \dot{v} = -v + \alpha x^2 \end{cases}$$

的原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 当 $\alpha < 0$ 时是渐近稳定, $\alpha > 0$ 时不稳定.

6. (Lorenz 系统中的中心流形) 在原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 附近, 对固定的 $(\sigma, b)$ 以及接近于 $r_0 = 1$ 的 $r$, 计算 Lorenz 系统 (E.1) 的一维中心流形族的二次近似. 然后, 计算限制系统直到 $\xi$ 的三次项. 提示：见第 7 章.

7. (Lorenz 系统中的 Hopf 分支)(a) 求证：对固定的 $b > 0, \sigma > b + 1$ 以及

$$r_1 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \tag{E.2}$$

(E.1) 的非平凡平衡点具有 Hopf 分支.

(b) 求证：这个 Hopf 分支是亚临界的, 因此, 当 $r < r_1$ 时产生一个唯一稳定鞍点极限环 (Roshchin, 1978). 提示：参见文献 (Shil′nikov,Shil′nikov,Turaev,Chua, 2001：879-880).

(i) 将 (E.1) 写为单个三阶方程

$$\dddot{x} + (\sigma + b + 1)\ddot{x} + b(1 + \sigma)\dot{x} + b\sigma(1 - r)x = \frac{(1 + \sigma)\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3.$$

(ii) 引入新坐标 $\xi = x - x_0$, 这里 $x_0 = \sqrt{b(r - 1)}$, 将原点移到平衡点, 由此得方程

$$\dddot{\xi} + (\sigma + b + 1)\ddot{\xi} + [b(1 + \sigma) + x_0^2]\dot{\xi} + [b\sigma(1 - r) + 3\sigma x_0^2]\xi = f(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}), \tag{E.3}$$

这里

$$f(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) = -3\sigma x_0\xi^2 - 2x_0\xi\dot{\xi} + \frac{1 + \sigma}{x_0}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{x_0}\dot{\xi}\ddot{\xi} - \sigma\xi^3 - \xi^2\dot{\xi} - \frac{1 + \sigma}{x_0^2}\xi\dot{\xi}^2 - \frac{1}{x_0^2}\xi\dot{\xi}\ddot{\xi} + \cdots,$$

其中的省略号表示 $(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})$ 所有的高阶项.

(iii) 把 (E.3) 重写为

$$\dot{U} = AU + F(U), \quad U = (\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3. \tag{E.4}$$

求 $A$ 对应于它的纯虚特征值的特征向量和伴随特征向量 (当 (E.2) 满足时).

(iv) 用 (5.39) 计算 (E.4) 的第一个 Lyapunov 系数 $l_1$. 代换 $\sigma = \sigma^* + b + 1$, 并证明对所有正的 $\sigma^*$ 和 $b$, $l_1$ 为正 (符号操作软件在这里有用, 但不是必要的).

8. 求证：原点 $(x,y)=(0,0)$ 是平面映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

的一个稳定不动点. 利用 (a) 变换到它的特征基 (提示: 参见文献 (Wiggins,1990: 207-209));(b) 5.4 节的投影方法. 提示：不要忘记矩阵 $(A-E)$ 在这情形是不可逆.

9. (重温 Hénon 映射) 考虑 Hénon(1976) 映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}.$$

求证：它的不动点的折分支和翻转分支 (见例 4.1) 对 $\beta \neq \pm 1$ 是非退化的.

10. (Golden 和 Ydstie (1988) 适应控制系统) (a) 求证：离散–时间动力系统

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ bx+k+yz \\ z - \dfrac{ky}{c+y^2}(bx+k+zy-1) \end{pmatrix}$$

有不动点 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1-b-k)$, 在

$$b_F = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4(c+1)}\right] k$$

具翻转分支, 以及在

$$b_{\mathrm{NS}} = -\frac{c+1}{c+2}$$

有 Neimark-Sacker 分支.

(b) 确定当 $b$ 增加并穿过 $b_F$ 时出现倍–周期分支的方向.

(c) 计算规范形系数并指出系统的 Neimark-Sacker 分支在参数 $b$ 的变化下可以是亚临界或者超临界, 取决于 $(c,k)$ 的值.

11. (Brussel 振子中的 Hopf 分支; 首先读附录 A) 在单位区间上的 Brussel 振子是有两个分量的反应扩散系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 X}{\partial r^2} + C - (B+1)X + X^2 Y, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \theta d\dfrac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + BX - X^2 Y, \end{cases}$$

其中 $X=X(r,t), Y=Y(r,t); r\in[0,1]; t\geqslant 0; A,B,d,\theta>0$(见第 1 章和文献 (Lefever,Prigogine, 1968)). 考虑 $X$ 和 $Y$ 在它们平衡点值在区间端点保持常数的情形:

$$X(0,t)=X(1,t)=C, \quad Y(0,t)=Y(1,t)=\frac{B}{C}.$$

固定

$$C_0 = 1, \quad \delta_0 = 2, \quad \theta_0 = \frac{1}{2},$$

求证在

$$B_0 = 1 + C_0^2 + \delta_0(1 + \theta_0) = 5$$

系统有超临界 Hopf 分支, 产生一个稳定极限环 (周期驻波). 提示: 参见文献 (Auchmuty,Nicolis,1976; Hassard et al.,1981)).

12. (Hopf 横截性条件) 设 $A(\alpha)$ 是依赖于参数的实 $(n \times n)$ 矩阵, 有一对单复特征值 $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm \mathrm{i}\omega(\alpha)$, $\omega(0) > 0$. 求证

$$\mu'(0) = \mathrm{Re}\langle p, A'(0)q\rangle,$$

其中 $q, p \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$A(0)q = \mathrm{i}\omega(0)q, \quad A^{\mathrm{T}}(0)p = -\mathrm{i}\omega(0)p, \quad \langle p, q\rangle = 1.$$

提示: 对方程 $A(\alpha)q(\alpha) = \lambda_1(\alpha)q(\alpha)$ 关于 $\alpha$ 在 $\alpha = 0$ 求导数, 然后对所得方程两端关于 $p$ 计算数量积.

## 5.6　附录 A: 反应扩散系统的 Hopf 分支

考虑反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A(\alpha)u + F(u, \alpha), \tag{A.1}$$

其中 $u = u(\xi, t)$ 是向量值函数, 它刻画 $n$ 个反应分量在一维空间 $\xi \in [0, \pi]$, 时间 $t \geqslant 0$ 时的分布. $D$ 是正对角矩阵, $A(\alpha)$ 是依赖于参数的矩阵, 以及 $F = O(||u|^2|)$ 是依赖于单个参数 $\alpha$ 的光滑函数. 假设对所有 $t \geqslant 0$, $u$ 满足 Dirichlet 边界条件:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{A.2}$$

如在第 1 章看到的, 系统 (A.1),(A.2) 在几个函数空间 $H$ 上定义了一个无穷维动力系统 $\{\mathbb{R}_+^1, H, \varphi_\alpha^t\}$. 可以取 $H$ 为在 $[0, \pi]$ 上二次连续可微在 $\xi = 0, \pi$ 上等于零, 关于范数 $||w|| = \langle w, w\rangle^{\frac{1}{2}}$ 完备的复值向量函数空间 $C_0^2([0, \pi]), \mathbb{C}^n)$, 这里 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 是在 $C_0^2([0, \pi], \mathbb{C}^n)$ 上由

$$\langle w, v\rangle = \frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\pi \left(\bar{w}_i v_i + \frac{\mathrm{d}\bar{w}_i}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}^2\bar{w}_i}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}\xi^2}\right)\mathrm{d}\xi \tag{A.3}$$

定义的数量积, 其中常数 $\mu_0 > 0$ 以后说明. 由连续性这个数量积对一切 $u, v \in H$ 有定义. 因此, 引入的 $H$ 是一个 Hilbert 空间①. 当然, (A.1),(A.2) 在 $H$ 的实子空间上也定义了一个动力系统. 事实上, $\{\mathbb{R}^1_+, H, \varphi^t_\alpha\}$ 的任何以 $u_0 \in H$ 为初始点的轨道当 $t > 0$ 时属于 $C^2_0([0, \pi], \mathbb{C}^n)$, 且

$$u(\xi, t) = (\varphi'_\alpha u)(\xi)$$

是 (A.1),(A.2) 当 $t > 0$ 时的古典解.

显然, $u_0(\xi) \equiv 0$ 是 (A.1) 的驰定解. (A.1) 的线性部分定义一个线性算子

$$M_\alpha v = D\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + A(\alpha)v, \tag{A.4}$$

它在 $H$ 可扩展成闭算子 $M_\alpha$. 由

$$M^*_\alpha u = D\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + A^{\mathrm{T}}(\alpha)u \tag{A.5}$$

定义的算子可扩展成 $H$ 中的闭伴随算子$M^*_\alpha$, 具特征性质

$$\langle u, M_\alpha v\rangle = \langle M^*_\alpha u, v\rangle,$$

当两端都有定义. $M_\alpha$ 的特征值 $\lambda_k$ 是对某个特征函数 $\psi_k$ 满足 $M_\alpha\psi_k = \lambda_k\psi_k$ 的复数. 等价地, 特征值和特征函数满足下面的线性边值谱问题:

$$D\frac{\mathrm{d}^2\psi_k}{\mathrm{d}\xi^2} + A(\alpha)\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad \psi_k(0) = \psi_k(\pi) = 0.$$

$M_\alpha$ 的谱是由所有特征值组成. 存在可数多个特征值. 在这情形任何一个特征函数有形式

$$\psi_k(\xi) = V_k \sin k\xi,$$

对某整数 $k \geqslant 1$. 向量 $V_k \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$(-k^2 D + A(\alpha))V_k = \lambda_k V_k.$$

假设在 $\alpha = 0$ 算子 $M_\alpha$ 有一对纯虚特征值 $\pm\mathrm{i}\omega_0$, 而所有其他的特征值都严格在 $\mathbb{C}^1$ 的左半平面. 假定在虚轴上的特征值对应于 $k = k_0$, 而 $\mathrm{i}\omega_0$ 是 $(-k_0^2 D + A(0))$ 的单特征值. $M_0$ 的临界特征空间 $T^c \subset H$ 是由复函数

$$q(\xi) = V \sin k_0\xi$$

① 它的元素是定义在区间上的连续向量值函数.

的实部和虚部所张成, 这里 $V \in \mathbb{C}^n$ 是对应于 $\mathrm{i}\omega_0$ 的特征向量.

对所考虑的这类系统, 实际上, 对更一般的无穷维动力系统, 中心流形定理仍成立 (见附录 B 中的文献评注). 在基本假设下, 存在系统 $\{\mathbb{R}^1_+, H, \varphi^t_\alpha\}$ 由 (A.1),(A.2) 定义的依赖于参数 $\alpha$ 的二维局部不变流形 $W^c_\alpha \subset H$. 按照 $H$ 的范数它是局部吸引的, 且在 $\alpha = 0$ 与 $T^c$ 相切. 此外, 这个流形是由二次连续可微实函数所组成. 系统在流形 $W^c_\alpha$ 上的限制是由两个依赖于 $\alpha$ 的常微分方程的光滑系统给出. 因此, 这个限制系统在 $\alpha = 0$ 一般具有 Hopf 分支, 并在这参数值附近出现唯一极限环. 这个分支是由第一个 Lyapunov 系数所确定. 如果分支是超临界的, 出现的环在 $W^c_\alpha$ 内是稳定的, 因此, 它是 (A.1),(A.2) 的在 $H$ 范数下稳定周期轨道. 这个环刻画了反应扩散系统的空间、非齐次、时间–周期解. 这种类型的解有时称为**时空耗散结构** (**驻波**).

值得注意的是, 在有限维推导出的第一个 Lyapunov 系数的公式 (5.39) 几乎可完全应用在无穷维情形. 首先, 需要伴随特征函数 $p : M_0^* p = -\mathrm{i}\omega_0 p$. 它由

$$p(\xi) = W \sin k_0 \xi$$

给出, 其中 $(-k_0^2 D + A^{\mathrm{T}}(0))W = -\mathrm{i}\omega_0 W, W \in \mathbb{C}^n$. 自由选择 $V$ 和 $W$ 使得

$$\langle p, q \rangle = 1 \tag{A.6}$$

这是一个包含 (伴随) 特征函数的数量积 (A.3) 的有用且简单的性质, 就是说, $H$ 中这样一个数量积和 $L_2$ 中对应的的数量积成比例:

$$\langle p, u \rangle = \frac{1}{\mu_0}(1 + k_0^2 + k_0^4)\langle p, u \rangle_{L_2},$$

其中

$$\langle p, u \rangle_{L_2} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} \bar{p}_i(\xi) u_i(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

因此, 如果假设

$$\mu_0 = 1 + k_0^2 + k_0^4,$$

所有数量积可在 $L_2$ 中计算. 由标准化 (A.6) 得知

$$\langle W, V \rangle_{\mathbb{C}^n} = \frac{2}{\pi}. \tag{A.7}$$

现在可以如同 5.4 节那样分解任何函数 $u \in H$(特别, 对应于 (A.1),(A.2) 的解的光滑函数), 这是因为类似的引理 5.4 对算子 $M_0$ 成立:

$$u = zq + \bar{z}\,\bar{q} + v,$$

其中 $z \in \mathbb{C}^1, v \in H, \langle p, v\rangle = 0$. 因此, 可以将 (A.1),(A.2) 写为形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + v, 0)\rangle, \\ v_t = M_0 v + F(zq + \bar{z}\bar{q} + v, 0) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + v, 0)q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\,\bar{q} + v, 0)\rangle\bar{q}. \end{cases} \tag{A.8}$$

如 5.4 节, 可以证明 (A.8) 在它的二维中心流形 $W_0^c$ 上的性态由

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q})\rangle - 2\langle p, B(q, w_{11})\rangle + \langle p, B(\bar{q}, w_{20})\rangle] \tag{A.9}$$

的符号所确定, 其中 $q$ 和 $p$ 是上面定义的 $M_0$ 和 $M_0^*$ 的特征函数, 多重线性函数 $B(\cdot,\cdot)$ 和 $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是由 $F$ 在 $u = 0$ 的 Taylor 展式定义 (见 (5.17)), 其中函数 $w_{11}$ 和 $w_{20}$ 是线性边值问题

$$\begin{cases} (2\mathrm{i}\omega_0 E - M_0)w_{20} = B(q, q), \\ -M_0 w_{11} = B(q, \bar{q}) \end{cases} \tag{A.10}$$

的唯一解. 当然, (A.9) 中的数量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 由 (A.3) 定义.

边值问题 (A.10) 可写为更 “经典” 的形式:

$$D\frac{\mathrm{d}^2 w_{20}}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) + [A(0) - 2\mathrm{i}\omega_0 E]w_{20}(\xi) = -B(q(\xi), q(\xi)),$$
$$D\frac{\mathrm{d}^2 w_{20}}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) + A(0)w_{11}(\xi) = -B(q(\xi), \bar{q}(\xi)),$$

这里 $H_{ij}$ 在 $\xi = 0, \pi$ 为零. 注意, 右端所有函数有相同的空间依赖性 $\sin^2(k_0\xi)$. 它们的确切形式由临界特征函数以及 $F$ 的二次项确定. 例如, 边值问题可以用 Fourier 方法求解.

## 5.7 附录 B: 文献评注

有限维空间中的中心流形定理对吸引情形 $n_+ = 0$ 是由 Pliss(1964) 证明的, 一般情形由 Kelley(1967) 和 Hirsch 等 (1977) 证明. 在俄罗斯文献中, 中心流形通常称为*中性流形*. 中心流形定理的证明可以在 Carr(1981) 和 Vanderbauwhede (1989) 中找到. 基于边值问题的非常详细证明是由 Shil′nikov,Shil′nikov,Turaev 和 Chua (1998, 第五章) 给出. 约化原理的证明 (定理 5.2 和定理 5.3) 可在 Kirchgraber 和 Palmer (1990) 中找到. 平衡点和极限环的高维分支的拓扑规范形是基于 Shoshitaishvili(1972,1975) 的工作, 那里也建立了给出限制系统的扭扩系统的拓扑形变. $C^\infty$ 系统可以没有 $C^\infty$ 流形的第一个例子是由 van Strien (1979) 所构造.

$n$ 维系统的单参数极限环分支和局部相图对应的变形 (metamorphose) 是由 Andronov 学校的数学家们自 20 世纪 40 年代后就知道. 他们的详细叙述可在

Neimark (1972), 以及 Butenin, Neimark 和 Fufaev (1976) 中找到. 这些以及其他分支系统的现代叙述由 Shil'nikov 等 (2001) 给出.

几个偏微分方程类型和时滞微分方程的中心流形的存在性在 20 世纪 80 年代被建立. 这些证明的主要技巧是把原来的系统作为一个适当的函数空间 (即 Banach 或者 Hilbert 空间)$H$ 中的抽象常微分方程, 并用常数变易公式 (Duhamel 积分方程) 证明这个方程在 $H$ 上定义了一个光滑动力系统 (半流). 对这些流, 在对线性算子的某些条件下保证中心流形存在性的一般定理成立. 详情和例子见 Marsden 和 McCracken (1976), Carr (1981), Henry (1981), Hale (1977), 以及 Diekmann 等 (1995).

避免将线性部分放在规范形中的投影方法, 起源于用 Lyapunov-Schmidt 简化方法以研究某些偏微分方程 (主要来自流体力学) 的分支, 我们的叙述基于 Hassard 等 (1981), 那里处理了连续–时间 (有限维和无穷维) 系统的 Hopf 分支. 一个等价于第一个 Lyapunov 系数公式 (5.39) 的不变表达式是由 Howard 和 McCracken (1976) 导出, 在他们的论述中翻译了 Marsden 和 McCracken (1976) 中 Hopf 的原文, 该书应用了分支周期解的渐近展开 (也见 Iooss 和 Joseph (1980)). van Gils (1982) 独立地在无穷维情形中得到这个, 并发表在 Diekmann 和 van Gils (1984) 之中. 离散时间翻转分支情形的计算公式是由 Kuznetsov 和 Rinadi (1991) 给出. 分析 Neimark-Sacker 分支的公式 (5.54) 是由 Iooss, Arneodo, Coullet 和 Tresser (1981) 用分支不变闭曲线的渐近表达式得到.



# 第 6 章 双曲平衡点的同宿轨道分支与异宿轨道分支

本章将研究连续–时间动力系统对应于连接双曲平衡点的同宿轨道或异宿轨道的大范围分支. 首先, 将详细考察二维和三维情形, 这两种几何直观可得到充分开发. 然后, 指出如何将一般 $n$ 维情形简化到所考虑的情形, 加上附录 A 对四维情形的处理.

## 6.1 同宿轨道和异宿轨道

考虑由 ODEs 系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_2) \in \mathbb{R}^n \tag{6.1}$$

定义的连续–时间动力系统 $\{\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$, 这里 $f$ 光滑. 设 $x_0, x_{(1)}$ 和 $x_{(2)}$ 为系统的平衡点.

**定义 6.1** 从点 $x \in \mathbb{R}^n$ 出发的轨道 $\Gamma_0$ 称为同宿于系统 (6.1) 的平衡点 $x_0$, 如果当 $t \to \pm\infty$ 时有 $\varphi^t x \to x_0$.

**定义 6.2** 从点 $x \in \mathbb{R}^n$ 出发的轨道 $\Gamma_0$ 称为异宿于系统 (6.1) 的平衡点 $x_{(1)}$ 和 $x_{(2)}$, 如果 $t \to -\infty$ 时有 $\varphi^t x \to x_{(1)}$, 且当 $t \to +\infty$ 时有 $\varphi^t x \to x_{(2)}$.

图 6.1 说明 $n = 2$ 时同宿和异宿于鞍点的轨道的两个例子, 图 6.2 说明 $n = 3$ 时有关例子.

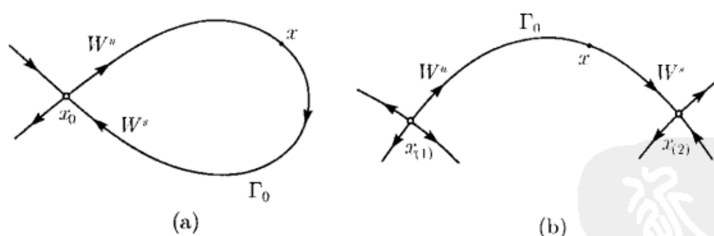



图 6.1 平面上 (a) 同宿轨道和 (b) 异宿轨道

显然, 平衡点 $x_0$ 的同宿轨道 $\Gamma_0$ 属于它的不稳定集与稳定集的交: $\Gamma_0 \subset W^u(x_0) \cap W^s(x_0)$. 类似地, 平衡点 $x_{(1)}$ 和 $x_{(2)}$ 的异宿轨道 $\Gamma_0$ 满足 $\Gamma_0 \subset W^u(x_{(1)}) \cap W^s(x_{(2)})$. 应该指出, 定义 (6.1) 和定义 (6.2) 并不要求平衡点是双曲的. 图 6.3 显示, 例如, 同宿于具特征值 $\lambda_1 = 0$ 的鞍结点的同宿轨道. 事实上, 双曲平衡点的同宿轨道特别有兴趣, 因为它们呈现的结果是结构不稳定而平衡点本身是结构稳定.

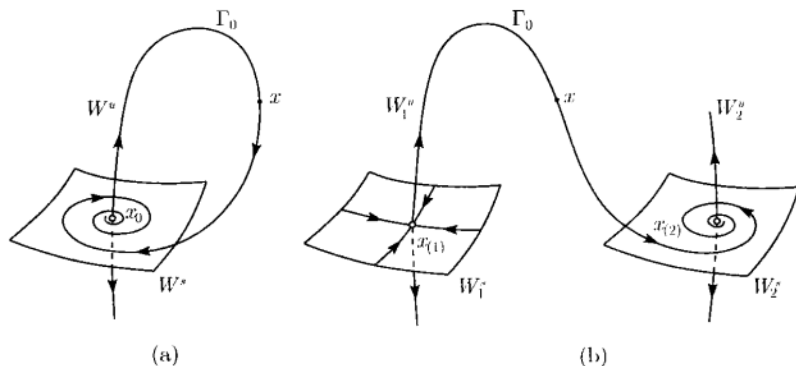



图 6.2　三维空间中 (a) 同宿轨道和 (b) 异宿轨道

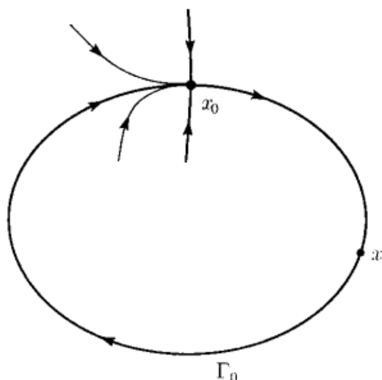



图 6.3　同宿于鞍–结点的同宿轨道 $\Gamma_0$

**引理 6.1**　(6.1) 的双曲平衡点的同宿轨道是结构不稳定. □

这个引理意味着可以将一个具 $x_0$ 的同宿轨道的系统进行扰动, 使得在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域内的相图变成拓扑不等价于原来系统的相图. 正如我们将看到的, 同宿轨道对系统的一般 $C^1$ 扰动会简单消失地. 这是一个相图的分支.

为证明这个引理, 需要一小部分横截性理论.

**定义 6.3**　*两个光滑流形 $M, N \subset \mathbb{R}^n$ 称为横截相交, 如果存在 $n$ 个线性无关向量至少与这两个流形之一切于任何一个交点.*

例如, $\mathbb{R}^3$ 中的曲面与曲线在某点相交于非零角就是横截的. 横截相交的主要性质是它在流形的 $C^1$ 小扰动下仍保持. 换句话说, 如果流形 $M$ 与 $N$ 横截相交, 那么所有充分 $C^1$ 接近的流形也是横截相交. 反之, 如果流形不横截相交, 一般的扰动会使得它们彼此不横截相交或者横截相交.

由于这一章专门处理鞍点 (或鞍–焦点) 双曲平衡点, 集合 $W^u$ 和 $W^s$ 是光滑 (侵入) 不变流形①. 任何充分 $C^1$ 接近系统有附近的鞍点, 它们的不变流形 $W^{u,s}$

① 这时 $W^u(x_0)$ 与 $W^s(x_0)$ 横截相交于 $x_0$.

在鞍点的邻域内是 $C^1$ 接近于原来系统对应的不变流形.

**引理 6.1 的证明** 假设系统 (6.1) 有一个双曲平衡点 $x_0$, 有 $n_+$ 个具正实部的特征值和 $n_-$ 个具负实部的特征值, $n_\pm > 0, n_+ + n_- = n$. 假设对应的稳定和不稳定流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 沿着同宿轨道相交. 为了证明这个引理, 将指出这个相交不可能是横截的. 事实上, 在这个轨道上任何一点 $x$, 向量 $f(x)$ 与流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 都相切. 因此, 可以找到这两个流形的不多于 $n_+ + n_- - 1 = n - 1$ 个无关的切向量, 这是因为 $\dim W^u = n_+, \dim W^s = n_-$. 此外, (6.1) 的任何一个一般扰动将这两个流形按原来方向分裂而它们不再在 $\Gamma_0$ 附近任何地方相交. □

下面更详细地说明二维或三维系统中同宿分支附近稳定和不稳定流形的性态.

$n = 2$ 情形. 考虑有鞍点 $x_0$ 同宿轨道的平面系统, 如图 6.4 中间部分所示. 在鞍点附近的稳定流形 $W^s(x_0)$ 上引入一维局部截线 $\Sigma$, 如图 6.4 所示. 沿着 $\Sigma$ 选取坐标 $\xi$ 使得它与稳定流形的交点对应于 $\xi = 0$. 这种构造可以对所有充分接近系统作出. 但是, 对这样的系统不稳定流形 $W^u$ 一般不回到鞍点. 图 6.4 显示这两种可能性: 流形 "向下" 分裂或者 "向上" 分裂. 以 $\xi^u$ 记 $W^u$ 与 $\Sigma$ 的交点的 $\xi$ 值.

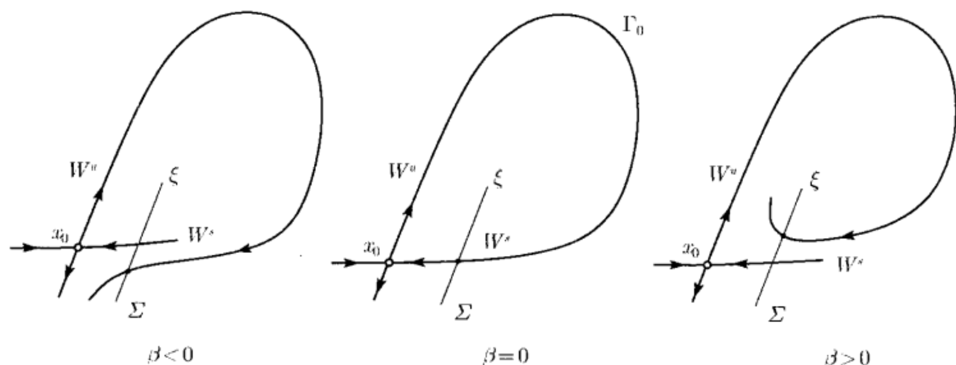



图 6.4 平面情形 ($n = 2$) 的分裂函数

**定义 6.4** *纯量函数 $\beta = \xi^u$ 称为分裂函数.*

实际上, 分裂函数是定义在原来系统和扰动系统上的泛函. 对依赖于参数的系统它是参数的光滑函数. 方程

$$\beta = 0$$

是 $\mathbb{R}^2$ 上同宿分支的分支条件. 因此这时同宿分支有余维 1.

**注** 存在引理 6.1 在平面情形的构造性证明, 它是属于 Andronov 的. 一个破坏同宿 (异宿) 轨道的单参数扰动可明显地构造出来. 例如, 若系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{6.2}$$

有鞍点的同宿轨道, 则系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) - \alpha f_2(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \alpha f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{6.3}$$

对任何充分小 $|\alpha| \neq 0$ 就没有附近的这个鞍点的同宿轨道. 系统 (6.3) 是系统 (6.2) 经*旋转向量场*得到. 证明留给读者作练习. ◇

$n = 3$ 情形. 这时也可定义分裂函数. 在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑有鞍点 $x_0$ 的同宿轨道 $\Gamma_0$ 的系统. 假设 $\dim W^u = 1$(否则改变时间方向), 并引入二维截面 $\Sigma$, 其坐标 $(\xi, \eta)$, 如图 6.5 所示. 假设 $\xi = 0$ 对应于 $\Sigma$ 与 $x_0$ 的稳定流形 $W^s$ 的交点. 如前, 对所有充分接近系统这是可以做到的. 设点 $(\xi^u, \eta^u)$ 对应于 $W^u$ 与 $\Sigma$ 的交点. 于是分裂函数可以如前面的平面情形定义: $\beta = \xi^u$. 它的零点

$$\beta = 0$$

给出了 $\mathbb{R}^3$ 中同宿分支的条件.

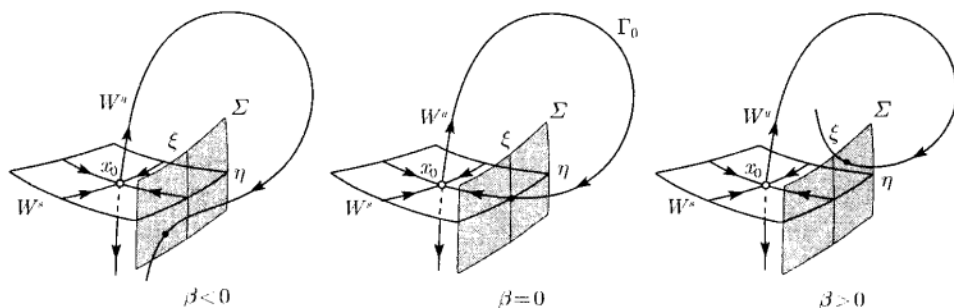



图 6.5　$n = 3$ 情形的分裂函数

**注**　(1) 前面的情形是不变流形 $W^u$ 和 $W^s$ 不横截相交的例子. 可以构造一个三维系统, 它有连接两个鞍点的结构稳定的*异宿轨道*: 这个轨道必须是与对应的二维稳定流形和不稳定流形横截相交.

(2) 存在一类特殊的动力系统 (例如 Hamilton 系统), 对这类系统存在非横截同宿轨道是很一般的. ◇

因此, 我们找到在某些条件下, 同宿 / 异宿于鞍点的轨道 $\Gamma_0$ 的出现导致了分支. 下一节的目的是刻画在系统的小 $C^1$ 扰动下这种轨道附近的相图分支. “附近”意思是指 $\Gamma_0 \cup x_0$ 或 $\Gamma_0 \cup x_{(1)} \cup x_{(2)}$ 的充分小邻域 $U_0$. 这个工作比平衡点分支更为复杂, 因为不容易构造一个连续–时间系统, 它是这个分支的拓扑规范形. 在前面某些情形, 所有满足某些一般性条件的单参数系统在对应的同宿分支邻域内是拓扑等价的. 在这些情形, 我们将用画出对应相图的几条关键轨道来刻画有关的通有分支图. 这将完全地描述直到拓扑等价性的图.

遗憾的是, 还包含更多的情况其中这样的等价性是不存在的. 在这些情形没有通有分支图可以叙述. 尽管如此, 拓扑不等价分支图也显示某些公共特性, 我们将给出这种情况刻画分支相图的概要.

非横截的异宿情形是有些平凡, 因为连接轨道在 $U_0$ 内的消失只不过是件本质性的事情 (见图 6.6). 因此, 这一章将集中同宿轨道分支, 第 7 章将回到非双曲同宿轨道以及和它们相应的分支.

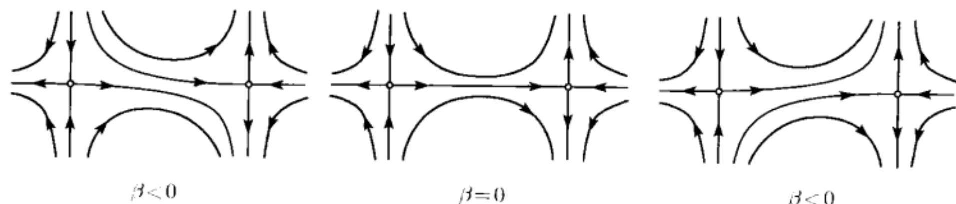



图 6.6 平面上的异宿分支

## 6.2 Andronov-Leontovich 定理

在平面情形, 同宿分支是由下面的定理完全所刻画.

**定理 6.1** (Andronov, Leontovich, 1939) *考虑二维系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{6.4}$$

*$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$, 系统有鞍点平衡点 $x_0 = 0$, 特征值 $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$, 以及同宿轨道 $\Gamma_0$. 假设下面的一般性条件成立:*

(H.1) $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$;

(H.2) $\beta'(0) \neq 0$, *其中 $\beta(\alpha)$ 是前面定义的分裂函数.*

*则对所有充分小 $|\alpha|$, 存在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$, 在这个邻域内从 $\Gamma_0$ 分支出唯一极限环 $L_\beta$. 此外, 对 $\beta > 0$, 当 $\sigma_0 < 0$ 时这个环稳定并存在, 对 $\beta < 0$, 当 $\sigma_0 > 0$ 时这个环存在但不稳定.*

下面的定义是非常有用的.

**定义 6.5** *实数 $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ 称为鞍点量.*

图 6.7 和图 6.8 说明上面的定理. 如果 $\alpha = 0$, 系统有一条同宿于原点的轨道. 对所有充分小的 $|\alpha| \neq 0$, 在原点附近存在鞍点平衡点, 这时同宿轨道 “向上” 或 “向下” 分裂而消失. 按照条件 (H.2), 分裂函数 $\beta = \beta(\alpha)$ 可考虑为新参数.

如果鞍点量 $\sigma_0 < 0$, 同宿轨道在 $\beta = 0$ 是*内稳定*, 定理给出了对 $\beta > 0$ 时唯一稳定极限环 $L_\beta \subset U_0$ 的存在性. 对 $\beta < 0$, $U_0$ 内不存在周期轨道. 如果鞍点量满足 $\sigma_0 > 0$, 同宿轨道在 $\beta = 0$ 是*内不稳定*, 定理给出对 $\beta < 0$ 时唯一但不稳定极限环

$L_{\beta} \subset U_0$ 的存在性. 对 $\beta > 0$, 在 $U_0$ 内没有周期轨道. 因此, $\sigma_0$ 的符号决定分支方向和出现极限环的稳定性. 如通常, "方向" 这术语有它方便的意义, 它与分裂函数的定义有关.

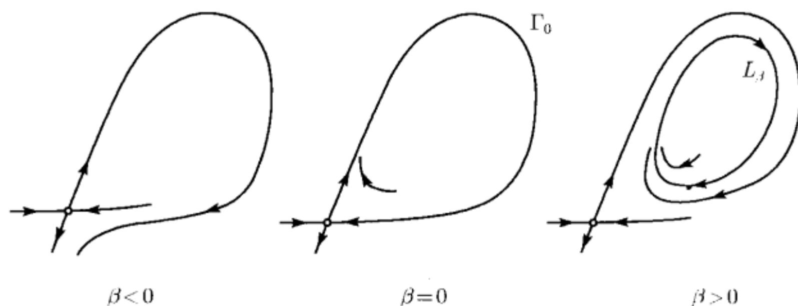



图 6.7　平面上的同宿分支 ($\sigma_0 < 0$)

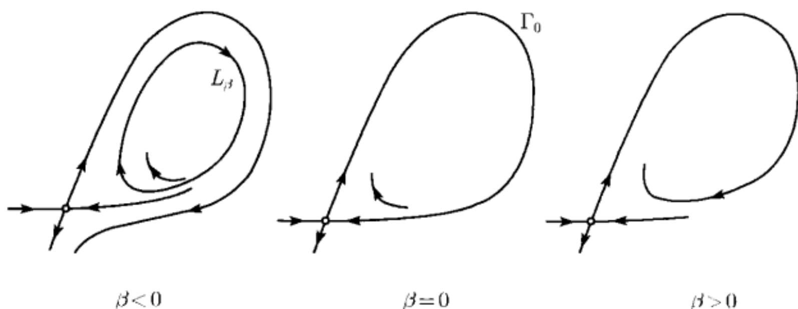



图 6.8　平面上的同宿分支 ($\sigma_0 > 0$)

当 $|\beta| \to 0$ 时, 环越来越接近鞍点而变得越来越 "角化"(见图 6.9(a)). 它的周期 $T_{\beta}$ 当 $\beta$ 趋于零时趋于无穷, 因为相点沿着环在平衡点附近移动花费越来越多的时间 (见图 6.9(b)). 相应的时间序列 $(x_1(t), x_2(t))$ 显示, 有限长的 "高峰" (peaks) 被非常长的 "平衡点附近" 的区间点缀着.

**定理 6.1 的证明**　证明的主要思想是在鞍点附近引入两条截线 $\Sigma$ 和 $\Pi$, 它们分别与稳定和不稳定流形横截相交 (见图 6.10). 然后把定义在半截线 $\Sigma^+$ 上的 Poincaré 映射 $P$:

$$P : \Sigma^+ \to \Sigma$$

看作为鞍点附近的映射 $\Delta : \Sigma^+ \to \Pi$ 以及同宿轨道大范围部分附近的映射 $Q : \Pi \to \Sigma$ 的合成:

$$P = Q \circ \Delta.$$

最后, 必须考虑到 (6.4) 的极限环和 $P$ 的不动点之间的通常对应. 证明要经过以下几个步骤:

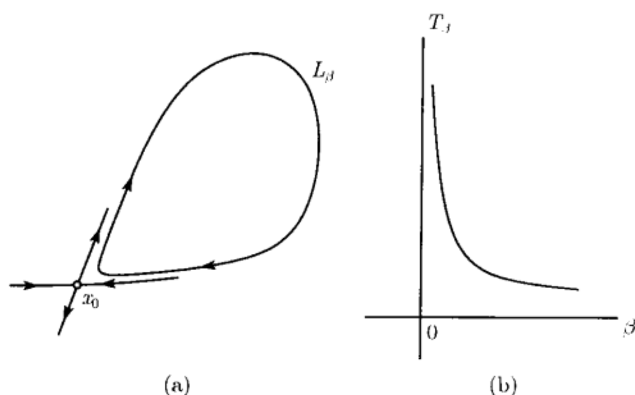



图 6.9 同宿分支附近的环以及作为 $\beta$ 函数的环的周期

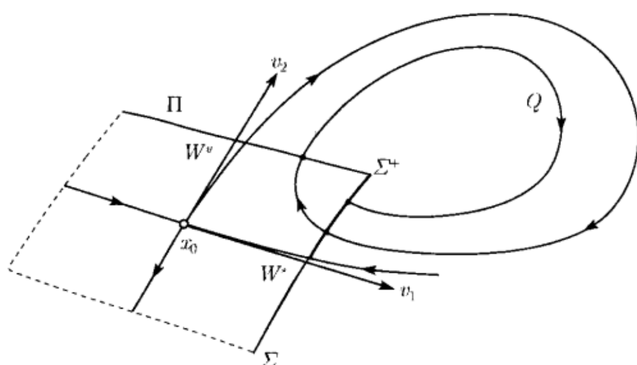



图 6.10 平面上同宿分支的 Poincaré 映射

第一步 (引入特征基坐标). 不失一般性, 假设对所有充分小 $|\alpha|$, 原点是 (6.4) 的鞍点平衡点. 将 $\beta$ 视为新参数, 但为了记号简单起见, 不指出参数依赖性.

存在可逆的线性坐标变换, 将 (6.4) 写为形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{6.5}$$

这里 $x_{1,2}$ 表示新坐标, $g_{1,2}$ 是光滑 $O(\|x\|^2)$ 函数, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

第二步 (不变流形的局部线性化). 按照局部稳定流形定理 (见第 3 章), 鞍点的稳定和不稳定不变流形 $W^s$ 和 $W^u$ 存在且有局部表示

$$W^s : x_2 = S(x_1), \quad S(0) = S'(0) = 0;$$
$$W^u : x_1 = U(x_2), \quad U(0) = U'(0) = 0,$$

其中 $S, U$ 光滑 (见图 6.11). 在鞍点附近引入新坐标 $y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - U(x_2), \\ y_2 = x_2 - S(x_1). \end{cases}$$

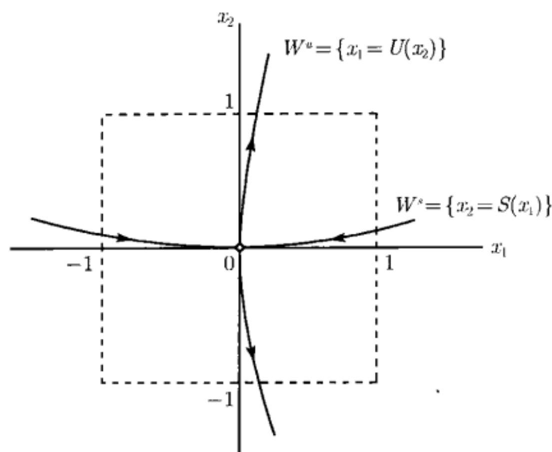



图 6.11　在 $x$ 轴上的局部稳定和不稳定流形

这个坐标变换在原点的某个邻域内光滑且可逆①. 可以假定这个邻域包含单位正方形 $\Omega = \{y : -1 < y_{1,2} < 1\}$, 这可由系统 (6.5) 另外的线性尺度化来办到. 于是, 系统 (6.5) 在新坐标下于 $\Omega$ 内取形式

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_1 h_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + y_2 h_2(y_1, y_2), \end{cases} \tag{6.6}$$

其中 $h_{1,2} = O(\|y\|)$. 注意, (6.6) 是一个非线性光滑系统, 原点是它的鞍点, 它的不变流形是线性且在 $\Omega$ 内与坐标轴重合 (见图 6.12).

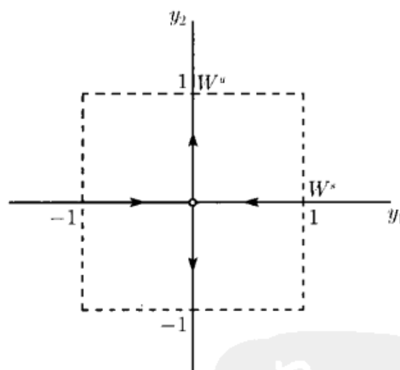



图 6.12　在 $y$ 坐标系中的局部线性稳定和不稳定流形

第三步 (系统的局部 $C^1$ 线性化). 现在, 在 $\Omega$ 内引入新坐标 $(\xi, \eta)$, 在这坐标系下系统 (6.6) 化为线性方程:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \end{cases} \tag{6.7}$$

① 更确切地说, 必须考虑坐标的大范围可逆光滑变换, 它在鞍点邻域内与指定的变换重合, 而在鞍点的某个其他邻域之外是恒同的. 同样应该指出所考虑的映射 $\Phi$ 将在后面构造.

更确切地, 对应 (6.6) 的流在 $\Omega$ 内 $C^1$ 等价于由线性系统 (6.7) 生成的流. 为了构造共轭映射

$$\begin{cases} \xi = \varphi(y_1, y_2), \\ \eta = \psi(y_1, y_2), \end{cases}$$

用下面的几何方法. 取点 $y = (y_1, y_2) \in \Omega$, 轨道通过这点 (见图 6.13(a)). 设 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 是系统 (6.6) 的这个轨道从正负两个时间方向到达 $\Omega$ 边界的时间的绝对值. 可以验证 (练习 7(a)), 偶 $(\tau_1, \tau_2)$ 对 $y \neq 0$ 在 $\Omega$ 的每个象限内是唯一确定的[①]. 现在, 在 $\Omega$ 的相同象限内求对应 (6.7) 轨道上具相同 "离去" 时间 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 的点 $(\xi, \eta)$(见图 6.13(b)). 对 $y = 0$, 取 $\xi = \eta = 0$. 由此, 映射 $\Phi : (y_1, y_2) \mapsto (\xi, \eta)$ 构造好了. 显然, 它映非线性系统 (6.6) 的轨道为线性系统 (6.7) 的轨道并保持时间参数化. 映射 $\Phi : \Omega \to \Omega$ 是一个同胚, 它将 $\Omega$ 边界的每个部分映为它自己, 沿坐标轴是恒同的. 为了定义有用的坐标变换, 它必须在 $\Omega$ 内至少是连续可微. 事实上, 映射 $\Phi$ 是一个 $C^1$ 映射. 实际上, 它离开原点是光滑的, 但在 $y = 0$ 它只有一阶连续偏导数 (有关的计算留给读者作为练习 7(b)).

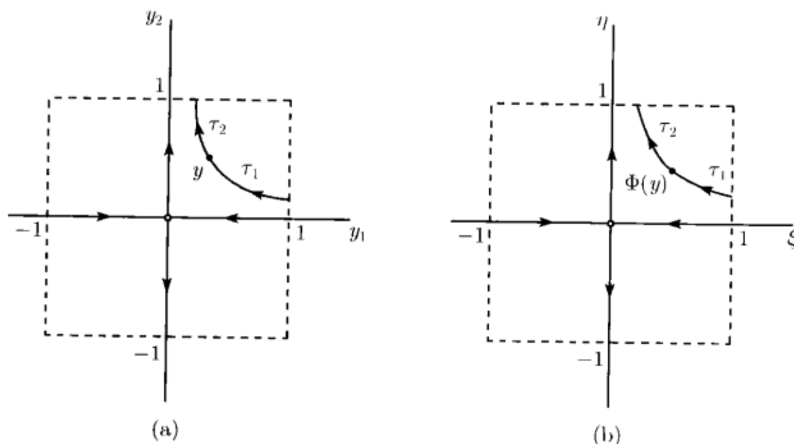



图 6.13　$C^1$ 等价性的构造

第四步 (合成的分析). 利用新坐标 $(\xi, \eta)$ 就可解析地计算鞍点附近的映射. 可以假设截线 $\Sigma$ 有表达式 $\xi = 1, -1 \leqslant \eta \leqslant 1$. 于是, $\eta$ 可以作为其上的坐标, $\Sigma^+$ 由 $\xi = 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1$ 定义. 此映射将 $\Sigma^+$ 映到截线 $\Pi$, 它是由 $\eta = 1, -1 \leqslant \xi \leqslant 1$ 定义, $\xi$ 作为坐标 (见图 6.14). 积分线性系统 (6.7) 得

$$\Delta : \xi = \eta^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

注意, 所得映射是非线性的, 尽管系统 (6.7) 是线性的. 由连续性, 对 $\eta = 0$ 假设 $\xi = 0$.

① 在坐标轴上的点允许 $\tau_{1,2}$ 等于 $\infty$.

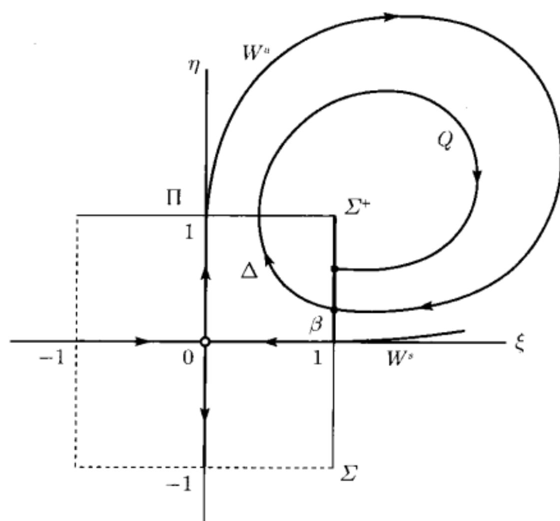



图 6.14　局部线性化坐标中的 Poincaré 映射

由 $\xi$ 和 $\eta$ 表示的大范围映射是连续可微且可逆, 并有一般形式

$$Q : \eta = \beta + a\xi + O(\xi^2),$$

这里 $\beta$ 是分裂函数, 因为轨道不相交, 故 $a > 0$. 实际上, $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\beta), a = a(\beta)$, 但是, 正如在下面将看到的, 只与在 $\beta = 0$ 的值有关. 对小的 $|\eta|$, Poincaré 映射

$$P : \eta \mapsto \beta + a\eta^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \cdots$$

对小的 $|\beta|$ 可容易分析 (见图 6.15). 因此, 对 $\beta > 0$, 若 $\sigma_0 < 0$, 以及对 $\beta < 0$, 若 $\sigma_0 > 0$, 则存在正不动点 (极限环). 环的稳定性和唯一性也可从对映射的分析简单地得到. □

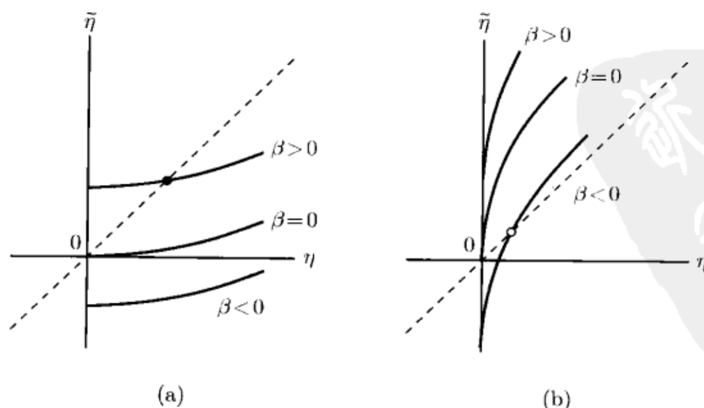



图 6.15　Poincaré 映射的不动点: (a) $\sigma_0 < 0$; (b) $\sigma_0 > 0$

**注** 直到现在, 这一节仅仅考虑了所谓 “小” 同宿轨道. 存在另外一类同宿轨道, 即对应于不同的回归方向的 “大” 同宿轨道. 所有所得的结果对它们也成立 (见图 6.16, 那里画出的是 $\sigma_0 < 0$ 时的情形). ◇

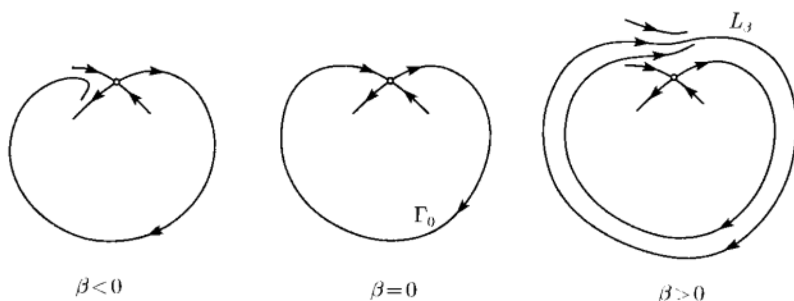



图 6.16 “大” 鞍点同宿轨道分支

**例 6.1** (显式同宿分支) 考虑下面属于 Sandstede(1997a) 的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + x^2, \\ \dot{y} = (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \dfrac{3}{2}xy, \end{cases} \tag{6.8}$$

其中 $\alpha$ 是参数.

对所有充分小的 $|\alpha|$, 原点 $(x,y)=(0,0)$ 是鞍点. 在 $\alpha=0$ 这个鞍点有特征值

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3,$$

$\sigma_0 = -2 < 0$. 此外, 在这个参数值, 存在同宿于原点的同宿轨道 (图 6.17). 事实上, 笛卡儿蔓叶线

$$H(x,y) \equiv x^2(1-x) - y^2 = 0$$

组成 $\alpha=0$ 时 (6.8) 的轨道. 这些轨道之一同宿于鞍点 $0=(0,0)$. 为验证这个事实, 必须证明由 (6.8) 定义的向量场当 $\alpha=0$ 时为

$$v(x,y) = \left(-x + 2y + x^2, 2x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\right)^{\mathrm{T}},$$

它在所有的非平衡点处与曲线 $H(x,y)=0$ 相切. 等价地, 只需验证 $v$ 沿着此曲线与此曲线的法向量正交. 法向量是由这个函数 $H$ 的梯度给出

$$(\nabla H)(x,y) = (2x - 3x^2, -2y)^{\mathrm{T}}.$$

由此, 沿着曲线 $H=0$ 直接计算得 (验证)

$$\langle v, \nabla H \rangle = 0.$$

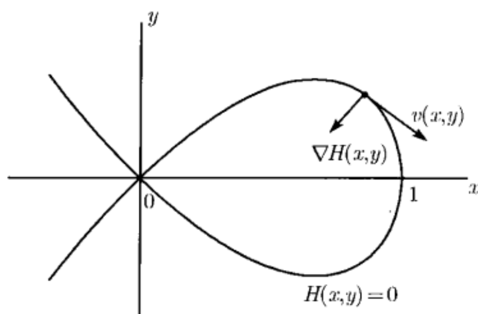



图 6.17　在 $\alpha=0(6.18)$ 的同宿轨道

因此, 系统 (6.8) 在 $\alpha=0, \sigma_0<0$ 时有代数同宿轨道. 可以证明在 $\alpha=0$ 横截性条件 $\beta'\neq 0$ 也满足 (见练习 13). 因此, 定理 6.1 可应用, 在 $\alpha$ 的小变化下从同宿轨道分支出唯一稳定极限环 (见图 6.18). ◇

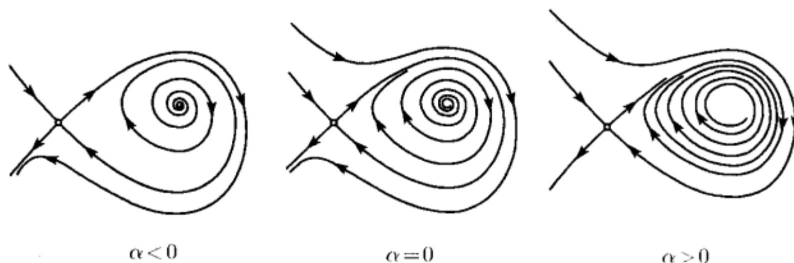



图 6.18　(6.8) 的同宿轨道: 对小 $\alpha>0$ 存在稳定极限环

**例 6.2** (慢–快系统中的同宿分支)　考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}=1+x-y-x^2-x^3, \\ \dot{y}=\varepsilon[-1+(1-4\alpha)x+4xy], \end{cases} \tag{6.9}$$

其中 $\alpha$ 是 "控制" 参数, $0<\varepsilon\ll 1$. 下面将证明这个系统在 $\alpha$ 接近于零的某个值时产生同宿分支. 更确切地说, 存在连续函数 $\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon)$ 它对充分小 $\varepsilon\geqslant 0$ 有定义, $\alpha_0(0)=0$ 且使得这个系统在 $\alpha=\alpha_0(\varepsilon)$ 有同宿于鞍点的同宿轨道. 此外, Andronov-Leontovich 定理的一般性条件满足, 因此, 对 $\alpha<\alpha_0$ 在 $\alpha$ 的变化下, 从同宿轨道分支出唯一稳定的极限环.

(6.9) 的非平凡零等倾线是函数

$$\dot{x}=0: y=(x+1)(1-x^2)$$

和

$$\dot{y}=0: y=\frac{1-x}{4x}+\alpha$$

的图像. 它们在 $\alpha = 0$ 时的形状如图 6.19 所示.

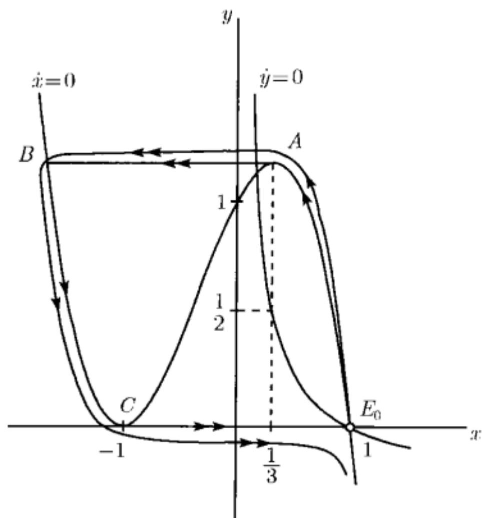



图 6.19　(6.9) 的零等倾线以及对应的奇异同宿轨道

如果 $\alpha = 0$, 系统对所有 $\varepsilon > 0$ 有鞍点平衡点 $E_0 : (x, y) = (1, 0)$. 容易验证, 在鞍点 $E_0$ 附近, 当 $\varepsilon \to 0$ 时稳定不变流形 $W^s(E_0)$ 趋于 $x$ 轴, 不稳定不变流形 $W^u(E_0)$ 趋于零等倾线 $\dot{x} = 0$. 不稳定流形的上分枝 $W_1^u$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时的大范围性态也是清楚的. 它趋于一条**奇异轨道**, 这条奇异轨道是由沿着等倾线 $\dot{x} = 0$ 的两个**慢运动**($E_0A$ 和 $BC$) 以及沿着水平方向的两个**快跳跃**($AB$ 和 $CE_0$; 后一个是沿 $x$ 轴发生的)(见图 6.19). 这条奇异轨道回到 $E_0$, 从而构成了一条**奇异同宿轨道**.

这种结构可以对所有充分小 $\alpha \neq 0$ 实现 (见图 6.20). 平衡点从 $x$ 轴移开, 它的 $y$ 坐标等于 $\alpha$. 尽管如此, $W_1^u$ 的奇异轨道当 $\varepsilon \to 0$ 时仍沿着 $x$ 轴到达鞍点的邻域. 因此, 存在**奇异分裂函数** $\beta_0(\alpha)$, 它是沿着鞍点附近的铅直截线来计算并等于 $\alpha : \beta_0(\alpha) = \alpha$. 显然, $\beta_0'(0) > 0$. 同时, 当 $\alpha < 0$ 时奇异轨道趋于**奇异极限环**.

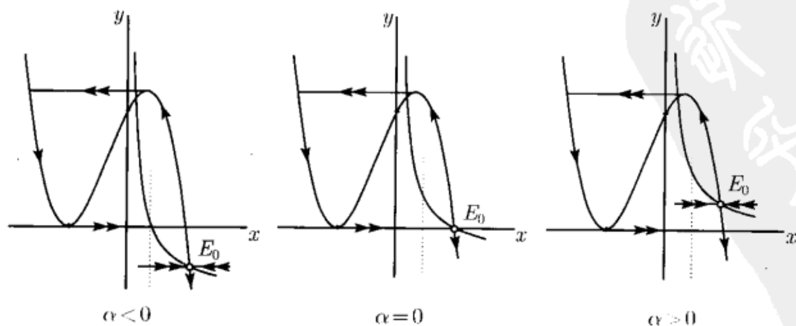



图 6.20　(6.20) 的奇异同宿轨道

因此, 对 $\alpha = 0$, 在奇异极限 $\varepsilon = 0$ 有一般的奇异同宿分支. 这意味着在 $\alpha = \alpha_0(\varepsilon)$, 对充分小 $\varepsilon > 0$, 存在一般同宿分支. 我们可以用非标准分析证明. 为了用标准分析证明它, 必须验证对所有充分小的 $\varepsilon > 0$ 分裂函数 $\beta(\alpha,\varepsilon)$ 可表示为

$$\beta(\alpha,\varepsilon) = \beta_0(\alpha) + \varphi(\alpha,\varepsilon),$$

其中 $\varphi(\alpha,\varepsilon)$(对小的 $|\alpha|$ 考虑为 $\alpha$ 的函数) 当 $\varepsilon \to 0$ 时和它的一阶导数一致地趋于零. 于是, 经初等论述①, 存在唯一的连续函数 $\alpha_0(\varepsilon), \alpha_0(0) = 0$, 使得对所有充分小的 $\varepsilon \geqslant 0$, 有

$$\beta(\alpha_0(\varepsilon),\varepsilon) = 0.$$

事实上, $\alpha_0(\varepsilon)$ 对 $\varepsilon > 0$ 光滑. 因此, 系统对所有充分小的 $\varepsilon$ 在 $\alpha = \alpha_0(\varepsilon)$ 有同宿轨道. 对应的鞍点量是负的, 且 $\beta_\alpha(\alpha_0(\varepsilon),\varepsilon) \neq 0$, 因此对 (6.9) 可用定理 6.1. ◇

**关于定理 6.1 的更多说明**　(1) 定理 6.1 的条件 (H.2) 等价于扩展系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\alpha), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

某些不变流形的横截相交性. 设 $x_0(\alpha)$ 表示对小的 $|\alpha|$, (6.4) 的鞍点单参数族. 这个族定义了 (6.10) 的一个不变集–平衡点曲线. 这条曲线有二维不稳定和稳定流形 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$, 其薄片 $\alpha =$ 常数与 (6.4) 中的鞍点 $x_0(\alpha)$ 的一维不稳定和稳定流形 $W^u$ 和 $W^s$ 相重合 (见图 6.21). 条件 (H.2)(意味着当 $\alpha$ 穿过 $\alpha = 0$ 时, $W^u$ 和 $W^s$ 分裂的速度不为零) 刚好转化为 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 在 $\alpha = 0$ 沿着 $\Gamma_0$ 在 (6.10) 的三维状态空间内的横截相交性. 在 6.4.1 节将指出这个横截性等价于 Melnikov 条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}\tau\right] \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right) \mathrm{d}t \neq 0,$$

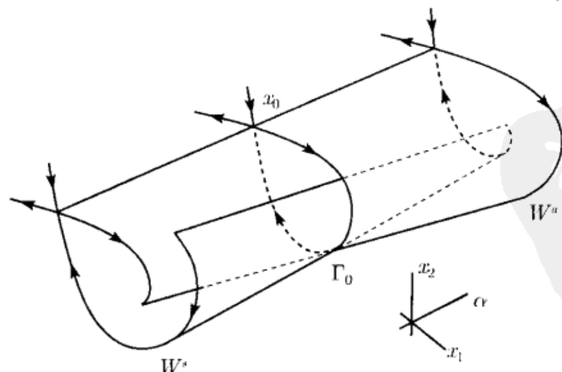



图 6.21　不变流形 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 的横截相交性

① 应该克服的仅有困难是 $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 关于 $\varepsilon$ 是不可微 (见练习 8).

这里所有的表达式中的 $f=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}$ 都是在 $\alpha=0$ 沿着 (6.4) 的对应于同宿轨道 $\Gamma_0$ 的解 $x^0(\cdot)$ 计算.

(2) 可以在平面上对同宿分支构造一个**拓扑规范形**. 考虑 $(\xi,\eta)$ 平面并引入两个区域: 单位正方形

$$\Omega_0=\{(\xi,\eta):|\xi|\leqslant 1,|\eta|\leqslant 1\}$$

和长方形

$$\Omega_1=\{(\xi,\eta):1\leqslant\xi\leqslant 2,|\eta|\leqslant 1\}$$

(见图 6.22). 定义二维流形 $\Omega$ 如下: 将 $\Omega_0$ 和 $\Omega_1$ 沿着铅直线段 $\{\xi=1,|\eta|\leqslant 1\}$ 粘合, 并将 $\Omega_0$ 的上边界和 $\Omega_1$ 的右边界等同 (即将 $|\xi|\leqslant 1$ 的点 $(\xi,1)$ 与点 $(2,\xi)$ 粘合). 所得流形同胚于单带.

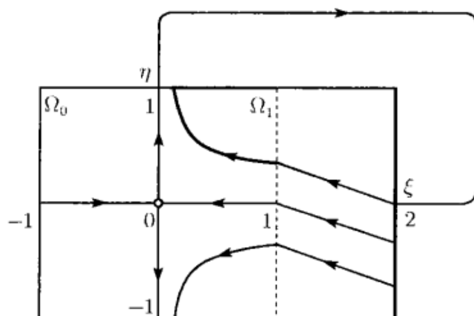



图 6.22　同宿分支拓扑规范形

考虑由 $\Omega$ 内的 ODEs 系统, 它在 $\Omega_0$ 内由

$$\begin{cases}\dot{\xi}=\lambda_1(\alpha)\xi,\\ \dot{\eta}=\lambda_2(\alpha)\eta\end{cases}\tag{6.11}$$

定义, 在 $\Omega_1$ 内由

$$\begin{cases}\dot{\xi}=-1,\\ \dot{\eta}=\beta(\alpha)\eta\end{cases}\tag{6.12}$$

定义, 其中 $\lambda_{1,2}$ 和 $\beta$ 是参数 $\alpha$ 的光滑函数. $\Omega$ 内如此定义的逐片光滑系统的性态类似于 (6.4) 在同宿轨道附近的性态 (参看图 6.14 和图 6.22). 如果 $\lambda_1<0<\lambda_2$, 则构造的系统的原点是鞍点. 在 $\beta=0$, 这个鞍点有同宿轨道 $\Gamma_0$, 它是由两条坐标轴线段 $\{\xi=0,0<\eta\leqslant 1\}$ 和 $\{\eta=0,0<\xi\leqslant 2\}$ 所组成. 对小 $\beta\neq 0$, 这条同宿轨道向下破裂, 参数 $\beta$ 起着分裂函数的作用. 只要鞍点量 $\sigma_0=\lambda_1(0)+\lambda_2(0)\neq 0$, 从 $\tilde{\Gamma}_0$ 分支出唯一极限环. 这可以由系统 (6.11), (6.12) 在截线 $\{\xi=1,0\leqslant\eta\leqslant 1\}$ 上定义的 Poincaré 映射

$$\eta\mapsto\beta+\eta^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

看出.

事实上, 下面的定理成立.

**定理 6.2**　在定理 6.1 的假设下, 对小 $|\beta|$, 在同宿轨道 $\Gamma_0$ 附近对邻近的参数值系统 (6.4) 与在 $\tilde{\Gamma}_0$ 附近, 由 (6.11) 和 (6.12) 在 $\Omega$ 内定义的系统局部拓扑等价. 此外, 所有满足 $\sigma_0 < 0(\sigma_0 > 0)$ 的这种系统对附近的参数值在相应的同宿轨道附近都局部拓扑等价. □

定理的最后叙述由下面事实得知, 对 $\sigma_0 < 0$ 在 $\Omega$ 内构造的系统在 $\tilde{\Gamma}_0$ 附近对小 $|\beta|$ 局部等价于具常数 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ 的系统, 对 $\sigma_0 > 0$, 它等价于 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 的系统. ◇

## 6.3　三维系统中的同宿分支: Shil′nikov 定理

三维状态空间会引起广泛的多种多样的同宿分支, 其中有些还包含有无穷多个周期轨道. 如同在第 3 章已经知道, $\mathbb{R}^3$ 中两个允许有同宿轨道的最简单类型的双曲平衡点是*鞍点*和*鞍–焦点*. 从现在起假定这些点有一维不稳定流形 $W^u$ 和二维稳定流形 $W^s$(否则, 就改变时间方向). 在鞍点情形, 假设平衡点的特征值是单根且满足不等式 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$. 于是, 正如在第 2 章看到的, 所有在 $W^s$ 上的轨道除了两条沿着对应于 $\lambda_3$ 的特征空间趋于鞍点以外, 都沿着 Jacobi 矩阵对应于 $\lambda_2$ 的一维特征空间趋于平衡点 (见图 2.4(a)).

**定义 6.6**　具负实部最靠近虚轴的特征值称为首 (或主)特征值, 对应的特征空间称为首 (或主)特征空间.

由此, $W^s$ 上几乎所有的轨道都沿着一维主特征空间趋于一般鞍点. 在鞍–焦点情形, 存在两个主特征值 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$, 都及二维主特征空间 (及图 2.4(b)).

**定义 6.7**　鞍点 (鞍–焦点) 的鞍点量 $\sigma$ 是正特征值与主特征值的实部之和.

因此, 对鞍点, $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$, 对鞍–焦点, $\sigma = \lambda_1 + \mathrm{Re}\ \lambda_{2,3}$.

下面的表格简短说明, $\mathbb{R}^3$ 中由同宿分支所产生的极限环的个数和稳定性的由 Shilnikov 得到的某些一般结果. 横条表明具同宿轨道的平衡点的类型, 竖条元素给出对应鞍点量可能的符号.

| | 鞍点 | 鞍–焦点 |
|---|---|---|
| $\sigma_0 < 0$ | 一个稳定环 | 一个稳定环 |
| $\sigma_0 > 0$ | 一个鞍点环 | $\infty$ 个鞍点环 |

下面的定理给出更确切的信息.

**定理 6.3** (鞍点, $\sigma_0 < 0$)　考虑三维系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{6.13}$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 系统有鞍点 $x_0 = 0$, 特征值 $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geqslant \lambda_3(0)$, 且有同宿轨道 $\Gamma_0$. 假设下面一般性条件成立:

(H.1) $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0$;

(H.2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$;

(H.3) $\Gamma_0$ 沿着主特征空间回到 $x_0$;

(H.4) $\beta'(0) \neq 0$, 这里 $\beta(\alpha)$ 是早先定义的分裂函数.

则系统 (6.13) 对所有充分小 $\beta > 0$, 在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 内存在唯一稳定极限环 $L_\beta$. 此外, 所有这样的系统对小的 $|\alpha|$ 在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 附近都是局部拓扑等价的. □

如图 6.23 所示. 不稳定流形 $W^u(x_0)$ 趋于环 $L_\beta$. 当 $\beta$ 趋于零时环的周期趋于无穷. 环的 (非平凡) 乘子是正的且在单位圆内: $|\mu_{1,2}| < 1$. 因此, 分支完全类似于平面情形. 定理的证明将在后面概述 (也可看练习 10).

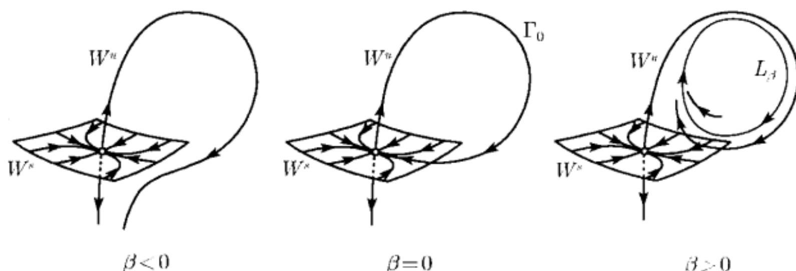



图 6.23 $\sigma_0 < 0$ 时的鞍点同宿分支

**定理 6.4** (鞍–焦点, $\sigma_0 < 0$) 假设三维系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{6.14}$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 系统有鞍–焦点 $x_0 = 0$, 特征值 $\lambda_1(0) > 0 > \mathrm{Re}\,\lambda_{2,3}(0)$ 以及一条同宿轨道 $\Gamma_0$. 假设下面的一般性条件成立:

(H.1) $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \mathrm{Re}\lambda_{2,3}(0) < 0$;

(H.2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$;

(H.3) $\beta'(0) \neq 0$, 这里 $\beta(\alpha)$ 是分裂函数.

则系统 (6.14) 对所有充分小 $\beta > 0$, 在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 内存在唯一稳定极限环 $L_\beta$. □

如图 6.24 所示. 对所有充分小 $\beta \leqslant 0$, 在 $U_0$ 内系统 (6.14) 没有周期轨道. 不稳定流形 $W^u(x_0)$ 趋于环 $L_\beta$. 环的周期当 $\beta$ 趋于零时趋于无穷. 环的 (非平凡) 乘子是复数, $\mu_2 = \bar{\mu}_1$, 且在单位圆内: $|\mu_{1,2}| < 1$.

类似于平面情形. 我们不能说满足 (H.1)~(H.3) 的所有系统 (6.10) 的分支图都拓扑等价. 通常, 它们是不等价的, 因为实数

$$\nu_0 = -\frac{\lambda_1(0)}{\mathrm{Re}\lambda_{2,3}(0)} \tag{6.15}$$

对有同宿于鞍–焦点的同宿轨道的系统来说是一个拓扑不变量. 这个不变量的特性以后更清楚. 因此, 虽然在所有这样的系统中对 $\beta > 0$ 有唯一极限环, 但它们相图的确切拓扑可以不同. 幸运的是, 在大多数应用中这不是很重要.

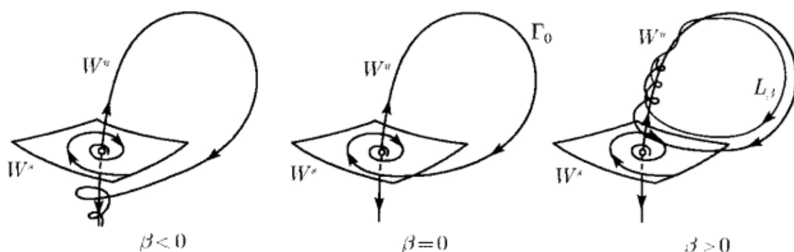



图 6.24　$\sigma_0 < 0$ 时的鞍–焦点同宿分支

在处理 $\sigma_0 > 0$ 的鞍点情形之前, 必须更接近地观察 $\Gamma_0$ 附近的不变流形 $W^s(x_0)$ 的拓扑. 假设有一个三维系统, 它有一个鞍点 $x_0$, 有单特征值以及沿着主特征空间回到鞍点的同宿轨道. 固定 $\Gamma_0 \cap x_0$ 的小邻域 $U_0$. 同宿轨道 $\Gamma_0$ 整个属于稳定流形 $W^s(x_0)$. 因此, 流形 $W^s(x_0)$ 在这固定邻域内可沿着 $\Gamma_0$"倒回时间" 延展. 在每一点 $\varphi^t x \in \Gamma_0$, 这个流形的*切平面*被定义. 当 $t \to +\infty$ 时这个平面是由稳定特征向量 $v_2$ 和 $v_3$ 所张成. 一般地, 当 $t \to -\infty$ 时, 它趋于由不稳定特征向量 $v_1$ 和非主特征向量 $v_3$ 所张成的平面. 由此, 一般地, 流形 $W^s(x_0)$ 在鞍点附近沿着在 $W^s(x_0)$ 上的两个例外轨道自身相交, 沿着非主特征空间趋于这个鞍点① (见图 6.25). 因此, $W^s(x_0)$ 在 $U_0$ 中属于同宿轨道 $\Gamma_0$ 那部分 (一般地) 是二维非光滑子流形 $\mathcal{M}$. 从初等拓扑知道, 这样的流形是拓扑等价于*单带*或*扭转带*. 后者为熟知的 Mobius 带.

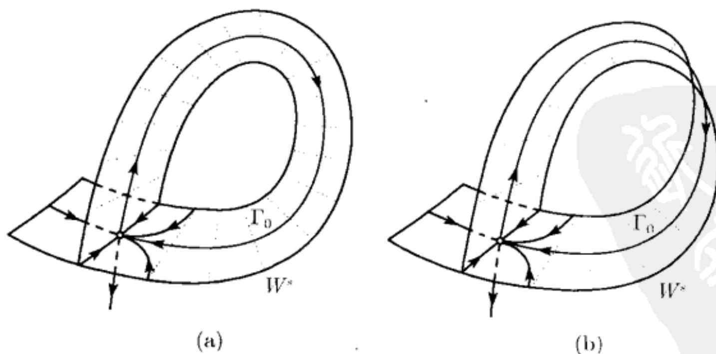



图 6.25　鞍点同宿轨道附近的 (a) 单稳定流形 (b) 扭转稳定流形

① 这个性质 (通常称为*强倾角性质*), 它首先是由 Shil′nikov 建立的, 在练习 9 中有讨论. 也见第 10 章, 那里叙述如何用数值验证这个性质.

**定义 6.8** 若 $\mathcal{M}$ 拓扑等价于单带, 则同宿轨道 $\Gamma_0$ 称为单的(或者非扭转的). 如果 $\mathcal{M}$ 拓扑等价于 Mobius 带, 则同宿轨道称为扭转的.

现在来叙述有关定理.

**定理 6.5** (鞍点, $\sigma_0 > 0$ 情形) 考虑三维系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{6.16}$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 系统有鞍点 $x_0 = 0$, 特征值 $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geqslant \lambda_3(0)$ 以及一条同宿轨道 $\Gamma_0$. 假设下面的一般性条件成立:

(H.1) $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0$;

(H.2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$;

(H.3) $\Gamma_0$ 沿着主特征空间回到 $x_0$;

(H.4) $\Gamma_0$ 是单的或扭转的;

(H.5) $\beta'(0) \neq 0$, 这里 $\beta(\alpha)$ 是分裂函数.

则对所有充分小 $|\alpha|$, 存在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$, 在这个邻域内从 $\Gamma_0$ 分支出一条唯一稳定极限环 $L_\beta$. 如果 $\Gamma_0$ 是非扭转的, 对 $\beta < 0$, 以及若 $\Gamma_0$ 是扭转的, 对 $\beta > 0$, 这个环存在. 此外, 所有具单 (扭转) 环 $\Gamma_0$ 的系统 (6.16), 对充分小 $|\alpha|$ 在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 内都是局部拓扑等价的. □

两类情形的分支图分别如图 6.26 和图 6.27 所示. 在这两种情形 (单和扭转), 从同宿轨道分支出唯一稳定的鞍点极限环 $L_\beta$, 它的周期当 $\beta \to 0$ 时趋于无穷. 值得注意的是, 分支的方向由 $\mathcal{M}$ 的拓扑所确定.

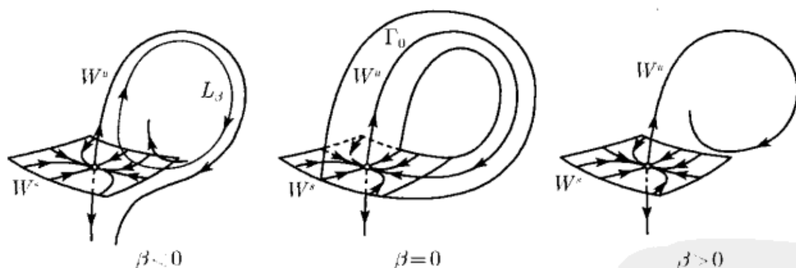



图 6.26 $\sigma_0 > 0$ 时单的鞍点同宿分支

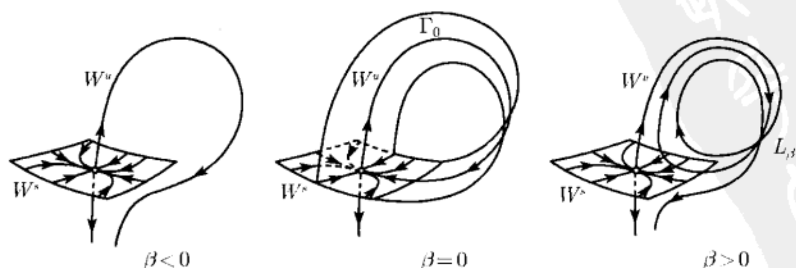



图 6.27 $\sigma_0 > 0$ 时扭转的鞍点同宿分支

如果同宿轨道是单的, 则对 $\beta < 0$ 存在鞍点环 $L_\beta$. 它的乘子是正的, $\mu_1 > 1 > \mu_2 > 0$. 环的稳定和不稳定流形 $W^{s,u}(L_\beta)$ 是 (局部) 单带.

如果同宿轨道是扭转的, 则对 $\beta > 0$, 存在鞍点环 $L_\beta$. 它的乘子是负的, $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$. 环的稳定和不稳定流形 $W^{s,u}(L_\beta)$ 是 (局部) Mobius 带.

**定理 6.3 和定理 6.5 证明概要**　我们概述定理在鞍点情形的证明. 在 $\mathbb{R}^3$ 中存在坐标系, 在此坐标下, 流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内是线性的. 假设系统 (6.13)(或 (6.16)) 已是这个坐标下的系统, 进一步, 局部地有 $W^s(x_0) \subset \{x_1 = 0\}$, $W^u(x_0) \subset \{x_2 = x_3 = 0\}$. 设 $x_2$ 轴是主特征空间, $x_3$ 轴是非主特征空间. 引入长方形二维截面 $\Sigma \subset \{x_2 = \varepsilon_2\}$ 以及辅助长方形截面 $\Pi \subset \{x_1 = \varepsilon_1\}$, 这里 $\varepsilon_{1,2}$ 足够的小. 假设 $\Gamma_0$ 与这两个局部截面都相交 (见图 6.28). 如同平面情形, 沿着 (6.13) 的轨道定义 Poincaré $P : \Sigma^+ \to \Sigma$, 它将 $\Sigma$ 对应于 $x_1 \geqslant 0$ 的上面部分 $\Sigma^+$ 映到 $\Sigma$. 将 $P$ 表为合成映射

$$P = Q \circ \Delta,$$

这里 $\Delta : \Sigma^+ \to \Pi$ 是鞍点附近映射, 而 $Q : \Pi \to \Sigma$ 是沿着 $\Gamma_0$ 的大范围部分的映射. 这种构造对所有充分小的 $|\beta|$ 都可进行.

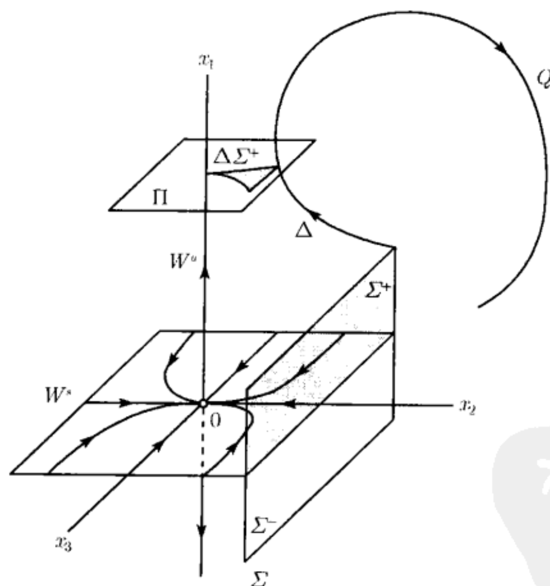



图 6.28　鞍点情形 Poincaré 映射的构造

局部映射 $\Delta$"本质上"[①]在鞍点附近是由 (6.13) 的线性部分定义. 可以看出在映射 $\Delta$ 作用下 $\Sigma^+$ 的象 $\Delta\Sigma^+$ 像尖点在 $x_1$ 轴上 (换句话说在 $\Gamma_0$ 上) 的 "角状物".

① 遗憾的是, 在这情形存在阻碍 $C^k$ 线性化 $(k \geqslant 1)$ 的可能, 例如, 如果 $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $C^1$ 线性化是不可能的.

事实上, 截面 $\Sigma$ 和 $\Pi$ 应该选择使得 $\Delta\Sigma^+ \subset \Pi$. 大范围映射 $Q$ 将这个 "角状物" 映回到平面 $\{x_2 = \varepsilon_2\}$. 如果 $\Gamma_0$ 是单的, $P\Sigma^+$ 不平凡地与 $\Sigma^+$ 在 $\beta = 0$ 相交; 否则, 与 $\Sigma^- \equiv \Sigma \backslash \Sigma^+$ 不平凡相交 (见图 6.28). 我们指出, "角状物" 与 $W^s(x_0)$ 和 $\Sigma$ 的交的横截性由流形 $\mathcal{M}$ 的定向和非定向得知.

按照鞍点量 $\sigma_0$ 的符号以及同宿轨道的扭转性, 存在 $P\Sigma^+$ 关于 $\Sigma$ 的相对位置的几种情况 (见图 6.29 和图 6.30). 仔细审视这些图, 实际上证明完成了. 如果 $\sigma_0 < 0$(定理 6.3, 图 6.29) 映射 $P$ 对 $\beta > 0$ 在 $\Sigma^+$ 上是压缩的, 因此在 $P\Sigma^+$ 内有唯一稳定的不动点, 它对应于稳定极限环. 如果 $\sigma_0 > 0$(定理 6.5, 图 6.30), 映射 $P$

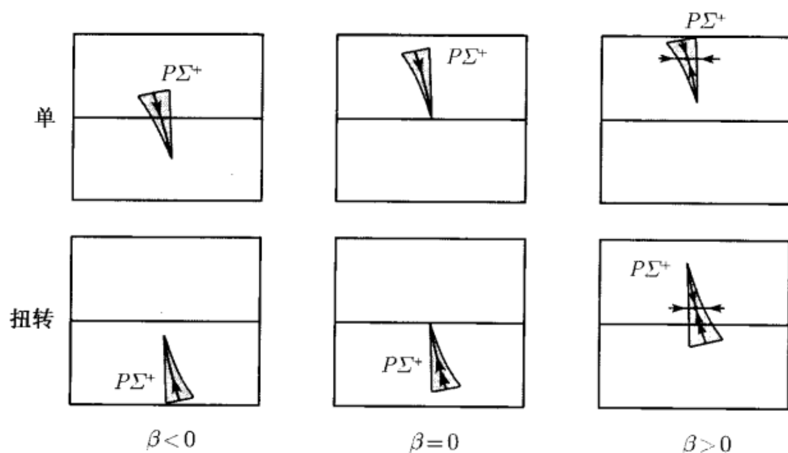



图 6.29 $\sigma_0 < 0$ 情形 $P\Sigma^+$ 关于 $\Sigma$ 的相对位置

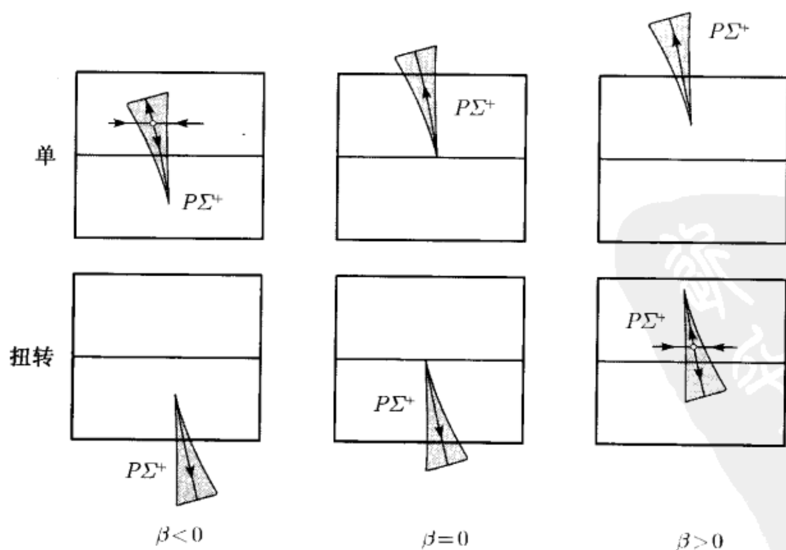



图 6.30 $\sigma_0 > 0$ 情形 $P\Sigma^+$ 关于 $\Sigma$ 的相对位置

沿着 $x_3$ 轴压缩, 沿着 "角状物" 膨胀. 因此, 它在 $P\Sigma^+$ 内对 $\beta<0$ 或 $\beta>0$ 有依赖于同宿轨道扭转性的鞍点不动点. □

**注**　由于映射 $P$ 沿着 $x_3$ 轴总是压缩的, 对不动点的分析可简化为 (见练习 10) 对形如

$$x_1 \mapsto \beta + Ax_1^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \cdots$$

的一维映射的分析, 这类似于 Antronov-Leontovich 定理, 但 $A$ 现在可以为正 (单同宿轨道) 也可以是负 (扭转同宿轨道).

事实上, 这个类似可以进一步推广, 因为在这种情形在同宿轨道附近存在二维吸引的不变 "中心流形"(见 6.4 节). ◇

最后一个情形最困难.

**定理 6.6** (鞍–焦点, $\sigma_0>0$)　假设三维系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x\in\mathbb{R}^3, \alpha\in\mathbb{R}^1, \tag{6.17}$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha=0$ 系统有鞍–焦点 $x_0=0$, 特征值 $\lambda_1(0)>0>\mathrm{Re}\ \lambda_{2,3}(0)$; 以及一条同宿轨道 $\Gamma_0$. 假设下面的一般性条件成立:

(H.1) $\sigma_0=\lambda_1(0)+\mathrm{Re}\lambda_{2,3}(0)>0$;

(H.2) $\lambda_2(0)\neq\lambda_3(0)$.

则系统 (6.17) 对所有充分小 $|\beta|$, 在 $\Gamma_0\cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 内存在无穷多个鞍点环. □

**定理 6.4 和 6.6 证明概要**　为了概述证明, 选择坐标系使得在此坐标系下 $W^s(x_0)$ 是 (局部地) 平面 $x_1=0$, $W^u(x_0)$ 是 (也是局部地) 直线 $x_2=x_3=0$(见图 6.31). 引入二维截面 $\Sigma$ 和 $\Pi$, 以及 Poincaré 映射 $P:\Sigma^+\to\Sigma$ 表示为两个映

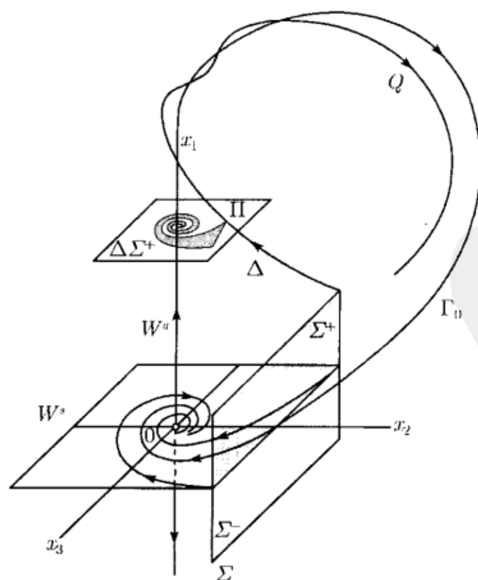



图 6.31　鞍–焦点情形 Poincaré 映射的构造

射：鞍点附近映射 $\Delta : \Sigma^+ \to \Pi$ 和大范围映射 $Q : \Pi \to \Sigma$ 的复合, 如同和定理 6.3 和 6.7 的证明一样①.

在 $\Pi$ 上 $\Sigma^+$ 的象 $\Delta\Sigma^+$ 不再是角状物而是 "固体螺旋"(有时称为 Shilnikov 蛇). 大范围映射 $Q$ 映 "蛇" 到包含 $\Sigma$ 的平面.

首先, 假定 $\beta = 0$, 并考虑 "蛇" 象 (即 $P\Sigma^+$) 与局部截面 $\Sigma$ 的交. "蛇" 的原点在 $\Gamma_0$ 和 $\Sigma$ 的交上. $\Sigma$ 与 $W^s(x_0)$ 的交把 "蛇" 分裂成无穷多个上和下 "半螺线". 上 "半螺线"$P\Sigma_i, i = 1, 2, \cdots$ 的原象 $\Sigma_i$ 是 $\Sigma^+$ 中的水平带 (见图 6.32). 如果鞍点量 $\sigma_0 > 0$, 则对 $i \geqslant i_0$, $i_0$ 是某个正数交 $\Sigma_i \cap P\Sigma_i$ 非空, 它是由两个分量所组成 (图 6.32(a) 中 $i_0 = 2$). 每一个这样的交形成一个 Smale 马蹄 (见第 1 章). 可以验证必要的展开条件满足. 因此, 每个马蹄给出无穷多个鞍点不动点. 这些不动点对应于 (6.17) 的鞍点极限环. 如果 $\sigma_0 < 0$, 存在某个 $i_0 > 0$ 使得对 $i \geqslant i_0$ 交 $\Sigma_i \cap P\Sigma_i$ 是空集 (图 6.32(b) 中 $i_0 = 2$). 由此, $P$ 在接近 $\Gamma_0$ 的 $\Sigma^+$ 中没有不动点.

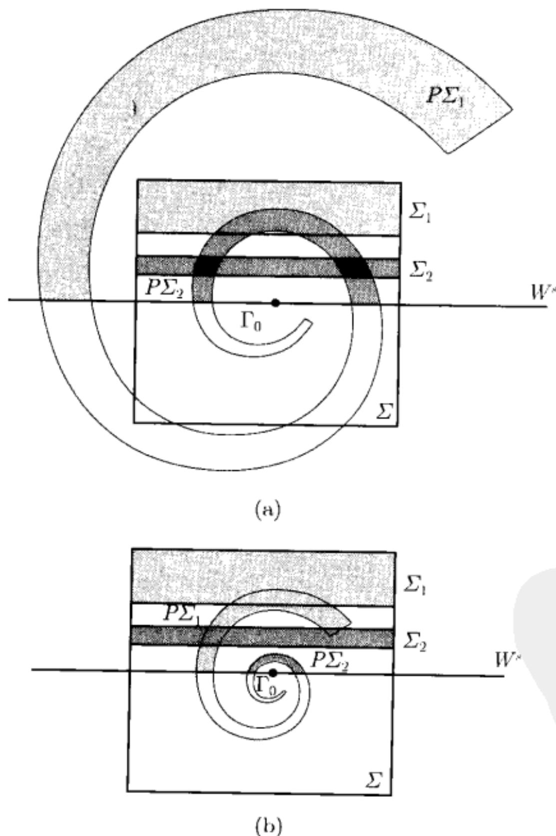



图 6.32 鞍–焦点情形 Poincaré 映射的构造：(a) $\sigma_0 > 0$; (b) $\sigma_0 < 0$.

① 事实上, 在鞍–焦点情形, 存在 $C^1$ 坐标变换将系统局部线性化 (见附录 B). 这允许我们解析地计算 $\Delta$.

如果 $\beta \neq 0$, 对应于 $\Gamma_0$ 的点被 $\Sigma$ 中的水平线替代. 因此, 如果 $\sigma_0 > 0$, 仅保留有限个 Smale 马蹄. 对所有充分小 $|\beta|$, 它们仍给出 (6.17) 的无穷多个鞍点极限环. 在情形 $\sigma_0 < 0$, 映射 $P$ 对 $\beta > 0$ 在 $\Sigma^+$ 内是压缩的, 因此有对应于 (6.14) 的稳定极限环的唯一吸引不动点, 如果 $\beta < 0$ 就没有周期轨道. □

**注**　(1) 如同在 $\sigma_0 < 0$ 时的鞍–焦点的情形, 我们不能说, 所有满足 (H.1)~(H.2) 的系统 (6.15) 的分支图都拓扑等价. 理由是一样的: 由 (6.15) 给出的 $\nu_0$ 的拓扑不变性. 事实上, 同宿轨道附近相图的完全的拓扑结构还不清楚, 尽管某些本质信息已由 Shilnikov 得到. 设 $\tilde{\Omega}(\nu)$ 是所有不等价的双向无穷序列

$$\omega = \{\cdots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$$

的集合, 其中 $\omega_i$ 是对一切 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 以及某个实数 $\nu > 0$ 满足

$$\omega_{i+1} < \nu \omega_i$$

的非负整数. 于是, 在 $\beta = 0$, 存在对所有 $t \in \mathbb{R}^1$, (6.17) 的位于 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 内的轨道子集合, 它的元素跟 $\tilde{\Omega}(\nu)$ 的一一对应, 其中 $\nu$ 不超过拓扑不变量 $\nu_0$. 数值 $\omega_i$ 可视为 "小" 旋转数, 它是由鞍点附近的轨道经 $i$ 次 "大范围" 旋转所构成.

(2) 当 $\beta$ 取正或负值趋于零时, 产生*无穷多个分支*. 其中有些分支与 "基本" 极限环有关, 它使得沿着同宿轨道大范围旋转. 可以证明, 当 $|\beta|$ 趋于零时, 这个环产生无穷多个*切分支*. 为了了解这个现象, 比较在鞍–焦点, $\sigma_0 < 0$ 和 $\sigma_0 > 0$ 两种情形, 这个环的周期 $T_\beta$ 关于 $\beta$ 的依赖性是有用的. 有关的图像如图 6.33 所示. 在 $\sigma_0 < 0$ 情形, 这个依赖性是单调的, 而如果 $\sigma_0 > 0$, 它就变得 "摇摆", 摇摆的存在意味着由于折分支基本环的消失和出现有无穷多次. 注意, 对任何充分小 $|\beta|$, 只存在有限多个这种 "基本" 环 (它们不同于鞍–焦点附近的 "小" 旋转次数, 而是环有高周期多个旋转次数). 此外, 环也具有无穷多个*倍周期分支*. 折分支和倍周期分支在图中分别由 $t$ 和 $f$ 标记. 产生的每一个倍周期环在它们闭合之前有两个大范围旋转. 这些环本身当趋于同宿轨道时又产生分支, 使得图像变得更加复杂. 在鞍–焦点引入 (6.17) 的散度

$$\sigma_1 = (\mathrm{div} f)(x_0, 0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 2\mathrm{Re}\lambda_{2,3}.$$

如果 $\sigma_1 < 0$, 分支附近的基本环可以是稳定的 (事实上, 只在 $\beta$ 的短区间内它是稳定的). 如果 $\sigma_1 > 0$, 则存在区间, 其中的基本环是整体不稳定 (排斥的). 还存在类似的区间, 其中由倍周期分支产生第二类环. 因此, 定理中所指的鞍点环以及在 $\beta = 0$ 由 $\Omega(\nu)$ 的周期序列编号的环不是 $U_0$ 中仅有的环.

(3) 同宿轨道附近的其他分支归于*第二类同宿轨道*. 在定理 6.6 的条件下, 存在一个 $\beta_i > 0, \beta_i \to 0$ 的无穷序列, 对此序列系统有二重同宿轨道, 它们在鞍–焦点

附近具有不同 (递增) 的旋转次数 (见图 6.34), 其他辅助的同宿轨道也将出现, 像在最后回复前三次大范围旋转的同宿轨道.

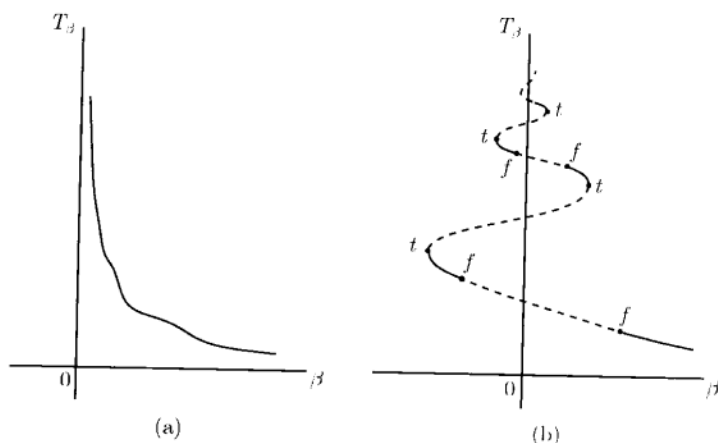



图 6.33　鞍–焦点同宿分支附近环的周期: (a) $\sigma_0 < 0$; (b) $\sigma_0 > 0$

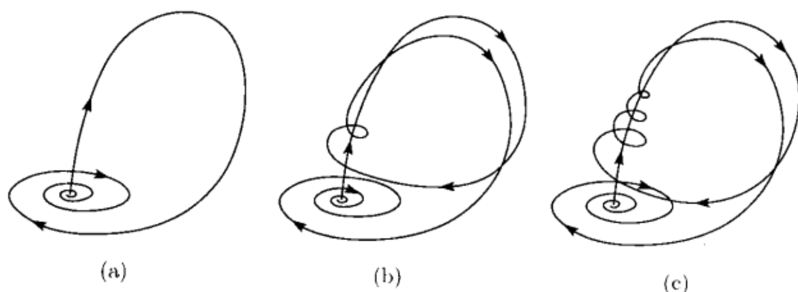



图 6.34　基本的 (a) 与倍 (b), (c) 同宿轨道

(4) 在这一节假定 $n_- = \dim W^s = 2$ 和 $n_+ = \dim W^u = 1$. 为了对相反情形 (即 $n_- = 1, n_+ = 2$) 应用所得结果, 必须更改时间方向. 归结为代换: $\lambda_j \mapsto -\lambda_j, \sigma_i \mapsto -\sigma_i$ 以及 "稳定"$\mapsto$"排斥".

◇

**例 6.3** (FitzHugh-Nagumo 模型中的复杂脉冲)　下面的偏微分方程组是沿着一个轴模拟神经脉冲传递的 Hodgkin-Huxley 方程的 FitzHugh-Nagumo 模拟 (FitzHugh, 1961; Nagumo, Arimoto, Yoshizawa, 1962):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_\alpha(u) - v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = bu, \end{cases}$$

这里 $u = u(x,t)$ 代表膜势; $v = v(x,t)$ 是现象学 "恢复" 变量; $f_a(u) = u(u-a)(u-1), 1 > a > 0, b > 0, -\infty < x < +\infty, t > 0$.

行波是这个方程下面形式的解

$$u(x,t) = U(\xi), \quad v(x,t) = V(\xi), \quad \xi = x + ct,$$

其中 $c$ 是预先未知的波传播速度. 函数 $U(\xi)$ 和 $V(\xi)$ 定义了波廓. 满足常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{U} = W, \\ \dot{W} = cW + f_\alpha(U) + V, \\ \dot{V} = \dfrac{b}{c}U, \end{cases} \tag{6.18}$$

这里的点是关于 "时间"$\xi$ 的导数. 系统 (6.18) 称为*波系统*. 它依赖于三个正参数 $(a,b,c)$. (6.18) 的任何一个有界轨道对应于 FitzHugh-Nagumo 系统在参数值 $(a,b)$ 传播速度为 $c$ 的行波解.

对所有 $c>0$ 波系统有唯一平衡点 $0=(0,0,0)$, 一个正特征值 $\lambda_1$ 和两个具负实部的特征值 $\lambda_{2,3}$(见第 4 章练习 2). 这个平衡点可以是鞍点或者是具有一维不稳定和二维稳定的不变流形 $W^{u,s}(0)$ 的鞍–焦点. 鞍点和鞍–焦点情形的转移起因于出现两个负特征值. 对固定的 $b>0$, 这种情况发生在曲线

$$D_b = \{(a,c) : c^4(4b-a^2) + 2ac^2(9b-2a^2) + 27b^2 = 0\}$$

上. 在 $(a,c)$ 平面上对不同的 $b$ 值的几条边界 $D_b$ 在图 6.35 以点线表示. 鞍–焦点的区域位于每个边界的下面, 且当 $b \to 0$ 时消失.

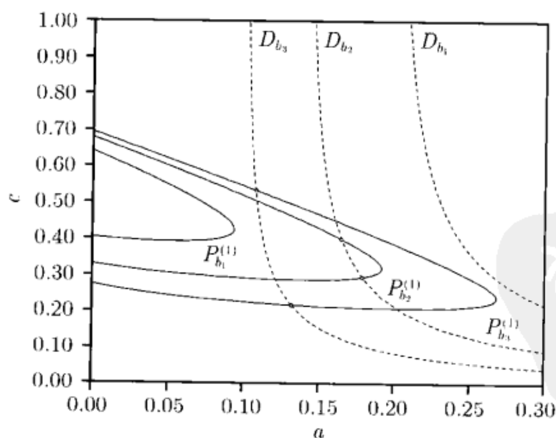



图 6.35　波系统 (6.18) 的分支曲线: $b_1 = 0.01; b_2 = 0.005; b_3 = 0.0025$

不稳定流形的一个分枝 $W_1^u$ 离开原点进入正卦限, 可回到平衡点而在某个参值形成一条同宿轨道 $\Gamma_0$(Hastings, 1976). 这些参数值只能借助第 10 章介绍的方法数值地找到. 图 6.35 显示在 $(a,c)$ 平面上由 Kuznetsov 和 Panfilov (1981) 对不同

但固定的 $b$ 值计算得到的几条同宿分支曲线 $P_b^{(1)}$. 观察图 6.35 可以得知, 对所有 $b>0$, 分支曲线 $P_b^{(1)}$ 通过由 $D_b$ 所划定的鞍–焦点区域 (见图 6.36, 其中曲线 $D_b$ 和 $P_b^{(1)}$ 对应于 $b=0.0025$ 是重叠的). 实际上, 对 $b>0.1$, 同宿分支曲线整个地属于鞍–焦点区域. 任一同宿轨道定义一个*行波脉冲*. 脉冲的形状取决于对应平衡点的类型: 鞍点情形有一条单调 “尾巴”, 鞍–焦点情形有一条振动 “尾巴”(见图 3.37).

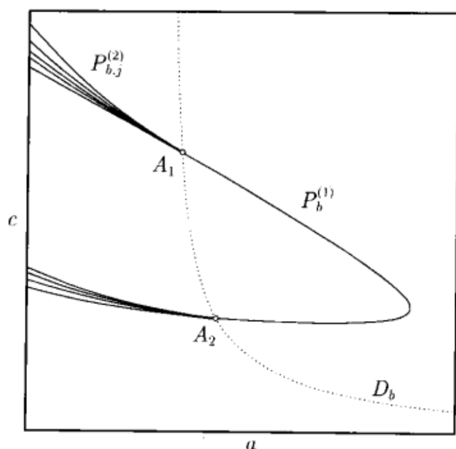



图 6.36　对 $b=0.0025$ 的参数曲线 $D_b$ 和 $P_b^{(1)}$

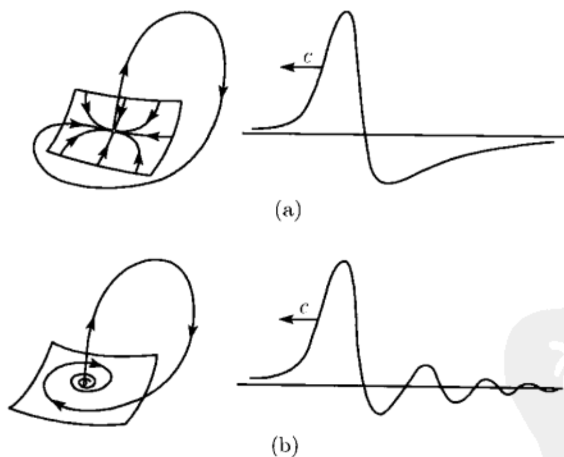



图 6.37　脉冲有 (a) 单调和 (b) 振动 “尾巴”

对 $c>0$, 鞍点量 $\sigma_0$ 总是正的 (见练习 11). 因此, (6.18) 在同宿曲线 $P_b^{(1)}$ 附近的相图是由定理 6.5 和定理 6.6 描述. 特别, 在鞍–焦点区域的同宿分支曲线 $P_b^{(1)}$ 附近, 系统 (6.18) 有无穷多个鞍点环. 这些环对应于 FitzHugh-Nagumo 模型中的*周期波链*(Feroe, 1981). 在 (6.18) 的基本同宿分支附近存在对应于*二重波脉冲*的第二

类同宿轨道 (见图 6.38)(Evans, Fenichel, Feroe, 1982). 利用 Belyakov(1980) 的结果可以证明 (Kuznetsov, Panfiliv, 1981), (6.18) 中的第二类同宿分支曲线 $P_{b,j}^{(2)}$ 来自点 $A_{1,2}$, 其中 $P_b^{(1)}$ 交于 $D_b$(见图 6.36). ◇

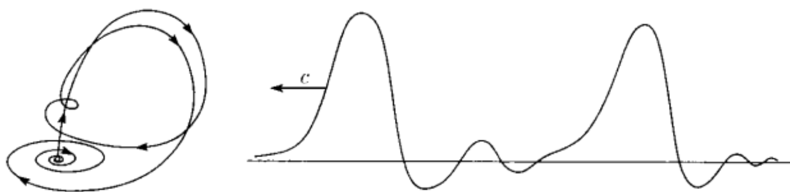



图 6.38　二重脉冲

## 6.4　$n$ 维系统中的同宿分支

我们已经证明 (见附录 B 中的参考文献), 在同宿分支附近存在依赖于参数的不变中心流形. 这就允许我们将 $n$ 维系统 ($n>3$) 双曲平衡点的同宿轨道的一般分支的研究简化为对二维、三维或者四维系统的研究. 这一节讨论哪种同宿轨道在 $n$ 维情形是一般的, 并对这种轨道叙述同宿中心流形定理. 然后从这条定理推导 $n$ 维系统中所考虑的一般同宿分支的某些结果, 第一个得到这些结果的是 Shilnikov, 他没有用中心流形简化.

### 6.4.1　正则同宿轨道: Melnikov 积分

考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}^1,\tag{6.19}$$

其中 $f$ 是 $C^\infty$ 光滑, $n\geqslant 3$. 假设 (6.19) 在 $\alpha=0$ 有双曲平衡点 $x_0$, Jacobi 矩阵 $A$ 在此平衡点有 $n_+$ 个特征值, 其实部为正

$$0<\mathrm{Re}\lambda_1\leqslant\mathrm{Re}\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\lambda_{n_+}$$

和 $n_-$ 个实部为负的特征值

$$\mathrm{Re}\mu_{n_-}\leqslant\mathrm{Re}\lambda_{n_--1}\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\mu_1<0.$$

对所有充分小 $|\alpha|$, 平衡点依然存在, 且有不稳定和稳定的局部不变流形 $W^u$ 和 $W^s$, 它们可以大范围延伸, $\dim W^{u,s}=n_\pm, n_++n_-=n$. 假设 (6.19) 在 $\alpha=0$ 有一条轨道 $\Gamma_0$ 同宿于 $x_0$, 并以 $x^0(t)$ 记 (6.19) 对应于 $\Gamma_0$ 的解.

如在 6.1 节已经看到的, $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 不可能沿着 $\Gamma_0$ 横截相交, 因为向量 $\dot{x}^0(t_0)=f(x^0(t_0),0)$ 在任何点 $x^0(t_0)\in\Gamma_0$ 与这两个流形相切. 但是, 在一般情

形, 这样的向量只有 $\dot{x}^0(t_0)$:

$$T_{x^0(t_0)}W^u(x_0)\cap T_{x^0(t_0)}W^s(x_0)=\operatorname{span}\{\dot{x}^0(t_0)\}.$$

由此, 一般地

$$\operatorname{codim}(T_{x^0(t_0)}W^u(x_0)+T_{x^0(t_0)}W^s(x_0))=1.$$

对 $\alpha\neq 0$, 一般的扰动将流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 在保持方向下分裂一个 $O(\alpha)$ 距离. 这样的同宿轨道称为*正则的*.

如同 6.2 节, 引入*扩展系统*

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,\alpha),\\ \dot{\alpha}=0,\end{cases}\tag{6.20}$$

相变量为 $(x,\alpha)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n+1}$. 设 $x_0(\alpha)$ 为 (6.19) 中对小 $|\alpha|$ 的单参数鞍点族, $x_0(0)=x_0$. 这个族定义了 (6.20) 的一个不变集 —— 平衡点曲线. 这条曲线有不稳定和稳定流形 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$, 它们的薄片 $\alpha=$ 常数与鞍点 $x_0(\alpha)$ 对应的不稳定和稳定流形 $W^u$ 和 $W^s$ 重合. 显然, 同宿轨道的正则性正好转化为在 (6.20) 的 $(n+1)$ 维相空间中 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 在 $\alpha=0$ 沿着 $\Gamma_0$ 的横截性

$$T_{(x^0(t_0),0)}\mathcal{W}^u+T_{(x^0(t_0),0)}\mathcal{W}^s=\mathbb{R}^{n+1}.$$

图 6.21 显示 $n=2$ 的情形.

$\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 的横截相交性可以解析地表示. 就是说, 在 $\alpha=0$ 沿着 $x_0(t)$ 考虑 (6.20) 的线性化

$$\begin{cases}\dot{u}=f_x(x^0(t),0)u+f_\alpha(x^0(t),0)\mu,\\ \dot{\mu}=0.\end{cases}\tag{6.21}$$

若 $(u_0,\mu_0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathcal{W}^u$ 或 $\mathcal{W}^s$ 的切向量, 则以 $(u_0,\mu_0)^{\mathrm{T}}$ 为初始值的这个系统的解向量 $(u(t),\mu(t))^{\mathrm{T}}$ 总是和对应的不变流形相切. 向量函数

$$\begin{pmatrix}\varsigma(t)\\ \mu(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}^0(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

是 (6.21) 的有界解, 它与不变流形 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 沿着它们的交线都相切①. 可以用一个数量乘这个解而得到 (6.21) 的另一个有界解. $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 在 $\alpha=0$ 沿着 $\Gamma_0$ 的横截相交性, 意味着在扩展系统 (6.21) 的数量乘积的有界解内 $(\dot{x}^0(t),0)^{\mathrm{T}}$ 是唯一的. 考虑到 (6.21) 中关于 $\mu$ 的方程是平凡的, 可以得知 $x^0(t)$ 在围绕 $\Gamma_0$ 的*变分方程*

$$\dot{u}=A(t)u,\quad u\in\mathbb{R}^n\tag{6.22}$$

① 事实上, 由于 $\dot{x}^0=f(x^0(t),0)$, 这个解当 $t\to\pm\infty$ 时指数式地趋于零.

的数量乘积解内是唯一, 这里 $A(t)=f_x(x^0(t),0)$. 这导致围绕 $\Gamma_0$ 伴随变分方程

$$\dot{v}=-A^{\mathrm{T}}(t)v,\quad v\in\mathbb{R}^n \tag{6.23}$$

在数量乘积的有界解内有唯一解 $v(t)=\eta(t)$. 事实上, 方程 (6.22) 和 (6.23) 有相同个数的线性无关有界解. 实际上, 对每个 $t\in\mathbb{R}^1$ 向量 $\zeta(t)$ 和 $\eta(t)$ 互相正交. 利用 (6.22) 和 (6.23), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\eta,\zeta\rangle=\langle\dot{\eta},\zeta\rangle+\langle\eta,\dot{\zeta}\rangle=-\langle A^{\mathrm{T}}\eta,\zeta\rangle+\langle\eta,A\zeta\rangle=-\langle\eta,A\zeta\rangle+\langle\eta,A\zeta\rangle=0,$$

即 $\langle\eta(t),\zeta(t)\rangle=C$. 常数 $C$ 为零, 因为当 $t\to\pm\infty$ 时 $\eta(t)$ 和 $\zeta(t)$ 都指数式地趋于零:

$$\langle\eta(t),\zeta(t)\rangle=0,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

同时, 类似的讨论显示 $\eta(t)$ 与任何跟 $W^s(x_0)$ 或 $W^u(x_0)$ 相切的向量正交. 此外, 横截性等价于条件

$$M_\alpha(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\eta(t),f_\alpha(x^0(t),0)\rangle\mathrm{d}t\neq 0. \tag{6.24}$$

若 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 的交不是横截的, 则存在 (6.21) 的另外有界解 $(\zeta_0(t),\mu_0)^{\mathrm{T}},\mu_0\neq 0$. 取 (6.21) 和 $\eta$ 的数量积并对整个时间积分, 得到

$$\begin{aligned}\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\eta(t),f_\alpha(x^0(t),0)\rangle\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\eta(t),\dot{\zeta}_0(t)-A(t)\zeta_0(t)\rangle\mathrm{d}t\\&=\langle\eta(t),\zeta_0(t)\rangle|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\dot{\eta}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)\eta(t),\zeta_0(t)\rangle\mathrm{d}t\\&=0.\end{aligned}$$

(6.24) 中的积分称为 Melnikov 积分. 这个条件允许我们验证 $n$ 维系统中 ($n\geqslant 2$) 流形分裂的正则性. 此外, 可以引入一个数量分裂函数 $M(\alpha)$, 它测量不变流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 在点 $x^0(0)\in\Gamma_0$ 附近按向量 $\eta(0)$ 定义的方向之间的位移, 并有性质

$$M(\alpha)=M_\alpha(0)\alpha+O(\alpha^2),$$

这里 $M_\alpha(0)$ 由 (6.24) 给出.

在二维情形 Melnikov 积分 $M_\alpha(0)$ 可更明确地计算. 将 (6.19) 写为坐标形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x,\alpha),\\\dot{x}_2=f_2(x,\alpha).\end{cases}$$

变分方程 (6.22) 的解 $\zeta(t)$ 有形式

$$\zeta(t)=\dot{x}^0(t)=\begin{pmatrix} f_1(x^0(t),0) \\ f_2(x^0(t),0) \end{pmatrix}.$$

由于 $\eta(t)\perp\zeta(t)$, 对某个纯量函数 $\varphi(t)$, 有

$$\eta(t)=\varphi(t)\begin{pmatrix} -f_2(x^0(t),0) \\ f_1(x^0(t),0) \end{pmatrix}.$$

容易验证, 这个函数满足方程

$$\dot{\varphi}(t)=-(\mathrm{div}\ f)(x^0(t),0)\varphi(t),$$

这里

$$\mathrm{div}\ f=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$$

是向量场 $f$ 的散度. 假设 $\varphi(0)=1$, 得

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t(\mathrm{div}\ f)(x^0(\tau),0)\mathrm{d}\tau},$$

以及

$$M_\alpha(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\tau\right]\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\right)\mathrm{d}t, \tag{6.25}$$

这里所有关于 $f=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}$ 的表达式都是在 $\alpha=0$ 沿着同宿解 $x^0(\cdot)$ 计算的.

**注**　假设 (6.4) 在 $\alpha=0$ 是 Hamilton 系统, $\alpha$ 是扰动项前的小参数, 即

$$\dot{x}=J(\nabla H)(x)+\alpha g(x),\quad x\in\mathbb{R}^2,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

这里

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \nabla H=\left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$H=H(x)$ 是 Hamilton 函数. 于是 Melnikov 积分 (6.25) 可进一步简化. 在此情形, $\mathrm{div}f\equiv 0$, 同宿轨道 $\Gamma_0$ 属于等高线 $\{x:H(x)=H(x_0)\}$. 假设它的内部是区域 $\Omega=\{H(x)\leqslant H(x_0)\}$. 于是, 应用 Green 定理, 沿着 $\Gamma_0$, Melnikov 积分简化为区域积分

$$M_\alpha(0)=\int_\Omega(\mathrm{div}g)(x^0(t))\mathrm{d}\omega.$$

◊

### 6.4.2 同宿中心流形

为了叙述同宿中心流形定理, 区分最接近虚轴的特征值是有用的 (见图 6.39).

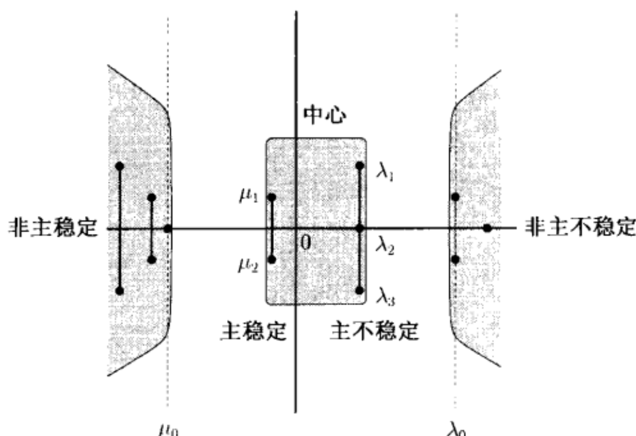



图 6.39　特征值的划分

**定义 6.9**　称最接近于虚轴的具正 (负) 实部的特征值为不稳定 (稳定) 主特征值, 对应的特征空间称为不稳定 (稳定) 主特征空间.

**定义 6.10**　稳定和不稳定的主特征值一起称为中心特征值, 对应的特征空间称为中心特征空间.

在 $W^u(W^s)$ 上, 几乎所有的轨道当 $t \to -\infty(t \to +\infty)$ 时沿着记为 $T^u(T^s)$ 的主特征空间趋于平衡点. 例外的轨道形成一个非主流形 $W^{uu}(W^{ss})$, 它与对应的非主特征值的特征空间 $T^{uu}(T^{ss})$ 相切. 中心特征空间 $T^c$ 是稳定和不稳定主特征空间的直和 $T^c = T^u \oplus T^s$. 用 $\lambda_0$ 记对应于非主不稳定特征值的最小的 $\mathrm{Re}\lambda_j$, $\mu_0$ 为对应于非主稳定特征值的最大的 $\mathrm{Re}\mu_j$(见图 6.39). 按构造

$$\mu_0 < \mathrm{Re}\mu_1 < 0 < \mathrm{Re}\lambda_1 < \lambda_0,$$

这里 $\lambda_1$ 是主不稳定特征值, $\mu_1$ 是主稳定特征值. 只要两个非主特征空间都非空, 引入两个实数

$$g^s = \frac{\mu_0}{\mathrm{Re}\mu_1}, \quad g^u = \frac{\lambda_0}{\mathrm{Re}\lambda_1}.$$

这些数刻画对应于非主和主特征值之间的相对空隙, 且满足 $g^{s,u} > 1$. 如果非主特征空间之一是空的, 形式地, 令 $g^s = -\infty$, 或 $g^u = +\infty$.

现在注意, 变分方程 (6.22) 是非自治线性系统, 它对应的矩阵 $A(t)$ 渐近地趋于常矩阵, 即

$$\lim_{t \to \pm\infty} A(t) = A_0.$$

因此, 对 $t \to \pm\infty$, (6.21) 的解具有像线性自治系统

$$\dot{v} = A_0 v$$

的解, 可以引入四个 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间

$$E^{uu}(t_0) = \left\{ v_0 : \lim_{t \to -\infty} \frac{v(t)}{||v(t)||} \in T^{uu} \right\},$$

$$E^{ss}(t_0) = \left\{ v_0 : \lim_{t \to +\infty} \frac{v(t)}{||v(t)||} \in T^{ss} \right\},$$

$$E^{cu}(t_0) = \left\{ v_0 : \lim_{t \to -\infty} \frac{v(t)}{||v(t)||} \in T^c \oplus T^{uu} \right\},$$

$$E^{cs}(t_0) = \left\{ v_0 : \lim_{t \to +\infty} \frac{v(t)}{||v(t)||} \in T^c \oplus T^{ss} \right\},$$

这里 $v(t) = \Phi(v_0, t_0, t)$ 是 (6.21) 满足初始条件 $t = t_0, v = v_0$ 的解, $\oplus$ 表示线性子空间的直和. 最后, 定义

$$E^c(t_0) = E^{cu}(t_0) \cap E^{cs}(t_0).$$

现在给出下面的定理.

**定理 6.7** (同宿中心流形) 假设 (6.19) 在 $\alpha = 0$ 有双曲平衡点 $x_0 = 0$ 和一条同宿轨道

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x^0(t), t \in \mathbb{R}^1\}.$$

假设下面的条件成立:

(H.1) $\dot{x}^0(0) \in E^c(0)$;

(H.2) $E^{uu}(0) \oplus E^c(0) \oplus E^{ss}(0) = \mathbb{R}^n$.

则对所有充分小的 $|\alpha|$, (6.19) 有定义在 $\Gamma_0 \cap x_0$ 的邻域 $U_0$ 内的不变流形 $\mathcal{M}_\alpha$, 它具有下面性质:

(i) $x^0(t_0) \in \mathcal{M}_0$ 且对一切 $t_0 \in \mathbb{R}^1$, 切空间 $T_{x^0(t_0)}\mathcal{M}_0 = E^c(t_0)$;

(ii) 对一切 $t \in \mathbb{R}^1$, 位于 $U_0$ 内的 (6.19) 的任何一个解都属于 $\mathcal{M}_\alpha$;

(iii) 每一个 $\mathcal{M}_\alpha$ 是 $C^k$ 光滑, 这里 $k \geqslant 1$ 是满足

$$g^s > k \text{和} \quad g^u > k$$

的最大整数. □

**定义 6.11** 流形 $\mathcal{M}_\alpha$ 称为同宿中心流形.

**注** (1) 条件 (H.1) 和 (H.2) 保证对一切 $t_0 \neq 0$ 类似的条件成立. 由第一个条件得知同宿轨道 $\Gamma_0$ 沿着主特征空间 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 都趋于平衡点 $x_0$. 第二

个条件意味着不变流形 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 在 $\alpha = 0$ 沿着同宿轨道 $\Gamma_0$ 以 "最小可能" 非横截相交.

(2) 流形 $\mathcal{M}_0$ 沿着 $E^{ss}$ 方向指数式地吸引, 沿着 $E^{uu}$ 方向指数式地排斥. 相同的性质对小的 $|\alpha| \neq 0$, 的 $\mathcal{M}_\alpha$ 当 $E^{ss,uu}$ 以接近的子空间代替时也成立.

(3) 同宿中心流形只有有限 $C^k$ 次光滑性, 它随有关空隙 $g^{s,u}$ 而增大. 只有在 $\mathcal{M}_\alpha$ 上选择了适当坐标 (6.19) 在不变流形 $\mathcal{M}_\alpha$ 上的限制是 $C^k$-ODEs 系统, 这个限制系统在 $\alpha = 0$ 有一条同宿于 $x_0$ 的轨道.

(4) 事实上, 在定理 6.7 的假设下同宿中心流形属于 $C^{k,\beta}$ 类, 对某 $0 < \beta < +\infty$, 即它可局部地表示为其 $k$ 阶导数关于指标 $\beta$ 是 Holder 连续的函数的图像. ◇

这个定理对 $\mathbb{R}^3$ 如图 6.40 所示. 不过仅画出在 $\alpha = 0$ 的临界中心流形 $\mathcal{M}_0$. 假设 $x_0$ 的所有特征值都是实且单的, $\mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1$. 鞍点 $x_0$ 的中心特征空间 $T^c$ 是二维且由 (主) 不稳定特征向量 $v_1(A_0v_1 = \lambda_1 v_1)$ 以及主稳定特征向量 $w_1$ $(A_0 w_1 = \mu_1 w_1)$ 所张成. 流形 $\mathcal{M}_0$ 是二维的, 包含 $\Gamma_0$, 且在 $x_0$ 与 $T^c$ 相切. 沿着 $E^{ss}$ 方向指数式地吸引. 这个流形可以是定向(图6.40(a))也可以是不定向(图6.40(b)). 在这情形, 条件 (H.2) 等价于强倾角性质 (见 6.3 节), 所以 $\mathcal{M}_0$ 的定向性依赖于在 $\Gamma_0$ 附近 $W^u$ 的闭包是定向还是不定向 (参看图 6.25).

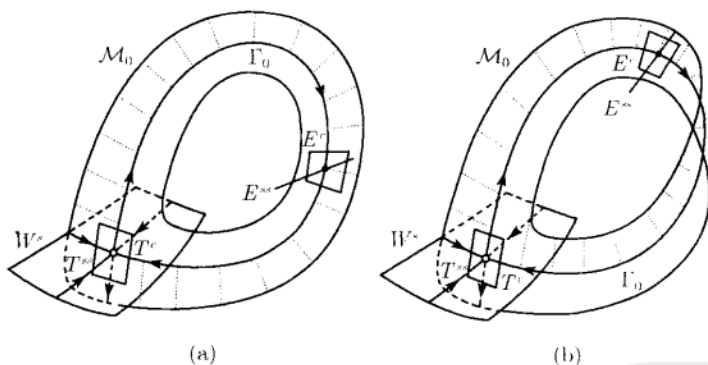



图 6.40　$\mathbb{R}^3$ 中的同宿中心流形 $\mathcal{M}_0$

### 6.4.3　$\mathbb{R}^n$ 中一般同宿分支

一般地, 主特征空间 $T^{s,u}$ 是一维或者二维. 在第一种情形, 特征空间对应于单实特征值, 在第二种情形, 它对应于单对复共轭特征值. 如果有必要就改变时间方向, 仅有三类主特征值的配置:

(a) (鞍点) 主特征值是实且单的, $\mu_1 < 0 < \lambda_1$ (图 6.41(a));

(b) (鞍-焦点) 稳定的主特征值是复且单的, $\mu_1 = \bar{\mu}_2$, 不稳定主特征值 $\lambda_1$ 是实且单的 (图 8.41(b));

(c) (焦-焦点) 主特征值是复且单的, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \mu_1 = \bar{\mu}_2$(图 6.41(c)).

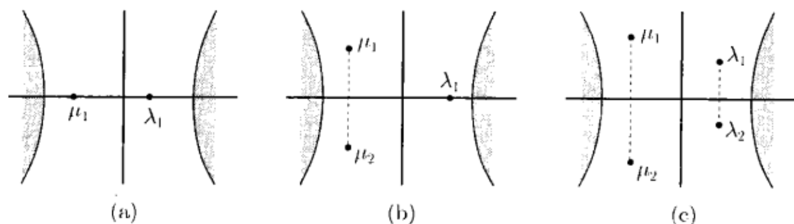



图 6.41 一般 Shilnikov 情形的主特征值

**定义 6.12** 双曲平衡点的鞍点量 $\sigma$ 是它的主特征值的实部之和.

因此

$$\sigma = \text{Re}\lambda_1 + \text{Re}\mu_1,$$

其中 $\lambda_1$ 是主不稳定特征值, $\mu_1$ 是主稳定特征值. 假设下面的非退化条件在 $\alpha = 0$ 成立:

(H.0) $\sigma_0 \neq 0$ 且主特征空间 $T^{s,u}$ 不是一维就是二维.

下面的定理是定理 6.7 的直接推论, 其结果由 6.2~6.4 节得到.

**定理 6.8** (鞍点) 对任何一个一般的单参数系统, 若它有鞍点平衡点 $x_0$, 在 $\alpha = 0$ 有同宿轨道 $\Gamma_0$, 则存在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$, 在此邻域内, 当 $\alpha$ 穿过零时, 从 $\Gamma_0$ 分支出唯一极限环 $L_\alpha$. 此外, 若 $\sigma_0 < 0$, 则 $\dim W^s(L_\alpha) = n_- + 1$, 若 $\sigma_0 > 0$, 则 $\dim W^s(L_\alpha) = n_-$. □

在鞍点情形, 同宿中心流形 $\mathcal{M}_\alpha$ 是二维且是单 (定向) 带或扭转 (非定向或 Mobius) 带. 在 $\alpha = 0$ 限制系统有同宿轨道. 只要对定理 6.1 的证明 (见 6.2 节) 稍作修改就行. 就是说, 大范围映射 $Q$ 的系数 $a(\beta)$ 现在不是正的 (定向情形), 就是负的 (Mobius 情形). 在这情形条件 (H.1) 和 (H.2) 导致 $W^{u,s}$ 在鞍点附近沿着对应的非主流形 $W^{ss,uu}$ 自身相交. 在三维情形, 这些条件意味着同宿轨道 $\Gamma_0$ 要么是单的要么是扭转的 (定义如同 6.3 节). 因此, 可交替地证明定理 6.3 和 6.5.

**定理 6.9** (鞍-焦点) 对任何一个一般的单参数系统, 若它有鞍-焦点平衡点 $x_0$, 在 $\alpha = 0$ 此平衡点有同宿轨道 $\Gamma_0$, 则存在 $\Gamma_0 \cup x_0$ 的邻域 $U_0$ 使得下面两个之一交替成立:

(a) 如果 $\sigma_0 < 0$, 当 $\alpha$ 穿过零时在 $U_0$ 内从 $\Gamma_0$ 分支出唯一极限环 $L_\alpha$, $\dim W^s(L_\alpha) = n_- + 1$;

(b) 如果 $\sigma_0 > 0$, 对所有充分小 $|\alpha|$, 系统在 $U_0$ 内对有无穷多个鞍点极限环. □

在此情形, 同宿中心流形 $\mathcal{M}_\alpha$ 是三维的. 在 $\alpha = 0$ 限制系统有一条同宿于鞍-焦点的同宿轨道, 因此, 可以在这个流形上重复定理 6.4(在情形 (a)) 和定理 6.6(在情形 (b)) 的证明.

**定理 6.10** (焦–焦点)　对任何一个一般的单参数系统, 如果它有焦–焦点平衡点 $x_0$, 在 $\alpha=0$ 此平衡点有同宿轨道 $\Gamma_0$, 则存在 $\Gamma_0\cup x_0$ 的邻域 $U_0$, 在此邻域内, 对所有充分小 $|\alpha|$, 系统有无穷多个鞍点极限环. □

这里, 同宿中心流形 $\mathcal{M}_\alpha$ 是四维的, 在 $\alpha=0$ 有同宿于焦–焦点的同宿轨道. 因此, 定理 6.11 的证明由附录 A 得知成立.

上面定理中列出的一般性条件是非退化条件 (H.0), (H.1) 和 (H.2), 以及横截性条件:

(H.3) 同宿轨道 $\Gamma_0$ 是正则的, 即切空间 $T_{x^0(t)}W^s$ 和 $T_{x^0(t)}W^u$ 在每一点 $x^0(t)\in\Gamma_0$ 的交是一维, 而 $W^s$ 和 $W^u$ 当 $\alpha$ 离开零时以 $O(\alpha)$ 距离分裂.

回忆 (H.3) 可以用 Melnikov 积分重叙述为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\eta(t),f_\alpha(x^0(t),0)\rangle\mathrm{d}t\neq0,$$

其中 $\eta(t)$ 在围绕 $\Gamma_0$ 的伴随变分方程

$$\dot{u}=-A^{\mathrm{T}}(t)u,\quad u\in\mathbb{R}^n$$

的数量乘数有界解中是唯一的.

## 6.5　练　　习

1. 构造一个二维 Hamilton 系统单参数系统族

$$\begin{cases}\dot{x}=H_y,\\ \dot{y}=-H_x,\end{cases}$$

其中 $H=H(x,y,\alpha)$ 是 (多项式)Hamilton 函数, 它有同宿轨道. 提示: 系统的轨道属于 Hamilton 等高线 $H(x,y,\alpha)=$ 常数.

2. (非 Hamilton 系统的同宿轨道) 求证: 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x^3+x+xy\end{cases}$$

的原点是鞍点, 它有 “大” 同宿轨道, 这条轨道是退化的吗? 提示: 利用系统在反射和时间的逆向变换下: $x\mapsto-x,\mapsto-t$ 下对称.

3. 用旋转向量场证明在平面情形的引理 6.1. 提示: 参见文献 (Andronov et al., 1973).

4. (异宿分支) 求证：系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + 2xy, \\ \dot{y} = 1 + x^2 - y^2 \end{cases}$$

在 $\alpha = 0$ 产生异宿分支.

5. (周期的渐近) 寻找平面上同宿分支附近环周期 $T(\beta)$ 的渐近形式. 这个结果对 $n$ 维系统成立吗? 提示：利用环上的点在接近鞍点时花费最多时间的这个事实.

6. (同宿轨道附近环的乘子) 求证：平面系统从同宿轨道分支出的环的乘子当 $\beta \to 0$ 时趋于零. 能否将这个结果推广到高维?

7. (平面上鞍点附近的 $C^1$ 线性化) (a) 画出等时线 $\tau_{1,2} =$ 常数, 这里的常数是平面系统 (6.7) 的轨道从 “跑出” 单位正方形 $\Omega$ 的时间. 验证这些线是横截的. 在非线性情形图像有何变化? 证明：在定理 6.1 中所构造的映射 $\Phi(y)$ 是个同胚.

(b) 证明：映射 $\Phi(y)$ 在 $y = 0$ 仅有一阶连续偏导数. 提示：$\Phi_y(0) = I_2$ (Deng, 1989).

8. (轨道关于奇异参数的依赖性) 考虑慢–快系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = -\varepsilon, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon$ 是小正数. 取系统从

$$x_0 = -(1+\varepsilon), \quad y_0 = 1$$

出发的轨道. 设 $y_1 = y_1(\varepsilon)$ 是这条轨道与铅直线 $x = 1$ 的交点坐标.

(a) 证明：$y_1(\varepsilon)$ 关于 $\varepsilon$ 的导数当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 $-\infty$. 提示：$y_1'(\varepsilon) = -T(\varepsilon)$, 其中 $T$ 是从初始点 $(x_0, y_0)$“飞” 到点 $(1, y_1)$ 的时间.

(b) 验证：如果取 $x_0 = -(1 + \varphi(\varepsilon))$, 所得结果并不改变, 这里 $\varphi(\varepsilon)$ 是任一满足当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\varphi(\varepsilon) \to 0$ 的光滑正函数.

(c) 解释上面的结果与 6.2 节例子中的慢–快平面系统中的分裂函数的不可微性之间的关系.

(d) 证明：实际上, $y_1(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2/3}$. 提示：参见文献 (Mishchenko, Rozov, 1980).

9. (强倾角性质) 考虑在立方体 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, 3\}$ 内的线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3, \end{cases}$$

其中 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$. 设 $\varphi^t$ 为这系统的发展算子 (流).

(a) 在平面 $x_1 = 1$ 内取通过 $x_1$ 轴的直线 $l_0$, 求证：在流 (即 $l(t) = \varphi^t l, t < 0$) 的作用下它的象也是某个平面 $x_1 =$ 常数内通过同一个轴的直线.

(b) 求证：极限

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi^t l$$

对所有初始线, 除了直线 $l_0=\{x_1=1\}\cap\{x_3=0\}$ 都是相同的. 这个极限是什么?

(c) 假设系统在立方体 $\Omega$ 外具有同宿于原点的轨道. 利用 (b), 求证：一般的稳定流形 $W^s(0)$ 沿着非主特征空间 $x_1=x_2=0$ 自身相交. 将在鞍点附近 $W^s(0)$ 与某个另外的不变流形横截相交条件重新叙述为一般性条件.

(d) 画出稳定流形在退化情形的形状. 猜测哪一个相图会出现在这个退化系统的扰动下. 提示：参见文献 (Yanagida, 1987; Deng, 1993a).

10. (重温定理 6.3～ 定理 6.6 的证明)(a) 假设系统在单位立方体 $\Omega=\{(x,x,x):-1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,3\}$ 内是线性的, 平衡点位于原点, 计算在 $\mathbb{R}^3$ 中鞍点和鞍–焦点的鞍点附近映射 $\Delta$.

(b) 利用分裂函数作为参数, 写出大范围映射 $Q:(x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_3)$ 线性部分的一般形式. 这个公式是如何反映鞍点同宿轨道的扭转性?

(c) 结合这个练习的 (a) 和 (b) 部分定义的映射的合成, 写出它的不动点在鞍点和鞍–焦点情形的方程组. 利用把这个方程组简化为对不动点的 $x_1$ 坐标的数量方程来分析这个系统的解.

11. 求证：FitzHugh-Nagumo 模型波系统的平衡点的鞍点量 $\sigma_0$ 是正的. 提示：$\sigma_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=c>0$.

12. ($\mathbb{R}^3$ 中的奇异同宿)(a) 验证：下面的慢–快系统 (参看文献 (Deng, 1994))

$$\begin{cases}\dot{x}=(z+1)+(1-z)[(x-1)-y],\\ \dot{y}=(1-z)[(x-1)+y],\\ \varepsilon\dot{z}=(1-z^2)[z+1-m(x+1)]-\varepsilon z\end{cases}$$

在*奇异极限* $\varepsilon=0$ 有平衡点 $(1,0,-1)$ 的同宿轨道, 只要 $m=1$. 提示：首先, 形式地令 $\varepsilon=0$, 并分析由 $z=\pm1$ 定义的*慢流形*上的方程. 然后对小但正的 $\varepsilon$ 画出曲面 $\dot{z}=0$ 的形状.

(b) 证明：存在对 $\varepsilon\geqslant 0$ 有定义的连续函数 $m=m(\varepsilon)$, $m(0)=1$, 使得对对应的参数值系统对小 $\varepsilon>0$ 有具同宿轨道的鞍–焦点. 鞍点量的符号是什么? 在这个分支附近我们期望有多少条周期轨道?

(c) 如果证明 (b) 困难, 请尝试用第 10 章介绍的边值方法数值地求同宿轨道和 (a) 中作为原始猜测的奇异同宿轨道.

13. (Melnikov 积分) 证明：Melnikov 积分 (6.24) 对例 6.1 中的系统 (6.8) 的同宿轨道 $\Gamma_0$ 不为零. 提示：沿着 $\Gamma_0$ 的上半部分和下半部分, 积分 (6.8) 的第一个方程求 $t_\pm=t_\pm(x)$. 然后, 将积分 (6.24) 变换到在 $x\in[0,1]$ 上两个积分之和.

## 6.6 附录 A：四维系统中的焦–焦点同宿分支

在这个附录里，研究具两对复特征值（焦–焦点）的双曲平衡点的同宿轨道附近的四维系统动力学. 这种情形类似于鞍–焦点同宿情形.

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^4, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{A.1}$$

其中 $f$ 是光滑函数. 假设在 $\alpha = 0$ 系统有双曲平衡点 $x_0 = 0$, 它具有两对复特征值（见图 6.42）:

$$\lambda_{1,2}(0) = \rho_1(0) \pm \mathrm{i}\omega_1(0), \quad \lambda_{3,4}(0) = \rho_2(0) \pm \mathrm{i}\omega_2(0),$$

其中

$$\rho_1(0) < 0 < \rho_2(0), \quad \omega_{1,2}(0) > 0.$$

图 6.42 焦–焦点的特征值

一般地, 鞍点量不为零:

(H.1) $\sigma_0 = \rho_1(0) + \rho_2(0) \neq 0$.

事实上, 只需处理 $\sigma_0 = \rho_1(0) + \rho_2(0) < 0$ 的情形, 因为否则可以改变时间方向. 由于 $\lambda = 0$ 不是 Jacobi 矩阵 $f_x(x_0, 0)$ 的特征值, 对所有充分小的 $|\alpha|$, 隐函数定理保证具两对复特征值附近的双曲平衡点的存在. 假定坐标原点已经移到平衡点, 就可将 (A.1) 写为形式

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{A.2}$$

其中 $F = O(\|x\|^2)$, 矩阵 $A(\alpha)$ 有特征值

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \rho_1(\alpha) \pm \mathrm{i}\omega_1(\alpha), \quad \lambda_{3,4}(\alpha) = \rho_2(\alpha) \pm \mathrm{i}\omega_2(\alpha),$$

其中 $\rho_i(0), \omega_i(0)$ 满足附加条件.

焦–焦平衡点的二维稳定和不稳定流形 $W^{s,u}$ 可以大范围扩展. 假定在 $\alpha = 0$ 流形 $W^u$ 和 $W^s$ 沿着同宿轨道 $\Gamma_0$ 相交, 稳定和不稳定流形在任何点 $x \in \Gamma_0$ 的切空间的交是一维的①, 即

(H.2) $\dim(T_x W^u \cap T_x W^s) = 1$.

这个条件一般地对双曲平衡点的同宿轨道的系统是成立的.

下面由 Shilnikov 得到的定理成立.

---

① 对 $x \in \Gamma_0$, 这个交由相速度向量 $f(x, 0)$ 张成.

**定理 6.11**　对任何有焦–焦平衡点 $x_0$, 在 $\alpha=0$ 有同宿轨道 $\Gamma_0$, 且满足非退化条件 (H.1) 和 (H.2) 的系统 (A.2), 存在 $\Gamma_0\cup x_0$ 的邻域 $U_0$, 在此邻域内对所有充分小的 $|\alpha|$, 系统有无穷多条鞍点极限环.

**证明概要**　首先考虑情形 $\alpha=0$. 将系统 (A.2) 写在它的实特征基上. 这可以用非奇异线性变换将 $A$ 化为实 Jordan 标准形来对 (A.2) 进行. 在这个特征基下, 系统在 $\alpha=0$ 取形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\rho_1x_1-\omega_1x_2+G_1(x),\\ \dot{x}_2=\omega_1x_1+\rho_1x_2+G_2(x),\\ \dot{x}_3=\rho_2x_3-\omega_2x_4+G_3(x),\\ \dot{x}_4=\omega_2x_3+\rho_2x_4+G_4(x),\end{cases}\tag{A.3}$$

这里相变量仍用原来的记号, 且 $G=O(\|x\|^2)$. 现在引入新坐标 $y$ 以局部线性化系统 (A.3). 由 Belitskii 定理 (见附录 B), 存在非线性变换

$$y=x+g(x),$$

其中 $g$ 是 $C^1$ 函数 $(g_x(0)=0)$, 用线性系统

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\rho_1y_1-\omega_1y_2,\\ \dot{y}_2=\omega_1y_1+\rho_1y_2,\\ \dot{y}_3=\rho_2y_3-\omega_2y_4,\\ \dot{y}_4=\omega_2y_3+\rho_2y_4\end{cases}\tag{A.4}$$

生成的流来局部共轭对应于 (A.3) 的流. 在坐标 $y\in\mathbb{R}^4$ 下不稳定流形 $W^u$ 局部地用 $y_1=y_2=0$ 表示, 稳定流形 $W^s$ 由 $y_3=y_4=0$ 给出. 假设线性化 (A.4) 在单位 4 维立方体 $\{|y_i|\leqslant 1, i=1,2,3,4\}$ 内成立, 这由线性尺度化总可以办到.

用变换

$$y_1=r_1\cos\theta_1,\quad y_2=r_1\sin\theta_1,\quad y_3=r_2\cos\theta_2,\quad y_4=r_2\sin\theta_2$$

将 (A.4) 写为极坐标形式

$$\begin{cases}\dot{r}_1=\rho_1r_1,\\ \dot{\theta}_1=\omega_1,\\ \dot{r}_2=\rho_2r_2,\\ \dot{\theta}_2=\omega_2,\end{cases}\tag{A.5}$$

对 (A.5) 引入两个三维截面:

$$\Sigma=\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2):r_2=1\},\quad \Pi=\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2):r_1=1\},$$

以及在这两个截面内的两个子流形:

$$\Sigma_0 = \{(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) : r_1 \leqslant 1, r_2 = 1\} \subset \Sigma,$$
$$\Pi_0 = \{(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) : r_1 = 1, r_2 \leqslant 1\} \subset \Pi.$$

$\Sigma_0$ 和 $\Pi_0$ 是三维环体, 它们可左右面恒同 (粘合) 如图 6.43 形象化. 稳定流形 $W^s$ 沿中心圆周 $r_1 = 0$ 与 $\Sigma_0$ 相交, 不稳定流形 $W^u$ 沿着中心圆周 $r_2 = 0$ 与 $\Pi_0$ 相交. 不失一般性, 假设同宿轨道 $\Gamma_0$ 与 $\Sigma_0$ 在 $\theta_1 = 0$ 上的点相交, 与 $\Pi_0$ 相交在 $\theta_2 = 0$.

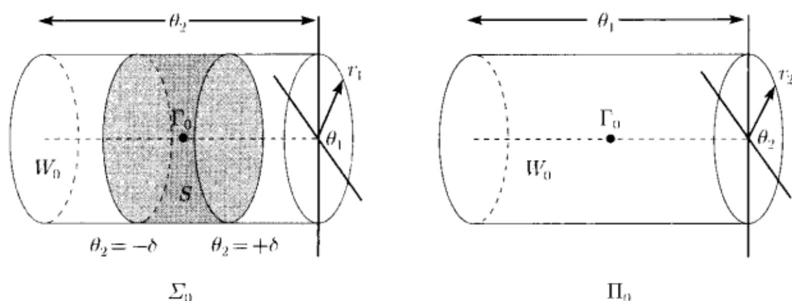



图 6.43　截面 $\Sigma_0$ 和 $\Pi_0$

如通常, 沿着系统的轨道定义 Poincaré 映射 $P : \Sigma \to \Sigma$, 且将这个映射表示为两个映射的合成 $P = Q \circ \Delta$: 鞍点附近映射 $\Delta : \Sigma \to \Pi$ 和同宿轨道 $\Gamma_0$ 附近大范围部分的映射 $Q : \Pi \to \Sigma$. 现在引入三维柱体 $S \subset \Sigma_0$:

$$S = \{(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) : r_1 \leqslant 1, r_2 = 1, -\delta \leqslant \theta_2 \leqslant \delta\}$$

其中固定 $\delta > 0$(见图 6.43), 在 Poincaré 映射 $P$ 作用下追踪它的象.

映射 $\Delta : \Sigma \to \Pi$ 可用 (A.5) 明显地计算. 即

$$\Delta : \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 + \dfrac{\omega_1}{\rho_1} \ln \dfrac{1}{r_1} \\ r_1^{-\frac{\rho_2}{\rho_1}} \\ \theta_2 + \dfrac{\omega_2}{\rho_1} \ln \dfrac{1}{r_1} \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

这是因为从 $\Sigma$ 飞到 $\Pi$ 的时间等于

$$T = \frac{1}{\rho_1} \ln \frac{1}{r_1}.$$

按照 (A.6), 象 $\Delta S \subset \Pi_0$ 是 “超环面涡形管”(toroidal scroll) 柱体, 如图 6.44. 它与平面 $\theta_2 = 0$ 相截的象如图 6.45 所示.

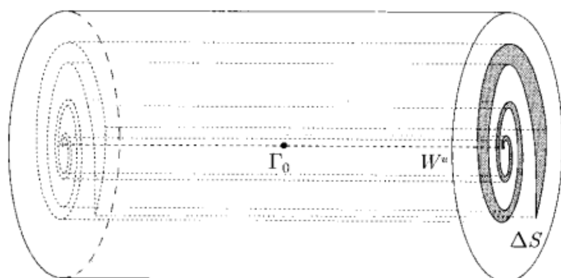



图 6.44　$\Pi_0$ 中的象 $\Delta S$

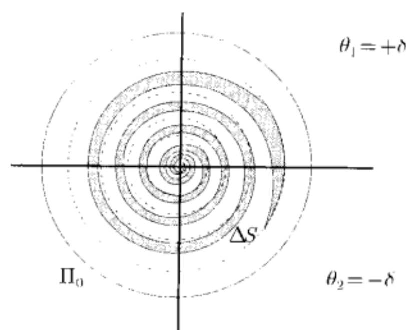



图 6.45　$\Delta S$ 与平面 $\theta_1=0$ 的截痕

$C^1$ 映射 $Q:\Pi\to\Sigma$ 通过旋转和形变使得象 $Q(\Delta S)$ 切割柱面 $S$ 将涡形管映回截面 $\Sigma$(见图 6.46). $\Pi_0$ 的中心圆周 $r_2=0$ 由 $Q$ 变换成一条曲线, 它与 $\Sigma_0$ 的中心圆周 $r_1=0$ 相交于非零角, 这是因为条件 (H.2) 的关系.

由构造 Poincaré 映射 $P$ 的几何得知 Smale 马蹄三维类似的存在性. 事实上, 将 $S$ 划分为一系列环体: $S=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}S_k$,

$$S_k=\left\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2):\mathrm{e}^{-\frac{2\pi(k+1)\rho_2}{\omega_1}}<r_1\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{2\pi k\rho_2}{\omega_1}},r_2=1,|\theta_2|\leqslant\delta\right\}.$$

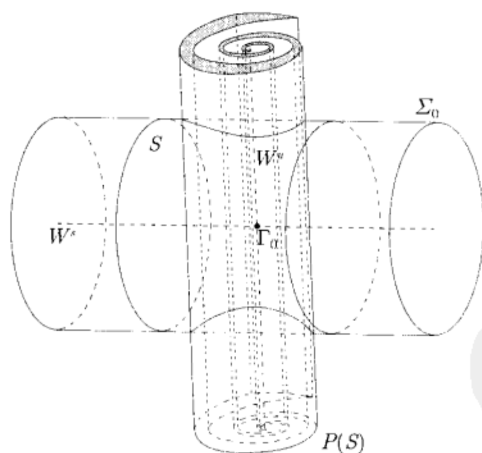



图 6.46　象 $P(S)$ 与 $\Sigma$ 中的原象 $S$

其中只要 $k$ 充分大, $S_k$ 由 $P$ 映为 “单旋转涡形管”$P(S_k)$, 它与 $S_k$ 相交于两个不相交的区域 (见图 6.47). 这是 Smale 例子的一个关键特性. 因此, 在 $\alpha=0$, 系统 (A.1) 有无穷多个 Smale 马蹄, 它们中的每一个都导致包含有无穷多个鞍点极限环的 Cantor 集的存在性.

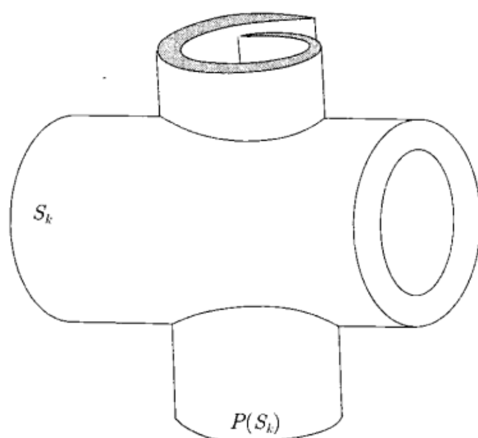



图 6.47　象 $P(S_k)$ 与 $\Sigma$ 中的原象 $S_k$

如果 $|\alpha|$ 小但不为零, 上面的构造还可继续进行. 但是, 一般, 流形 $W^s$ 和 $W^u$ 分裂一个 $O(\alpha)$ 距离, 因此, $\Pi_0$ 的中心圆周不与 $\Sigma_0$ 相交. 因此, 只留下有限多个三维马蹄. 尽管如此, 它们在 $\Gamma_0$ 附近仍给出无穷多个环.

## 6.7　附录 B：文献评注

平面动力系统中的同宿轨道分支被 Andronov 和 Leontovich(1939) 分析过 (非常详细的叙述可在书 (Andronov et al., 1973) 中找到). Andronov 那时并不知道 $C^1$ 线性化. 因此, 他不得不对鞍点附近的映射作出精密的估计 ($n$ 维情形中的这种估计见文献 Wiggins (1988)). 双曲平衡点附近的 $C^k$ 线性化是由 Sternberg (1957) 和 Belitskii (1973, 1979) 以及许多其他作者所研究. Belitskii 的一条定理提供了对应于 $\mathbb{R}^n$ 中系统的流和由双曲平衡点附近的线性部分所生成的流之间的 $C^1$ 等价性, 这个双曲平衡点的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 对 $i, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 的所有组合, 满足

$$\mathrm{Re}\lambda_i \neq \mathrm{Re}\lambda_j + \mathrm{Re}\lambda_k.$$

平面上双曲鞍点附近的 $C^1$ 线性化的一个初等证明是由 Deng(1989) 在定理 6.1 的证明中提出的.

刻画不变流形分裂的在整个同宿轨道上的积分第一次出现在 Melnikov(1963) 从事平面自治系统的周期性扰动的文章中. 如果未被扰动的系统有一条鞍点的同宿轨道, 扰动系统 (考虑为 $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 中的自治系统) 具有二维稳定和不稳定不变流形的鞍点极限环. 这些流形可以沿着同宿于环的轨道相交, 这给出了 Poincaré 同宿结构以及相应的混沌动力学 (见第 2 章). 在固定截面 $t = t_0$ 上, 对应于同宿轨道的点在未被扰动的同宿闭路附近作为所谓 Melnikov 函数的零点可被找出, 详见文

献 (Sanders, 1982; Guckenheimer, Holmes, 1983; Wiggins, 1990). 利用变分方程和伴随变分方程将 Melnikov 方法推广到 $n$ 维情形是属于 Palmer(1984), 也可参见文献 (Lin, 1990). 在 Beyn(1990b, 1990a) 中, 扩展系统的稳定和不稳定流形的横截相交性与 Melnikov 积分 (6.24) 不为零的等价性得到证明.

$n$ 维自治系统在双曲平衡点的同宿轨道附近的相图的分支, 第一个是由 Shilnikov(1963) 与 Neimark 和 Shilnikov (1965) 在简化假设下研究的. 一般理论是由 Shilnikov (1968, 1970) 所发展, 此前他还有两篇关于三维和四维的文章 (Shilnikov, 1965, 1967a). 他分析的主要工具是鞍点附近的映射表示为边值问题的解 (*所谓参数表示*), 这个方法的近代处理见文献 (Deng, 1989). 这个参数化允许 Shilnikov 证明鞍点环与符号周期序列之间的一一对应. 一个特别情形是阅读 Shilnikov 的主要文章的困难是它没有图像. 例如, “定向” 和 “扭转” 概念就没有明显地出现在他原来的文章中 (它是隐藏在某个间接确定的符号中). $\mathbb{R}^3$ 中鞍–焦点情形的几何处理可以在文献 (Guckenheimer, Holmes, 1983; Tresser, 1984) 中找到. 后面的文章用到了鞍–焦点附近的 $C^1$ 线性化. Wiggins(1988, 1990) 给出 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$ 中同宿分支的许多详细讨论. 附录 A 给出他对焦–焦点的同宿分支的几何方法.

Arnold 等 (1994) 对余维 1 同宿分支给了一个非常漂亮的总结. 它包含了 $\nu_0$ 的拓扑不变性的证明以及鞍点同宿分支拓扑规范形的构造. 在这篇综合性文章中许多结果的详细证明是由 Ilyashenko 和 Li (1999) 给出的. 但是, 在这本书中, 冗长的一般性条件通常假设为保证平衡点附近对任何一个有限数 $k$, 系统有局部 $C^k$ 线性化, 这里 $k$=1 将是充分的.

鞍–焦点的同宿轨道附近的极限环分支被 Gaspard (1983), Gaspard, Kapral 和 Nicolis (1984) 以及 Glendinning 和 Sparrow (1984) 研究过. 辅助同宿轨道的存在性的证明是由 Evans 等 (1982) 以及 Gonchenko, Turaev, Gaspard 和 Nicolis (1997) 提供. 实际上, Belyakov(1980) 从分析余维 2 分支得出的这些分支的基本结果, 他研究了 $\mathbb{R}^3$ 中从鞍点到鞍–焦点转移时的同宿分支 (也见 Belyakov (1974, 1984) 对其他余维 2 鞍–焦点情形的分析). $\mathbb{R}^3$ 中余维 2 同宿分支近来吸引更多人的兴趣, 例如文献 (Nozdrachova, 1982; Yanagida, 1987; Glendinning, 1988; Chow, Deng, Fiedler, 1990; Kisaka, Kokubu, Oka, 1993a, 1993b; Hirschberg, Knobloch, 1993; Deng, 1993a; Homburg, Kokubu, Krupa, 1994; Bykov, 1977, 1980, 1993, 1999; Shashkov, 1992; Deng, Sakamoto, 1995). 余维 2 同宿和异宿分支的许多结果在书 (Shilnikov et al., 2001, 第 13 章) 中有叙述.

二维和三维系统中具有余维 1 和 2 的代数同宿轨道的明显例子在文献 (Sandstede, 1997a) 中有叙述. Belyakov 同宿分支在种群动力学中起着重要作用 (Kuznetsov, De Feo, Rinadi, 2001).

$n$ 维系统情形 ($n > 4$) 的同宿分支在 Shilnikov, Ovsyannikov 和 Shilnikov (1987)

原来的文章中处理过 (也见文献 (Deng, 1993b)). $n$ 维系统同宿分支附近的中心流形的存在性是由 Turaev(1991), Sandstede (1993, 2000), 以及 Homburg(1993, 1996) 独立建立的. 完整的证明可在书 (Shilnikov et al., 1998, 第 6 章) 中找到.

存在证明从同宿轨道分支出周期轨道的另外方法：基于函数空间内的 Lyapunov-Schmidt 方法 (Lin, 1990).

平面慢-快系统的同宿分支是由 Diener(1983) 在非标准分析的框架下处理的. 平面情形的初等处理是由 Kuznetsov, Muratori 和 Rinaldi (1995) 给出的, 并应用到种群动力学. Szmolyan(1991) 考虑了某些高维情形. 三维慢-快系统具有同宿分支的许多例子由 Deng(1994, 1995) 所构造.



# 第 7 章　连续–时间动力系统中的其他单参数分支

高维系统中各种可能的分支在前几章没有得到完全研究. 事实上, 所有一般的单参数分支的完全罗列甚至并不知道. 在这一章研究几个出现在单参数–连续时间动力系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1 \tag{7.1}$$

中尚未涉及的分支, 这里 $f$ 是 $(x, \alpha)$ 的光滑函数. 从考虑非双曲平衡点的同宿轨道的大范围分支开始. 正如我们即将看到, 在某些条件下, 它们具有复杂的动力学行为. 我们也简短地接触一些产生 “奇怪” 性态的其他分支, 包括同宿切触以及 “蓝天” 突变. 然后讨论出现在不变环面上的分支. 这些分支可承担对诸如锁频和锁相现象的解释. 最后, 对对称系统的分支理论作一简短介绍, 这种系统关于某类对称群的表示是不变的. 在对这种系统的分支给出某些一般结果之后, 我们把注意力限制在仅由两个元素组成的最简单的对称群 $\mathbb{Z}_2$ 中出现平衡点和环的分支上.

## 7.1　非双曲平衡点的同宿轨道余维 1 分支

设 $x^0 = 0$ 是系统 (7.1) 在 $\alpha = 0$ 时的一个非双曲平衡点, 在 $(x^0, 0)$ 计算的 Jacobi 矩阵 $A = f_x$ 具零实部的特征值. 如同在双曲情形, 引入两个不变集:

$$W^s(x^0) = \{x : \varphi^t x \to x^0, t \to +\infty\}, \quad W^u(x^0) = \{x : \varphi^t x \to x^0, t \to -\infty\},$$

这里 $\varphi^t$ 是 (7.1) 相应的流. 回忆 $W^s(x^0)$ 称为 $x^0$ 的**稳定集**, $W^u(x^0)$ 称为 $x^0$ 的**不稳定集**. 如果这两个集都非空, 它们可能相交. 换句话说, 可能存在沿着时间的两个方向趋于 $x^0$ 的同宿轨道. 由于出现的非双曲平衡点已经是退化的, 这种奇异性的余维大于或等于 1. 容易看出, 如果平衡点有一对复共轭特征值在虚轴上, 为了得到这个平衡点的同宿轨道, 需要调整多个参数. 例如, 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中依赖于几个参数的系统, 它有平衡点 $x^0$, 有一个正特征值 $\lambda_3 > 0$ 和一对可穿过虚轴的复共轭特征值. 为了得到 Shilnikov-Hopf **分支**, 必须使得一个参数满足 Hopf 分支条件 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, 另一个参数使得平衡点的一维不稳定流形 $W^u(x^0)$ 在它的稳定集 $W^s(x^0)$ 上 (实际上, 是中心流形 $W^c(x^0)$). 因此, Shilnikov-Hopf 分支有余维 2. 因此, 由于在这里的兴趣是余维 1 分支, 代之以考虑这样的情形, 即 Jacobi 矩阵只有一个零特征值在虚轴上. 我们将从二维情形开始.

### 7.1.1　平面上的鞍–结点同宿分支

假设对 $\alpha=0$, 系统 (7.1), $n=2$, 有平衡点 $x^0=0$, 有单零特征值 $\lambda_1=0$. 根据中心流形定理 (见第 5 章), 对 $\alpha=0$, 存在一维流形 $W_0^c(x^0)$ 与 $A$ 的对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量相切. 这个流形是局部吸引或排斥, 这依赖于第二个特征值 $\lambda_2\neq 0$ 的符号. $\alpha=0$ 时 (7.1) 在 $W_0^c$ 上的限制有形式

$$\dot{\xi}=b\xi^2+O(\xi^3), \tag{7.2}$$

这里, 一般地, $b\neq 0$. 在非退化条件下, 这个系统局部拓扑等价于在 $\alpha=0$ 的原点附近的规范形

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1=b\xi_1^2,\\ \dot{\xi}_2=\sigma\xi_2,\end{cases}$$

其中 $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$ (见图 7.1, 那里指出 $a>0$ 的两种情形). 这些平衡点称为**鞍–结点**. 注意, 图 7.1(a) 中的稳定集 $W^s(x^0)$ 是左半平面 $\xi_1\leqslant 0$, 不稳定集 $W^u(x^0)$ 是右半轴 $\{\xi_1\geqslant 0,\xi_2=0\}$. 图 7.1(b) 中不稳定集 $W^u(x^0)$ 由 $\{\xi_1\geqslant 0\}$ 给出, 稳定集 $W^s(x^0)$ 由 $\{\xi\leqslant 0,\xi_2=0\}$ 给出. 通过鞍–结点存在无穷多个中心流形 (见 5.1.1 节). 每一个中心流形 $W_0^c$ 其一部分属于这个鞍–结点的稳定集, 另一部分属于这个平衡点的不稳定集.

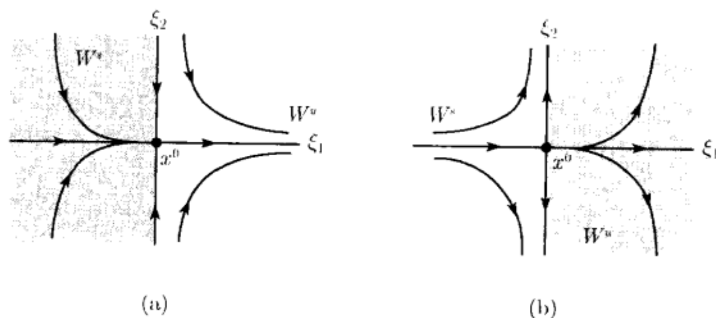



图 7.1　平面鞍–结点: (a) $\lambda_2<0$; (b) $\lambda_2>0$

如果 (7.1) 在它的依赖于参数的中心流形 $W_\alpha^c$ 上的限制, 在适当坐标 $\xi$ 下写为形式

$$\dot{\xi}=\beta(\alpha)+b(\alpha)\xi^2+O(\xi^3), \tag{7.3}$$

一般, 它依赖于参数. 这时折分支出现: 鞍–结点或者消失或者分支出一个鞍点 $x^1$ 和一个结点 $x^2$.

考虑 $b>0,\lambda_2<0$ 情形, 假设存在一条同宿于鞍–结点 $x^0$ 的轨道 $\Gamma_0$. 显然, 至多可存在一条同宿于这个平衡点的同宿轨道, 这条轨道必须局部地与一维不稳定集 $W^u(x^0)$ 重合. 因此, 只存在一个方法使得这条同宿轨道可离开这个鞍–结点. 但是,

它可以沿着组成稳定集 $W^s(x^0)$ 的无穷多条轨道的任何一条回到这个鞍–结点. 这种 "自由" 意味着同宿于鞍–结点的同宿轨道的出现不是加在系统上的额外分支条件, 因此奇点的余维仍为 1, 它是折分支. 任何一条 (除了界定稳定集的两条例外轨道 (图 7.1(a) 或 (b) 中的铅直线)) 趋于鞍–结点的轨道可视作为中心流形 $W^c(x^0)$ 的一部分. 因此, 一般地, 同宿轨道的闭包光滑且与鞍–结点附近的中心流形之一重合.

如果参数变化使得平衡点消失 ($\beta > 0$), 那么稳定极限环 $L_\beta$ 就从先前的光滑同宿轨道 $\Gamma_0$ 附近产生. 如果考虑的截线与中心流形横截相交, 这个事实几乎是明显的. 对 $\beta > 0$ 在这条截线上定义的 Poincaré 映射是压缩的, 因为 $\lambda_2 < 0$. 用下面的定理总结上面的讨论.

**定理 7.1** (Andronov, Leontvich, 1939)　*假设系统*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

*$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x^0 = 0$, 特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$, 且存在一条同宿于这个平衡点的轨道 $\Gamma_0$.*

*假定下面的一般性条件得到满足:*

(SNH.1) *系统在 $\alpha = 0$ 具有一般的折分支, 故它在中心流形上的限制可变换成形式*

$$\dot{\xi} = \beta(\alpha) + b(\xi)\xi^2 + O(\xi^3),$$

*其中 $b(0) > 0$, 以及 $\beta'(0) \neq 0$;*

(SNH.2) *从鞍–结点出发的同宿轨道 $\Gamma_0$ 沿着它的中心流形之一又回到这个鞍–结点, 这意味着 $\Gamma_0$ 的闭包是光滑的.*

*则存在 $\Gamma_0 \cup x^0$ 的邻域 $U_0$, 在这个邻域内系统有拓扑等价于如图 7.2 所示之一的分支图.* □

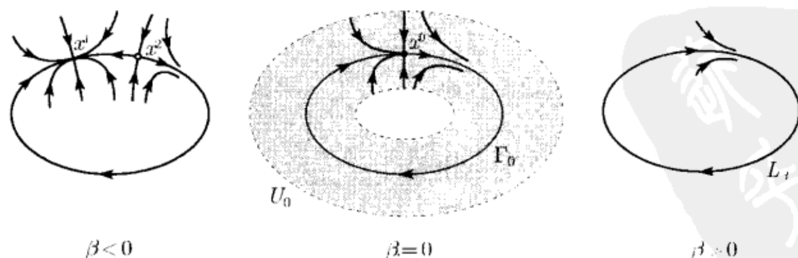



图 7.2　鞍–结点同宿分支

**注**　(1) 例 2.10 提供了一个产生一般鞍–结点同宿分支的明确的平面系统. 在 Bazykin 的捕食–被捕食系统中也发生这种情况, 将在第 8 章考虑 (练习 8.3).

(2) 鞍–结点同宿分支是大范围分支, 它也包含局部分支. 只看鞍–结点的小邻域就会错失环的发现.

(3) 如果从出现环的参数值 (在我们考虑的情形, $\beta > 0$) 趋于鞍–结点同宿分支, 环的周期趋于无穷 (见练习 7.1). 相点沿着环向将出现鞍–结点的附近移动时所化愈来愈多的时间: 它 "感觉" 是趋于折分支.

(4) $\lambda_2 > 0$ 的情形没有带来新东西. 唯一不同的是所考虑的情形, 出现的环是不稳定. 事实上, 可以改变时间方向化为定理 7.1 ◇

### 7.1.2 $\mathbb{R}^3$ 中的鞍–结点和鞍–鞍点同宿分支

现在考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的系统 (7.1), 它在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x^0 = 0$, 有一个简单的零特征值, 没有其他特征值在虚轴上. 对这类平衡点, 存在不同类型同宿分支的更多可能性.

1. 鞍–结点和鞍–鞍点

如同平面情形, 在 $\alpha = 0$ 存在一维不变流形 $W_0^c(x^0)$, 它与 $A$ 的对应于零特征值的特征向量相切. (7.1) 在 $W_0^c$ 上的限制在 $\alpha = 0$ 有与 (7.2) 相同的形式,

$$\dot{\xi} = b\xi^2 + O(\xi^3),$$

这里, 一般 $b \neq 0$. 在此条件下, 在 $\alpha = 0$, 这个系统在原点附近局部拓扑等价于系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = b\xi_1^2, \\ \dot{\xi}_2 = \sigma_1\xi_2, \\ \dot{\xi}_3 = \sigma_2\xi_3, \end{cases} \tag{7.4}$$

其中 $(\sigma_1, \sigma_2)$ 是非零特征值实部的符号. 因此, 有三种明显的可能性 (见图 7.3): (a) 两个非零特征值位于左半平面, $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$; (b) 两个非零特征值位于右半平面, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$; (c) 一个非零特征值位于虚轴的右边, 另一个在它的左边 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1$. 假设 $b > 0$, 否则, 更改时间方向.

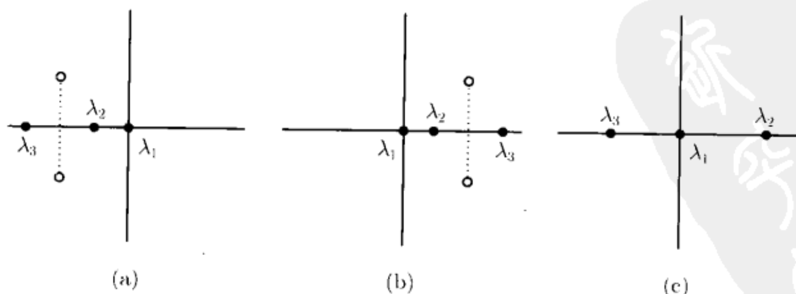



图 7.3 $\lambda_1 = 0$ 时平衡点的三种类型

在情形 (a), 系统 (7.4) 化为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = b\xi_1^2, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2, \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3, \end{cases} \tag{7.5}$$

它的相图如图 7.4 所示. 稳定集 $W^s(x^0)$ 是半空间 $\{\xi_1 \leqslant 0\}$, 其中大多数轨道趋于平衡点时与 $\xi$ 轴相切. 不稳定集 $W^u(x^0)$ 在半轴 $\{\xi_1 \geqslant 0, \xi_2 = \xi_3 = 0\}$.

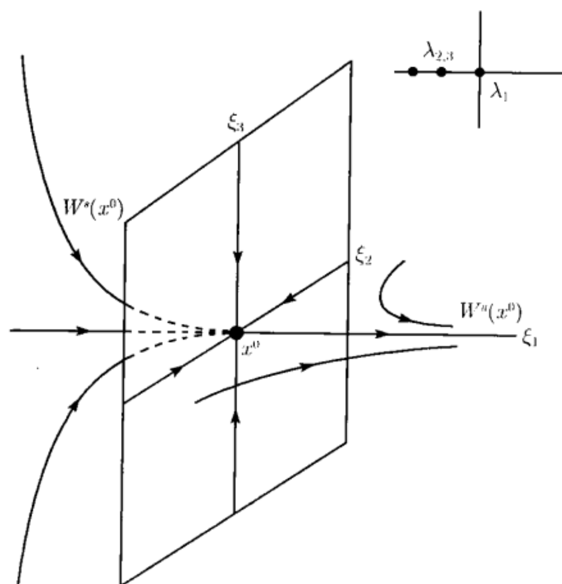



图 7.4　具两个稳定特征值的鞍–结点平衡点

在情形 (b), 系统 (7.4) 有形式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = b\xi_1^2, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_3. \end{cases} \tag{7.6}$$

它的相图如图 7.5 所示. 稳定集现在是一维, 不稳定集是三维. 如同平面情形, 平衡点对 (a) 或 (b) 都称为*鞍–结点*. 注意, 非零特征值可组成一对共轭复数. 在这种情况, 原来系统的轨道在对应的半空间内是螺旋状趋于平衡点.

在情形 (c), 系统 (7.4) 将变成

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = b\xi_1^2, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3. \end{cases} \tag{7.7}$$

它的相图如图 7.6 所示. 注意到所有的坐标平面 $\xi_k = 0, k = 1,2,3$ 关于 (7.7) 是不变的就可构造相图了. 注意到, 彼此横截趋于的稳定集和不稳定集都是二维半平面:

$$W^s = \{\xi : \xi_1 \leqslant 0, \xi_2 = 0\}, \quad W^u = \{\xi_1 \geqslant 0, \xi_3 = 0\}.$$

在这情形, 平衡点 $x^0$ 称为**鞍–鞍点**.

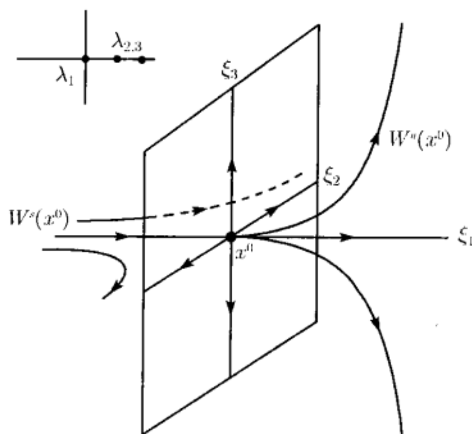



图 7.5　具两个不稳定特征值的鞍–结点平衡点

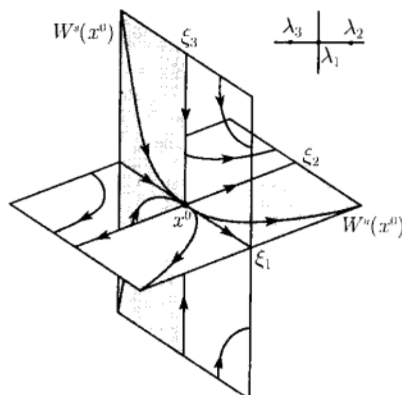



图 7.6　鞍–鞍点平衡点

由于 (7.1) 在中心流形上的限制有形式

$$\dot{\xi} = \beta(\alpha) + b(\alpha)\xi^2 + O(\xi^3),$$

如果 $b(0) \neq 0$ 以及 $\beta'(0) \neq 0$, 一般折分支发生, 导致平衡点消失 (对 $b(0)\beta > 0$) 或者出现两个双曲平衡点 (对 $b(0)\beta > 0$). 在鞍–结点情形分支出的一个平衡点是鞍点, 另一个是 (稳定或不稳定) 三维结点. 反之, 在鞍–鞍点情形出现的平衡点都是 (拓扑相异) 鞍点.

2. 鞍–结点同宿轨道

若存在一条同宿于鞍–结点的轨道 $\Gamma_0$, 则一般地当平衡点消失时唯一极限环出现. 这个分支类似于平面情形. 环的稳定性由 $\sigma_{1,2}$ 的符号决定. 更确切地, 下面的定理成立.

**定理 7.2** (Shilnikov, 1966)　*假设系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

*$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x^0 = 0$, 特征值 $\lambda_1 = 0, \mathrm{Re}\lambda_{2,3} < 0$(或 $\mathrm{Re}\lambda_{2,3} > 0$), 且存在一条同宿于这个平衡点的轨道 $\Gamma_0$.*

*假定下面的一般性条件得到满足:*

(SNH.1) 系统在 $\alpha = 0$ 具有一般的折分支, 故它在中心流形上的限制可变换成形式

$$\dot{\xi} = \beta(\alpha) + b(\xi)\xi^2 + O(\xi^3),$$

其中 $b(0) \neq 0$, 以及 $\beta'(0) \neq 0$;

(SNH.2) 从 $x^0$ 出发的同宿轨道 $\Gamma_0$ 沿着它的中心流形之一又回到 $x^0$, 这意味着 $\Gamma_0$ 的闭包是光滑的.

则存在 $\Gamma_0 \cup x^0$ 的邻域 $U_0$, 对小的 $|\beta|$, 当对应平衡点消失时, 在这个邻域内系统有唯一稳定 (或排斥) 的极限环 $L_\beta$, 且对小的 $|\beta|$, 当存在两个双曲平衡点时没有极限环. □

如图 7.7 所示, 那里 $a > 0$ 且两个稳定特征值 $\lambda_{2,3}$ 是复数. 这时出现的环 $L_\beta$ 的乘子也是复数. 当 $\beta \to 0$ 时, 环的周期 $T_\beta \to \infty$.

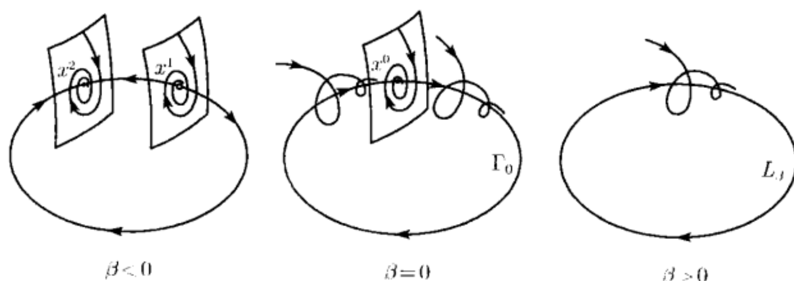



图 7.7　$\mathbb{R}^3$ 中的鞍结点同宿分支

3. 具一条同宿轨道的鞍–鞍点

如果存在具有单个同宿轨道 $\Gamma_0$ 的鞍–鞍点 $x^0$, 那么, 一般当平衡点消失时唯一极限环出现. 这个环是鞍点环, 因为定义在与任一中心流形横截相交的截线上的 Poincaré 映射, 沿着鞍–鞍点的稳定特征向量方向是压缩, 沿着不稳定特征向量方向是膨胀. 也必须要求稳定集 $W^s(x^0)$ 与不稳定集 $W^u(x^0)$ 沿着同宿轨道 $\Gamma_0$ 横截相交. 这些启发式的说明可以叙述为下面的定理.

**定理 7.3** (Shilnikov, 1966)　假设系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x^0 = 0$, 特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, 且存在单条同宿于这个平衡点的轨道 $\Gamma_0$.

假定下面的一般性条件得到满足:

(SNH.1) 系统在 $\alpha = 0$ 具有一般折分支, 使得它在中心流形上的限制可变换成形式

$$\dot{\xi} = \beta(\alpha) + b(\xi)\xi^2 + O(\xi^3),$$

其中 $b(0) \neq 0$, 以及 $\beta'(0) \neq 0$;

(SNH.2) 从 $x^0$ 出发的同宿轨道 $\Gamma_0$ 沿着它的中心流形之一又回到 $x^0$, 这意味着 $\Gamma_0$ 的闭包光滑;

(SNH.3) 稳定集 $W^s(x^0)$ 和不稳定集 $W^u(x^0)$ 沿着同宿轨道 $\Gamma_0$ 横截相交.

则存在 $\Gamma_0 \cup x^0$ 的邻域 $U_0$, 对小 $|\beta|$, 当平衡点消失时, 在这个邻域内系统有唯一稳定鞍点极限环 $L_\beta$, 且对小 $|\beta|$, 当存在两个鞍点平衡点时没有极限环. □

这个定理如图 7.8 所示. 事实上, 所有具有这里所述分支的系统, 和前一定理中的系统对小的 $|\alpha|$ 在 $U_0$ 内都拓扑等价.

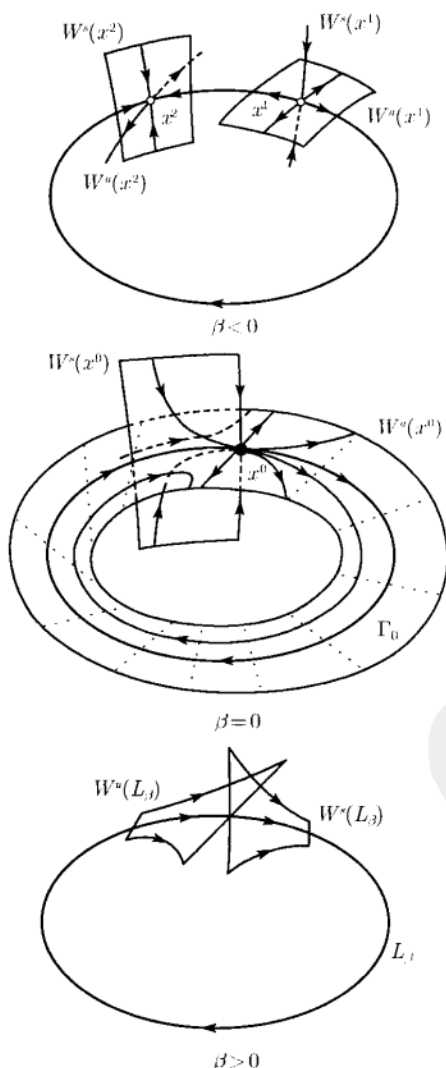



图 7.8　具有一条同宿轨道的鞍–鞍点同宿分支

**注**　出现的环 $L_\beta$ 的稳定和不稳定不变流形的拓扑是由在 $\alpha=0$ 围绕 $\Gamma_0$ 的鞍–鞍点的稳定和不稳定集的大范围性态所决定. $W^u(x^0)$ 和 $W^s(x^0)$ 的横截相交性导致这些集合的每一个闭包在 $\Gamma_0$ 的管状邻域 $U_0$ 内是二维非扭转带或者是扭转带. 图 7.8 中的流形 $W^u(x^0)$ 显示在 $\beta=0$ 是可定向. 如果这些流形是非扭转的 (可定向), 则出现的极限环有正乘子, $0<\mu_1<1<\mu_2$. 反之, 如果流形是扭转的 (不可定向), 则极限环的乘子都是负的, $\mu_1<-1<\mu_2<0$. 在前面的情形, 环的稳定和不稳定不变流形也是不扭转的, 后一情形它们都是扭转的. ◇

4. *具有多个同宿轨道的鞍–鞍点*

由于鞍–鞍点的稳定和不稳定集是二维, 它们可以沿着*多于一条*同宿轨道相交. 这样的交导致的分支不再与平面系统类似：当平衡点消失时会出现*无穷多个*鞍点极限环. 下面叙述一个属于 Shilnikov 的在 $\alpha=0$ 有两条同宿轨道 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 的对应定理.

**定理 7.4** (Shilnikov, 1969)　*假设系统*

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^3,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

*$f$ 光滑, 在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x^0=0$, 特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2>0,\lambda_3<0$, 且存在两条同宿于这个平衡点的轨道 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$.*

*假定下面的一般性条件得到满足:*

(SNH.1) *系统在 $\alpha=0$ 具有一般折分支, 使得它在中心流形上的限制可变换成形式*

$$\dot{\xi}=\beta(\alpha)+b(\xi)\xi^2+O(\xi^3),$$

*其中 $b(0)\neq 0$, 以及 $\beta'(0)\neq 0$;*

(SNH.2) *从 $x^0$ 出发的两条同宿轨道 $\Gamma_{1,2}$ 沿着它的中心流形又回到 $x^0$, 这意味着 $\Gamma_{1,2}$ 的闭包光滑;*

(SNH.3) *稳定集 $W^s(x^0)$ 和不稳定集 $W^u(x^0)$, 沿着两条同宿轨道 $\Gamma_{1,2}$ 横截相交.*

*则存在 $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup x^0$ 的邻域 $U_0$, 对小正的或负的 $\beta$, 当平衡点消失时, 在这个邻域内系统有无穷多个鞍点极限环. $\beta$ 的正负依赖于对应平衡点消失时参数的变化方向.*

此外, 对这样的 $\beta$ 值, 存在整个在 $U_0$ 内的轨道与两个符号 $\omega_i\in\{1,2\}$ 的所有不等价序列 $\{\omega_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 之间的一一对应关系.

**证明概要**　引入坐标系 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ 使得对 $\alpha=0$, 鞍–鞍点位于坐标原点, 且它的不稳定集 $W^u(0)$ 在单位立方体

$$\{\xi:|\xi_k|\leqslant 1,k=1,2,3\}$$

内由 $\{\xi_1 \geqslant 0, \xi_3 = 0\}$ 给定. 稳定集 $W^s(x^0)$ 定义在同一个立方体内由 $\{\xi_1 \leqslant 0, \xi_2 = 0\}$ 给定 (见图 7.9, 比较它与 (7.7) 的相图). 考虑立方体的两个面:

$$\Pi_1 = \{\xi : \xi_1 = -1, |\xi_{2,3}| \leqslant 1\}, \quad \Pi_2 = \{\xi : \xi_1 = 1, |\xi_{2,3}| \leqslant 1\}.$$

设 $A_1, B_1$ 是轨道 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 当它们回到鞍–鞍点而进入单位立方体时与平面 $\Pi_1$ 的交点, 类似地, 记 $A_2, B_2$ 为 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 当它们离开单位立方体时与平面 $\Pi_2$ 的交点.

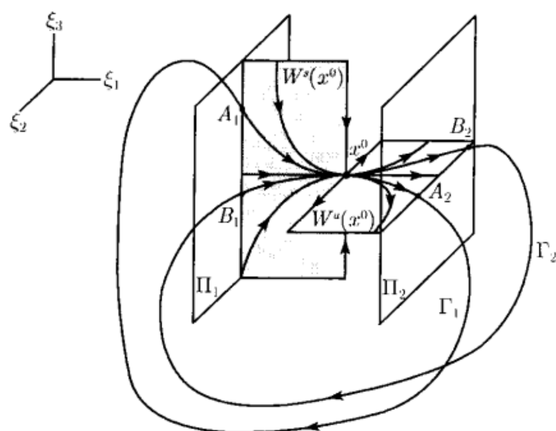



图 7.9　具有两条同宿轨道的鞍–鞍点

取 $|\beta|$ 小值它的符号对应于平衡点的消失. 于是, 沿着系统的轨道在 $\Pi_1$ 上定义的 Poincaré 映射

$$P_\beta : \Pi_1 \to \Pi_1$$

可以表示为沿着通过立方体内轨道的 "局部" 映射 $\Delta_\beta : \Pi_1 \to \Pi_2$ 和 "大范围" 映射 $Q_\beta : \Pi_2 \to \Pi_1$ 的合成

$$P_\beta = Q_\beta \circ \Delta_\beta.$$

注意, $\Delta_\beta$ 对 $\beta = 0$ 以及当双曲平衡点在立方体内部时没有定义.

利用求解立方体内的线性化系统可证明, 正方形 $\Pi_1$ 在映射 $\Delta_\beta$ 作用下沿 $\xi_3$ 方向压缩, 沿 $\xi_2$ 方向膨胀. 因此, 它的象 $\Delta_\beta\Pi_1$ 与正方形 $\Pi_2$ 的交是水平长条 $\Sigma = \Delta_\beta\Pi_1 \cap \Pi_2$(见图 7.10(b)), 当 $\beta \to 0$ 时它越来越细 (解释为什么).

长条 $\Sigma$ 包含有点 $A_2$ 和 $B_2$. 由于对 $\beta = 0$ 映射 $Q_\beta$ 将点 $A_2$ 送到点 $A_1$, 将 $B_2$ 送到 $B_1$,

$$Q_\beta(A_2) = A_1, \quad Q_\beta(B_2) = B_1,$$

对 $|\beta| > 0$, 映射 $Q_\beta$ 映 $\Pi_2$ 中 $A_2, B_2$ 的某邻域分别为 $\Pi_1$ 中 $A_1$ 和 $B_1$ 的邻域. 因此, 象 $Q_\beta(\Sigma)$ 将与正方形 $\Pi_1$ 相交于两个长条 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = Q_\beta\Sigma_0 \cap \Pi_1$(见图 7.10(a)), 它们分别包含 $A_1$ 和 $B_1$. 由于横截性的假设, 在点 $A_1$ 和 $B_1$ 附近 $\Sigma_{1,2}$ 与铅直轴分别相交于非零角.

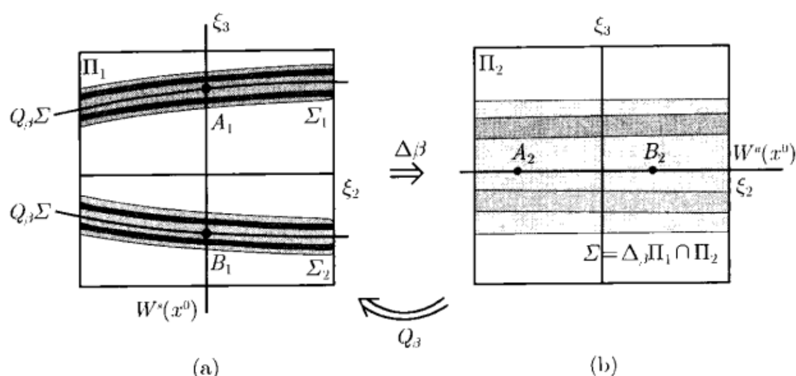



图 7.10　鞍–鞍点附近的截面

因此, 在 Poincaré 映射 $P_\beta = Q_\beta \circ \Delta_\beta$ 作用下, $\Pi_1$ 的象与 $\Pi_1$ 的交呈现标准的 Smale 马蹄特性 (见第 1 章). 例如, 再用一次构造, 首先得到两个在 $\Sigma$ 内的长条, 然后得到在每个 $\Sigma_{1,2}$ 内的两个窄长条, 等等 (见图 7.10). 把步骤反转, 得到具 Cantor 结构的铅直长条. Smale 马蹄的出现导致用两个符号, 如 $\{1,2\}$ 的序列对 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 附近的轨道进行编码的可能性. 等价序列编码相同的轨道. □

在当前的意义下, 这个编码有明显的几何解释. 事实上, 设 $\gamma$ 是一条对所有 $t \in (-\infty, +\infty)$ 位于同宿轨道 $\Gamma_{1,2}$ 邻域内 $U_0$ 内的轨道. 于是它在 $\Gamma_1$ 或 $\Gamma_2$ 附近跑到立方体外. 对应序列 $\omega = \{\cdots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$ 的元素指定轨道 $\gamma$ 使它的第 $i$ 段通过在 $\Gamma_1$ 或 $\Gamma_2$ 附近. 前一情形, $\omega_i = 1$, 后一情形, $\omega_i = 2$. 例如, 序列

$$\{\cdots, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots\}$$

对应于围绕 $\Gamma_1$ 所得到的唯一鞍点环. 序列

$$\{\cdots, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots\}$$

刻画位于 $\Gamma_2$ 附近的鞍点环, 周期序列

$$\{\cdots, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots\}$$

对应的环使得它在 $\Gamma_1$ 附近作第一次旅游, 在 $\Gamma_2$ 附近作第二次旅游, 等等 (见图 7.11).

当在临界参数值鞍–鞍点存在多于两个同宿轨道 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N$ 时, 这种情形可类似处理. 这时, 整个位于 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_N \cup x^0$ 邻域内的轨道可用 $N$ 个符号的序列, 例如 $\omega_i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 编码.

在结束对非双曲同宿分支的讨论时, 我们指出, 本节对三维系统所述的结果可以推广到任何有限维相空间中去 (见文献评注中的文献).

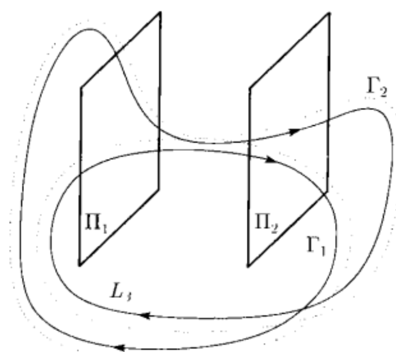



图 7.11　对应于序列 $\{\cdots,1,2,1,2,\cdots\}$ 的环

# 7.2　极限环的同宿轨道分支

几个在一般单参数系统中的其他余维 1 分支已经理论地分析过. 下面简要地讨论一下它们中的某些问题但没给出完整图像.

### 7.2.1　双曲环的非横截同宿轨道

考虑具双曲极限环 $L_\alpha$ 的三维系统 (7.1). 它的稳定和不稳定二维不变流形 $W^s(L_\alpha)$ 和 $W^u(L_\alpha)$ 可沿着 $t\to\pm\infty$ 时趋于 $L_\alpha$ 的同宿轨道相交. 一般地, 这种相交是横截的. 如同已经在第 2 章看到的, 这导致在同宿轨道附近出现无穷多个鞍点极限环. 但是, 在某个参数值, 譬如说, 在 $\alpha=0$, 流形可能变成彼此相切, 于是不再相交 (见图 7.12, 那里画出了同宿结构的截线). 在 $\alpha=0$, 存在同宿于 $L_0$ 的同宿轨道 $\Gamma_0$, 沿着它流形 $W^s(L_\alpha)$ 和 $W^u(L_\alpha)$ 一般具有二次切触. 如将在下面指出的, 通过临界参数值伴随着在 $\Gamma_0$ 附近有无穷多个极限环的倍周期分支和折分支.

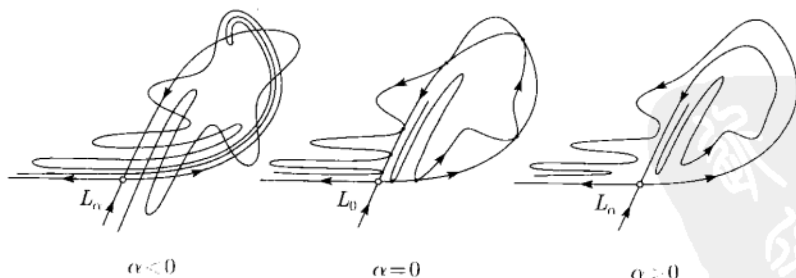



图 7.12　同宿切触

首先, 建立同宿切触附近适当定义的**回复映射**与 1.9 节引入的 Hénon 映射之间的关系. 以 $P_\alpha$ 记在所考虑的三维系统 (7.1) 中 $L_\alpha$ 的 "大范围" 二维截面上适当定义的 Poincaré 映射. $L_\alpha$ 与截面的交是 $P_\alpha$ 的鞍点不动点 $O$. 设 $O$ 的乘子记为 $\gamma$

和 $\lambda$, 满足

$$0<|\lambda|<1<|\gamma|.$$

为简单起见, 将只考虑 $\lambda$ 和 $\gamma$ 都是正的且它们的乘积满足

$$\lambda\gamma<1$$

的情形. 由于两个乘子都光滑依赖于 $\alpha$, 只需在 $\alpha=0$ 验证上面的不等式就够了. 如图 7.12, $L_\alpha$ 的稳定和不稳定流形沿着鞍点不动点 $O$ 的稳定和不稳定流形与截线相交. (7.1) 的同宿于 $L_\alpha$ 的轨道将由同宿于 $O$ 的 $P_\alpha$ 的离散轨道表示. 不动点 $O$ 的稳定和不稳定流形横截相交或者沿着同宿轨道彼此相切地接触.

我们对整个位于临界同宿轨道 $\Gamma_0$ 的小邻域内的轨道有兴趣. 这个邻域是由 $O$ 的小邻域 $D_0$ 和有限个在 $D_0$ 外同宿轨道上点的小邻域所组成 (见图 7.13). 回复映射是由两个映射的合成来构造: 定义在 $D_0$ 中的 "局部" 映射和沿着同宿轨道位于 $D_0$ 外部分定义的 "大范围" 映射.

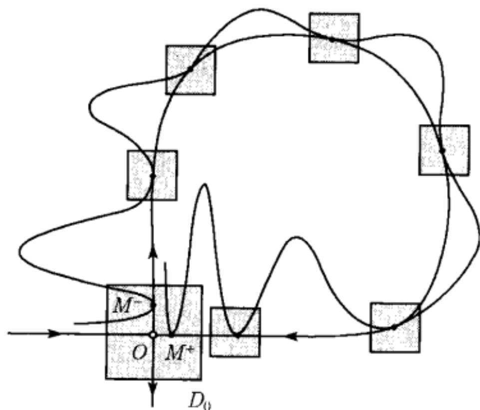



图 7.13　截面上临界同宿轨道的邻域

暂时固定 $\alpha=0$ 而考虑 $D_0$ 内临界同宿轨道上的两点: $O$ 的稳定流形上的点 $M^+$ 和 $O$ 的不稳定流形上的点 $M^-$. 存在整数 $n_0$, 使得 $M^+=P_0^{n_0}(M^-)$. 接下来, 可在 $D_0$ 内选择两个小邻域: (点 $M^+$ 的)$\Pi^+$ 和 (点 $M^-$ 的)$\Pi^-$. 考虑在 $P_0$ 作用下 $\Pi^+$ 的向前象 (见图 7.14(a)). 对所有充分大的 $k$, 差 $\Pi^-\backslash P_0^k(\Pi^+)$ 是由两个不相交的分枝组成. 用 $\sigma_k^1$ 记 $P_0^k(\Pi^+)\cap\Pi^-$. 也可以用 $P_0^{-1}$ 对 $\Pi^-$ 作迭代, 得区域 $\sigma_k^0=P_0^{-k}(\Pi^-)\cap\Pi^+$(见图 7.14(b)), 它是 $\sigma_k^1$ 的原象, 即 $\sigma_k^1=P_0^k(\sigma_k^0)$. 显然, 只有从 $\sigma_k^0$ 中出发的轨道才可以经 $P_0$ 的 $k$ 次迭代终止于 $\Pi^-$, 然后经 $P_0$ 的 $n_0$ 次迭代回到 $\sigma_k^0$. 因此, 回复映射的不动点是在 $\sigma_k^0$ 定义的 $P_0$ 的 $(k+n_0)$ 周期环. 这样的构造可以对所有的具充分小 $|\alpha|$ 的 $\alpha$ 进行.

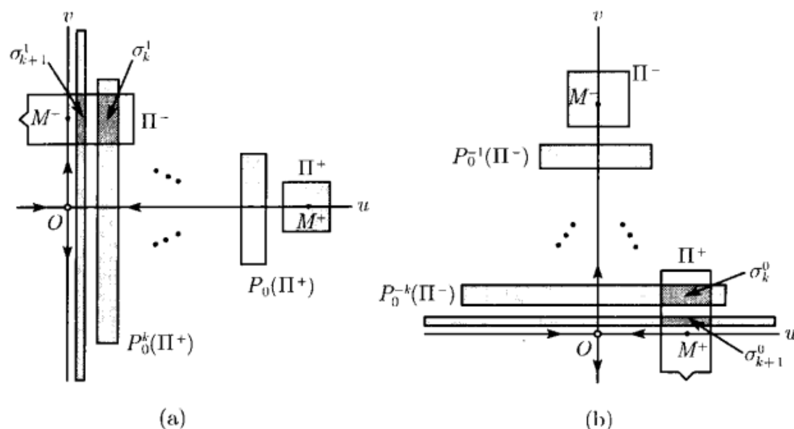



图 7.14 "局部" 映射定义的区域

在截面上引入特殊坐标系 $(u, v)$, 使得

$$O=(0,0), \quad M^-=(0,v^-), \quad M^+=(u^+,0),$$

且对充分小 $|\alpha|$, $O$ 的局部稳定和不稳定流形在 $D_0$ 内分别与水平轴和铅直轴重合. 设 $(u_0, v_0) \in \Pi^+$ 以及 $(u_1, v_1) \in \Pi^-$. 在这个坐标系下, (在 $\sigma_k^0$ 上定义的)"局部"映射

$$P_\alpha^k : \Pi^+ \to \Pi^-$$

接近于 $P_\alpha$ 的 $k$ 次迭代的线性化, 即

$$\Delta_\alpha^k : \begin{cases} u_1 = \lambda^k u_0, \\ v_1 = \gamma^k v_0. \end{cases} \tag{7.8}$$

由于同宿切触是二次的, "大范围" 映射 $P_\alpha^{n_0} : \Pi^- \to \Pi^+$ 必须接近于映射

$$Q_\alpha : \begin{cases} \tilde{u}_0 = U^+ + au_1 + b(v_1 - V^-), \\ \tilde{v}_0 = \mu + cu_1 + d(v_1 - V^-)^2, \end{cases} \tag{7.9}$$

其中 $\mu, a, b, c, d, U^+$ 和 $V^-$ 光滑依赖于 $\alpha$, $\mu(0)=0$, 和 $U^+(0)=u^+, V^-(0)=v^-$. "分裂函数"$\mu=\mu(\alpha)$ 测量在 $M^+$ 附近稳定和不稳定流形之间的 $v$ 距离. 假设 $\mu'(0) \neq 0$, 则可用 $\mu$ 作为新参数, 并考虑 $\lambda, \gamma, a, b, c, d, U^+$ 和 $V^-$ 为 $\mu$ 的光滑函数. 此外, 由于切触的二次特性, $d \neq 0$, 且因为 Poincaré 映射 $P_\alpha$ 是一个保持方向的微分同胚, $bc<0$.

由 (7.8) 和 (7.9) 定义的映射的合成 $Q_\alpha \circ \Delta_\alpha^k$ 在 $\sigma_k^0$ 上近似回复映射 $P_\alpha^{n_0+k}$, 因此可写为

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = U^+ + a\lambda^k u_0 + b(\gamma^k v_0 - V^-), \\ \tilde{v}_0 = \mu + c\lambda^k u_0 + d(\gamma^k v_0 - V^-)^2. \end{cases} \tag{7.10}$$

引入

$$\begin{cases} \xi = u_0 - U^+, \\ \eta = \gamma^k v_0 - V^-. \end{cases}$$

在 $(\xi, \eta)$ 坐标系下, 映射 (7.10) 将取形式

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = a\lambda^k U^+ + a\lambda^k \xi + b\eta, \\ \tilde{\eta} = -V^- + \gamma^k \mu + c(\lambda\gamma)^k U^+ + c(\lambda\gamma)^k \xi + d\gamma^k \eta^2. \end{cases} \tag{7.11}$$

最后, 引入新坐标

$$\begin{cases} X = -\dfrac{d\gamma^k}{b}(\xi - a\lambda^k U^+), \\ Y = -\dfrac{d\gamma^k}{b}(a\lambda^k \xi + b\eta). \end{cases}$$

将 (7.11) 化为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Y \\ M_k + bc(\lambda\gamma)^k X - Y^2 \end{pmatrix} + O(\lambda^k), \tag{7.12}$$

其中

$$M_k = -d\gamma^{2k}(\mu - \gamma^{-k} V^- + O(\lambda^k)) + O(\lambda^k). \tag{7.13}$$

同样的结果可不用截断 “局部” 和 “大范围” 映射 (见本章附录中的参考文献) 得到.

由 $|\lambda| < 1$ 和 $|\lambda\mu| < 1$ 得知, 临界同宿轨道附近的回复映射可用 Hénon 映射很好逼近, 后者的 Jacobi $-bc|\lambda\gamma|^k \to 0$ 当 $k \to \infty$. 当 $\mu$(连同 $\alpha$ 一起) 微小变化但固定在 $\mu = 0$ 周围的区间内, 只要 $k$ 足够大, $M_k$ 取任意大实数值. 如此, 近似回复映射的 Hénon 映射在临界同宿轨道 $\Gamma_0$ 附近的截面的无穷多个区域 $\sigma_k^0 \subset \Pi^+$ 上有定义. 由于 Hénon 映射具有折分支和翻转分支 (见例 4.1), 原来的映射可期望有这种分支的无穷序列. 事实上, 对 (7.12), 折分支和翻转分支分别发生在

$$M_k^{(t)} = -\frac{1}{4} + O(\lambda^k), \quad M_k^{(f)} = \frac{3}{4} + O(\lambda^k)$$

上 (考虑例 4.1 中的极限 $\beta \to 0$). 由关系式 (7.13) 得知两个分支参数值的无穷序列

$$\mu_k^{(t)} = \gamma^{-k} V^- - \frac{1}{4d(0)} \gamma^{-2k} + o(\gamma^{-2k}),$$

$$\mu_k^{(f)} = \gamma^{-k} V^- + \frac{3}{4d(0)} \gamma^{-2k} + o(\gamma^{-2k})$$

的存在性. 它们当 $k \to \infty$ 时凝聚在 $\mu = 0$. 我们指出, 当 $\mu > 0$ 时, 即 $L_\alpha$ 的不变流形不相交时 (见图 7.12 中 $\alpha > 0$ 的情形) 所有这些分支都会发生.

### 7.2.2 非双曲极限环的同宿轨道

假设三维系统 (7.1) 在 $\alpha = 0$ 有非双曲极限环 $N_0$, 它有单乘子 $\mu_1 = 1$, 第二个乘子满足 $|\mu_2| < 1$. 在一般扰动下这个环或者消失, 或者分裂为两个双曲环 $N_\alpha^{(1)}$ 和 $N_\alpha^{(2)}$(环的折分支, 见 5.3 节). 但是, 环 $N_0$ 的局部不稳定流形 $W^u(N_0)$ 在临界参数值 $\alpha = 0$ 可 "回" 到环 $N_0$, 而形成一个由当 $t \to \pm\infty$ 时趋于 $N_0$ 的同宿轨道组成的集合. 这里存在两种情况, 它依赖于 $W^u(N_0)$ 的闭包是否是流形.

(1) 环面情形. 如果 $W^u(N_0)$ 形成一个环面, 两个子情形仍有可能 (见图 7.15, 那里用到 $N_0$ 的大范围 Poincaré 截面, 故出现的这个环面如同两条同心曲线). 按照环是否光滑 (图 7.15(a) 光滑, (图 7.15(b) 不光滑), 在参数变化时环 $N_0$ 的消失导致产生光滑不变环面或者产生包含无穷多个鞍点和稳定极限环的 "奇怪" 吸引不变集. 对维数高于 3 的系统, 在临界参数值还可存在几个环面 (或 Klein 瓶), 导致更加多种多样和复杂的分支图像.

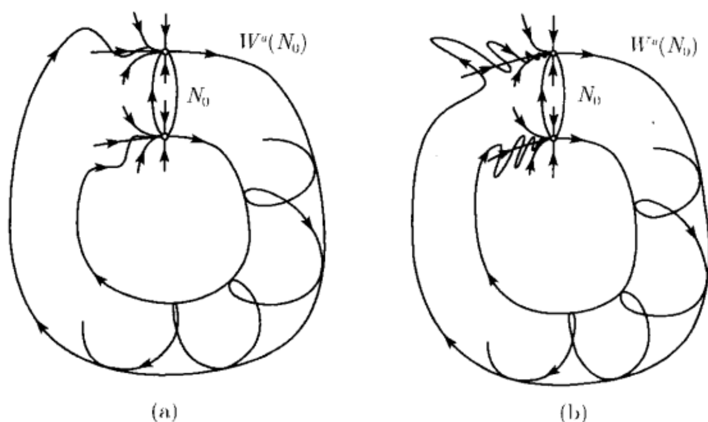



图 7.15 由大范围 Poincaré 映射描述的鞍–结点环的同宿结构: (a) 光滑情形 (b) 不光滑情形

(2) "蓝天" 情形. 当 $W^u(N_0)$ 不是流形时, 这时出现的分支如熟知的 "蓝天" 突变. 更确切地说, 在 $\alpha = 0$, 环 $N_0$ 的不稳定集 $W^u(N_0)$ 可以变成一个管子回到 $N_0$ 形成一个 "法兰西号角"(图 7.16). 在环 $N_0$ 的局部截面上, 这个号角的螺旋末端呈现状如凝聚在对应于 $N_0$ 上点的 "圆形" 无穷序列.

当环 $N_0$ 分裂为两个双曲环时, 在号角附近没有其他周期轨道存在. 在这个分支的另一边, 当环 $N_0$ 消失时, 呈现唯一稳定的双曲极限环 $L_\alpha$, 它使得跟随这个号角有一个大范围旋转和几个局部旋转. 当 $\alpha$ 趋于 $\alpha = 0$ 时, 环 $L_\alpha$ 在可能成为临界环 $N_0$ 的附近使得旋转越来越多. 在分支参数值 $L_\alpha$ 变成同宿于 $N_0$ 的轨道, 它的长度和周期变成无穷. 由此, 当环的长度 $l_\alpha$ 和周期 $T_\alpha$ 变成无穷时, 稳定极限环消失. 在这期间环保持有界且处于与所有平衡点保持有限距离. 这个分支称为 $L_\alpha$

的"蓝天"突变. 换句话说, 环 $L_\alpha$ 在临界参数值"破裂"而另一个环 $N_0$ 出现在 $L_\alpha$ 的"横截"方向, 然后分裂为两个双曲环.

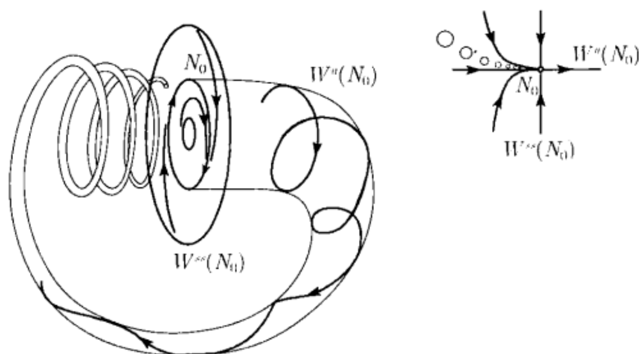



图 7.16　"蓝天"分支附近的不变"法兰西号角"

**例 7.1** ("蓝天"分支模型)　考虑下面的属于 Gavrilov 和 Shilnikov(2000) 的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x[2 + \mu - b(x^2 + y^2)] + z^2 + y^2 + 2y, \\ \dot{y} = -z^3 - (y+1)(z^2 + y^2 + 2y) - 4x + \mu y, \\ \dot{z} = z^2(y+1) + x^2 - \varepsilon, \end{cases} \tag{7.14}$$

这里 $\mu, \varepsilon$ 是正参数, $b = 10$ 是固定常数. 如果 $\mu = \varepsilon = 0$, 圆周

$$C_0 = \{(x, y, z) : x = 0, z^2 + (y+1)^2 = 1\}$$

是 (7.14) 的不变曲线. 它是由两个平衡点: $E_0 = (0, 0, 0)$ 和 $E_1 = (0, -2, 0)$ 以及两条连接轨道: 从 $E_0$ 到 $E_1$ 和 $E_1$ 到 $E_0$ 所组成. 平衡点 $E_0$ 有一个零特征值 $\lambda_1 = 0$ 和两个纯虚特征值 $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 = 2$, 平衡点 $E_1$ 有一个零特征值和两个实特征值 $\lambda_{2,3} < 0$(验证). 因此, 这两个平衡点都是非双曲的, 而且当参数变化时应该都有分支. 可以证明, 在 $(\mu, \varepsilon)$ 平面上存在一条曲线 $\mathcal{B}$, 沿着这条曲线系统 (7.14) 有极限环 $N_0$, 它有单个单位乘子. 当参数沿着 $\mathcal{B}$ 趋于参数平面的原点时这个环收缩到平衡点 $E_0$. 在原点附近穿过曲线 $\mathcal{B}$ 时得到这个环的一般折分支: 两个小双曲环 (一个稳定, 一个鞍点) 相碰, 在临界参数值形成环 $N_0$, 再消失. 此外, 对应曲线 $\mathcal{B}$ 上的参数值平衡点 $E_1$ 不存在, 而二维不稳定流形 $W^u(N_0)$ 回到 $N_0$ 在 $C_0$ 附近形成一个"法兰西号角", 形状如图 7.16. 因此, 如果在充分接近于 $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$ 穿过 $\mathcal{B}$, 则存在 (7.14) 位于圆周 $C_0$ 附近的其他极限环, 并产生"蓝天"分支. 图 7.17 显示 (7.14) 对应于 $\varepsilon = 0.02$ 和三个不同的 $\mu$ 值时的相轨道. 在 $\mu = 0.4$ 存在一条稳定极限环 $L_\mu$, 它使得在原点附近有许多横截旋转. 蓝天分支发生在 $\mu \approx 0.3$. 对 $\mu = 0.25$, 一条从 (看不见) 鞍点环 $N_\mu^{(1)}$ 附近出发的轨道趋于鞍点环 $N_\mu^{(2)}$ 并永远停留在那里　◇

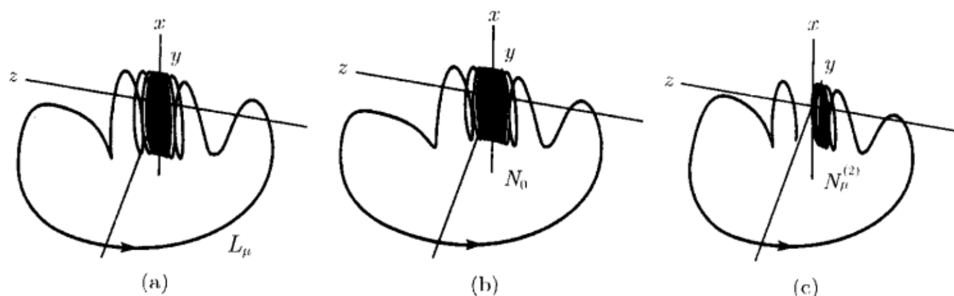



图 7.17　(7.14) 中的 “蓝天” 分支: (a) $\mu = 0.4$; (b) $\mu = 0.3$; (c) $\mu = 0.25$

对具有多于三个相变量的系统, “蓝天” 分支可以生成无穷多个鞍点极限环, 它们属于Smale-Williams *螺线管吸引子*. 当参数趋于它的临界值时这个吸引子不分支, 但其中任何一个环的长度和周期趋于无穷.

## 7.3　不变环面上的分支

相空间维数 $n > 2$ 时的连续-时间动力系统可以有不变环面. 正如在第 4, 5 章已经看到的, 通过一般的 Neimark-Sacker 分支出现二维不变环面 $\mathbb{T}^2$. 例如, $\mathbb{R}^3$ 中一个稳定环, 当它的一对复共轭乘子穿过单位圆时可失去稳定性. 于是, 只要不是强共振且三次规范形系数有适当符号, 则一个光滑①、稳定的不变环面从这个环分支出. 这一节讨论系统的参数变化时二维不变环面上轨道结构的变化.

### 7.3.1　Poincaré 映射的简化

设 $\mathbb{T}^2$ 是 (7.1) 在 $\alpha = 0$ 的一个光滑、二维不变环面. 为简单起见, 可考虑三维系统. 在环面上引入截面 $\Sigma$, codim $\Sigma = 1$ (见图 7.18). 交 $\mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ 是闭曲线 $S$, 它拓扑 (或者甚至有限光滑) 等价于单位圆 $\mathbb{S}^1$. 我们只考虑任一从点 $x \in S$ 出发的轨道又回到 $S$ 的情形. 于是, Poincaré 映射

$$P : S \to S$$

有定义. 交替地, 还可考虑 (7.1) 在截面 $\Sigma$ 上定义的 Poincaré 映射. 闭曲线 $S$ 显然是这个映射的不变曲线. 它在 $S$ 上的限制是上面引入的映射 $P$. 映射 $P$ 和它的逆都是可微的. $P$ 的不动点和 (7.1) 的极限环之间的标准关系存在. 所有这些环属于这个环面.

假设不变环面 $\mathbb{T}^2$ 在小参数变化时保持, 意思是对所有 $\alpha, |\alpha|$ 充分小, 存在 (7.1) 的闭不变环面. 于是, 上面的限制可对所有临近的 $\alpha$ 作出, 所得 Poincaré 映射 $P_\alpha : S \to S$ 是光滑地依赖于参数.

① 有限次可微.

**注**　可以证明 (见文献评注), 稳定的不变环面 $\mathbb{T}^2$ 如同流形一样在小参数的变化下仍保持, 只要它是**标准双曲的**, 即在引入适当的收敛性度量后, $\mathbb{T}^2$ 附近轨道的收敛性强于在这个环面上的轨道收敛性. ◇

现在的问题是对 $P_\alpha : S \to S$ 的可能的轨道结构进行分类, 并在参数变化时分析它们的变形 (metamorphose). 为此, 在 $\mathbb{T}^2$ 上引入标准坐标, 即由两个角坐标 $\psi, \varphi \pmod{2\pi}$ 参数化. 用这些坐标, 可将对边恒同把环面映为正方形 (见图 7.19)

$$U = \{(\psi, \varphi) : 0 \leqslant \psi, \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

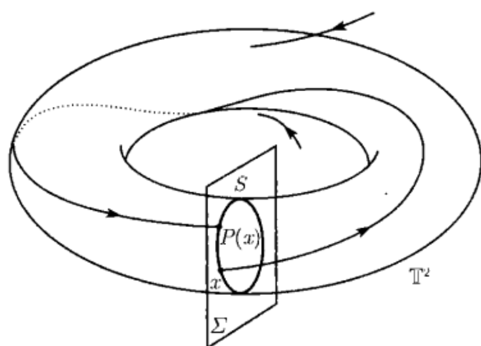



图 7.18　环面上的 Poincaré 映射

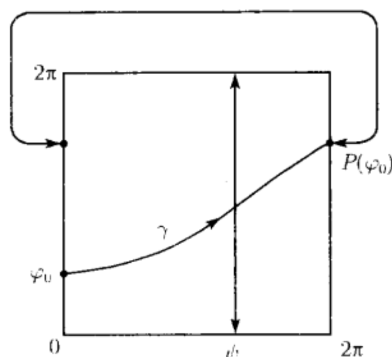



图 7.19　环面上的轨道 $\gamma$

假设交 $S = \mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ 由 $\psi = 0$ 给出. 考虑从 $S$ 上点 $(0, \varphi_0)$ 出发的在 $\mathbb{T}^2$ 上的轨道 $\gamma$. 由假设, $\gamma$ 在某点 $(2\pi, P(\varphi_0)) = (0, P(\varphi_0))$ 回到 $S$, 这里 $P : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是光滑函数. 由于环面上的轨道不相交①, 故

$$P'(\varphi) > 0,$$

因此, 射映 $P$ 保持 $S$ 的方向.

### 7.3.2　旋转数与轨道结构

映射 $P$ 的不动点 $\varphi_0$, $P(\varphi_0) = \varphi_0$, 对应于 $\mathbb{T}^2$ 上的环, 此环在它闭合之前沿着纬线转一圈, 沿着经线转 $p$ 圈, $p$ 为某个正整数 (见图 7.20). 一个周期 $q$ 的环

$$\{\varphi_0, P(\varphi_0), P^2(\varphi_0), \cdots, P^q(\varphi_0) = \varphi_0\}$$

对应于 $\mathbb{T}^2$ 上的环, 它沿纬线转 $q$ 圈, 沿着经线转 $p$ 圈 (图 7.20(b)). 这样的环称为 $(p, q)$环. $S$ 上 $P$ 的不动点和周期轨道的局部理论和纯量映射的相同. 特别, 如果 $P'(\varphi_0) < 1 (P'(\varphi_0) > 1)$, 不动点 $\varphi_0$ 稳定 (不稳定). 满足 $P'(\varphi_0) \neq 1$ 的点称为是**双曲的**. 如通常, 这些概念通过考虑 $P^q$, $P$ 的 $q$ 次迭代, 可推广到 $q$ 周期轨道. 显然,

① 我们对曲线 $S$ 上的映射和定义在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上的函数用了同样的记号.

如果稳定 $(p,q)$ 环存在, 不稳定 $(p,q)$ 环也必须存在, 因为 $P^q$ 的稳定和不稳定不动点必须是交替的 (见图 7.21).

差 $a(\varphi)=P(\varphi)-\varphi$ 称为角函数.

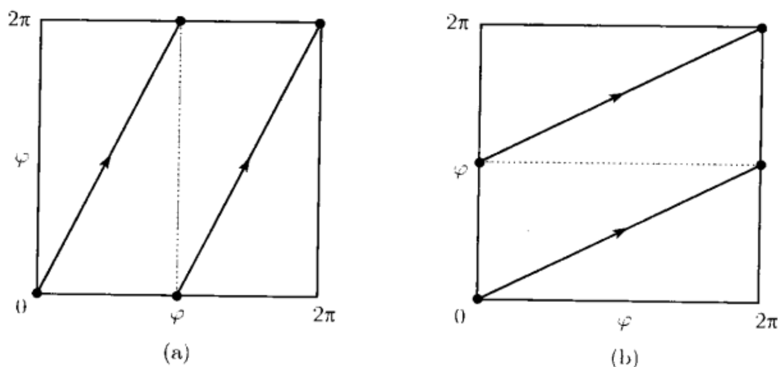



图 7.20　环面上的环: (a) $p=2,q=1$; (b) $p=1,q=2$

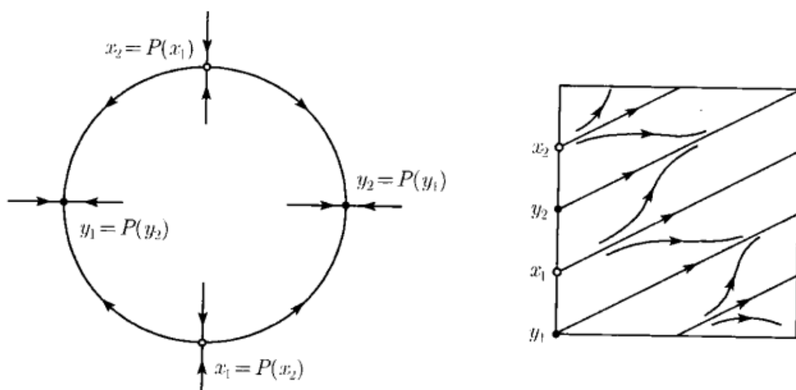



图 7.21　环面上稳定和不稳定 (1,2) 环

**定义 7.1**　$P:S\to S$ 的旋转数是由

$$\rho=\frac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{a(\varphi)+a(P(\varphi))+\cdots+a(P^{k-1}(\varphi))}{k}$$

定义.

可以证明, 定义中的极限存在, 与点 $\varphi\in S$ 无关. 因此 $\rho$ 的定义成立. 它刻画了 $P$"旋转"$S$ 的平均角度. 对于经过 $2\pi\nu$ 角度的刚体旋转,

$$P(\varphi)=\varphi+2\pi\nu(\mathrm{mod}2\pi),\tag{7.15}$$

有 $\rho=\nu$. 旋转数的作用可由下面两条引理清楚说明, 这里不给出证明.

**引理 7.1** *映射 $P: S \to S$ 的旋转数是有理数, $\rho = \frac{p}{q}$, 当且仅当 $P$ 有 $(p,q)$ 周期轨道.* □

注意, 引理 7.1 没有说周期轨道是唯一的.

**引理 7.2** (Denjoy, 1932) *如果映射 $P: S \to S$ 至少二次可微, 且它的旋转数是无理数, 则 $P$ 拓扑等价于刚体旋转 $2\pi\rho$ 角度.* □

在这个引理的条件下, $P$ 的任何轨道在 $S$ 上稠密, 如同当 $\nu$ 是无理数时的刚体旋转 (7.15). 存在 $C^1$ 微分同胚的例子不满足 Denjoy 引理. 但是, 若 (7.1) 的右端 $f$ 充分光滑且它的不变环面 $\mathbb{T}^2$ 也足够光滑, 则 $P$ 必须满足 Denjoy 的可微性条件.

### 7.3.3 结构稳定性和分支

现在来谈论环面上系统的结构稳定性问题. 可以用第 2 章关于动力系统之间的距离和它们结构稳定性的定义, 只要简单地把 $U$ 换成 $\mathbb{T}^2$ 就行了. 这个问题等价于在圆周 $S$ 上的离散–时间动力系统的结构稳定性. 下面的定理对 $S$ 上的结构稳定系统给出完整的描述.

**定理 7.5** *光滑动力系统 $P: S \to S$ 是结构稳定, 当且仅当它的旋转数是有理数且所有的周期轨道都是双曲的.* □

如果旋转数是无理数, 则总可以引入一个任意小的扰动得到拓扑不等价系统. 事实上, 这样的扰动将产生长周期环, 代替由有理数旋转数所得的稠密轨道. 因此 $\mathbb{T}^2$ 上结构稳定系统的相图就比较简单: 存在偶数条 $(p,q)$ 类型的双曲极限环. 所有其他轨道都按恰当的时间方向趋于这些环之一. Poincaré 映射的 $q$ 次迭代显示 $P^q$ 在 $S$ 上的偶数个不动点具有交替稳定性.

考虑对应于具不变环面的系统 (7.1) 的单参数映射 $P_\alpha: S \to S$. 设 $\alpha = \alpha^0$ 时给出一个结构稳定系统. 由定理 7.5, 存在开区间 $(\alpha^0 - \varepsilon, \alpha^0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, 在这个区间内系统有拓扑等价的相图. 这个区间的边界是什么? 或者, 换句话说, 旋转数是如何变化的?

首先指出, 即使旋转数是常数, 分支还可以发生. 事实上, 系统在环面上可以有偶数个双曲 $(p,q)$ 环. 当这些环在参数变化时成对地重合和消失时, 旋转数保持常数 $\left(\rho = \frac{p}{q}\right)$, 只要至少有两个环还在这个环面上. 但是, 当最后两个环 (一个稳定, 一个不稳定) 重合并消失时, 旋转数就变成无理数直到另一个 "结构稳定窗口" 打开. 在这窗口内部, 系统的渐近性态是*周期的*, 在这窗口外面是*拟周期的*. 在前一种情形. 在 $\mathbb{T}^2$ 上至少存在两个极限环 (有可能具非常大的周期), 在后一种情形, 环面被稠密的非周期轨道所充满.

从拟周期性态到周期振动的分支叫*锁相*. 在周期强迫系统中这种现象出现为*锁频*. 为简单起见, 假设有一个依赖于一个参数的二维周期强迫 ODEs 系统. 假定相

应的周期–回复 (Poincaré) 映射有吸引的闭不变曲线. 如果限制在这条曲线上的映射的旋转数是有理数, 这个系统具有周期振动, 其周期是强迫周期的整数倍. 振动的频率被 "锁" 在外加的强迫频率上.

**注** 定理 7.5 在 "一般性" 和结构稳定性之间建立起一个微妙的关系. 考虑依赖于单个参数的映射 $P_\alpha : S \to S$. 使得 $P_\alpha$ 是结构稳定的参数集是开稠集. 但是, 这个集的测度比对应于无理数旋转数的参数集可能要小. 因此, 从这个族中 "随机地" 选择一个映射具有无理数旋转数的概率就很高. ◇

### 7.3.4 Neimark-Sacker 分支附近的锁相: Arnold 舌

可以利用开发由 Neimark-Sacker 分支出现的不变环面 (曲线) 的理论. 考虑这种分支附近的一个二维离散–时间系统. 这个系统可看作与连续时间系统 (7.1) 的极限环相应的 Poincaré 映射 (如有必要, 可限制在中心流形上) 所生成的系统. 对邻近的参数值, 可用一个光滑、可逆且光滑依赖于参数的变换把这个映射化为

$$z \mapsto \lambda z + c_1 z|z|^2 + O(|z|^4), \quad z \in \mathbb{C}^1, \tag{7.16}$$

其中 $\lambda$ 和 $c_1$ 是 $\alpha$ 的光滑复值函数 (见第 4 章). 暂时将 $\mathrm{Re}\lambda$ 和 $\mathrm{Im}\lambda$ 考虑为两个独立的参数. 在这两个参数的平面上, 单位圆 $|\lambda| = 1$ 对应 Neimark-Sacker 分支轨迹 (见图 7.22). 假设出现的分支不是强共振而是超临界的. 于是, 在单位圆外的临近参数值存在稳定闭不变曲线. $(\mathrm{Re}\lambda, \mathrm{Im}\lambda)$ 平面内对应有理旋转数的参数区域都趋于圆周 $|\lambda| = 1$ 上的所有有理数点

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta = \frac{2\pi p}{q},$$

它们如狭窄的舌头①. 这种区域称为Arnold 舌. 我们的系统依赖于单个参数 $\alpha$. 因此, 它在 $\lambda$ 平面上由 $\lambda(\alpha)$ 定义了一条曲线. 在圆周 $|\lambda| = 1$ 附近, 这条曲线穿过对

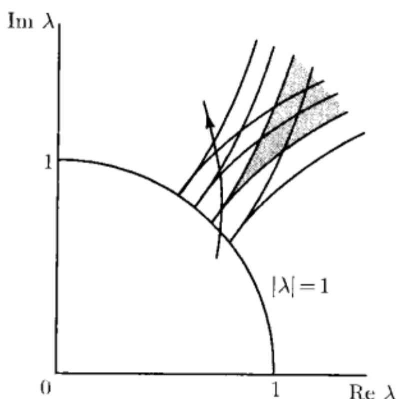



图 7.22 Neimark-Sacker 分支附近的 Arnold 舌

① 它们离开圆周的宽度 $w$ 按距离 $d$ 满足当 $d \to 0$ 时 $w \sim d^{(q-2)/2}$.

应不同有理旋转数的无穷多个 Arnold 舌. 因此, 在一般的 Neimark-Sacker 分支附近产生无穷多个长周期环, 当参数变化时它们消亡. 远离 Neimark-Sacker 分支曲线, 这些舌可能相交. 在这样的参数值不变环面不存在①, 只不过发生两个独立的折分支和不相干的遥远环.

**例 7.2** (扰动时滞逻辑映射中的 Arnold 舌)　考虑递归方程

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_{k-1}) + \varepsilon, \tag{7.17}$$

这里 $x_k$ 是种群在 $k$ 年的密度, $r$ 是增长率, $\varepsilon$ 是移民率. 对 $\varepsilon = 0$, 这个模型已经在第 4 章研究过 (见例 4.3).

如同在第 4 章, 引入 $y_k = x_{k-1}$, 将 (7.17) 重写为平面动力系统

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx(1-y)+\varepsilon \\ x \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

第 4 章分析显示, 系统 (7.18) 在 $r = 2$, 对 $\varepsilon = 0$ 有超临界 Neimark-Sacker 分支. 在 $(r, \varepsilon)$ 平面内存在曲线 $h^{(1)}$ 通过点 $(r, \varepsilon) = (2, 0)$, 在这条曲线上, 系统的不动点

$$x^0 = y^0 = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

产生 Neimark-Sacker 分支. 曲线 $h^{(1)}$ 有表达式

$$h^{(1)} = \left\{(r, \varepsilon) : r = \frac{2}{1+\varepsilon}\right\}.$$

对 $\varepsilon = 0$, $r$ 稍大于 2 (例如 $r = 2.1$, 或 $r = 2.15$) 迭代映射 (7.18) 得闭不变曲线, 它显然被拟周期轨道所充满. 这种曲线的一个例子如图所示. 但是, 如取 $r = 2.177$ 则得稳定的周期 7 环. 因此, 这些参数值属于锁相窗口. 也存在一个不稳定 (鞍点) 周期 7 环, 这个环是辛苦地用数值模拟探测到的. 这两个环位于闭不变曲线上. 事实上, 此曲线是由鞍点环的不稳定流形组成.

因此, 映射 (7.18) 的第七次迭代有 7 个*稳定不动点*和相同个数的*不稳定不动点*. 当增加或减少参数 $r$, 保持 $\varepsilon = 0$ 时, 稳定不动点和不稳定不动点重合并在折分支消失. 依 $r$ 标出所有不动点的坐标展示独特的*闭曲线*如图 7.23 所示②. 所有 7 个稳定不动点与它们相应的鞍点同时在折点 $r_{1,2}$ 相重合, 事实上, 由于只存在两个具相反稳定性的周期 7 环, 它们在这些参数值 $r_{1,2}$ 重合. 注意, 第七次迭代映射的每一个稳定不动点与在 $r = r_1$ 以及另一个在 $r = r_2$ 的折分支的相邻的不稳定不动点立刻相重合. 因此, 每个稳定不动点可以看作两个相邻不稳定不动点之间当 $r$ 从 $r_1$ 到 $r_2$ 变化时的转移.

---

① 否则, 在这种环面上定义两个不同的旋转数, 这是不可能的.

② 在第 10 章叙述延拓法, 用它可计算图 7.23 中的不动点曲线.

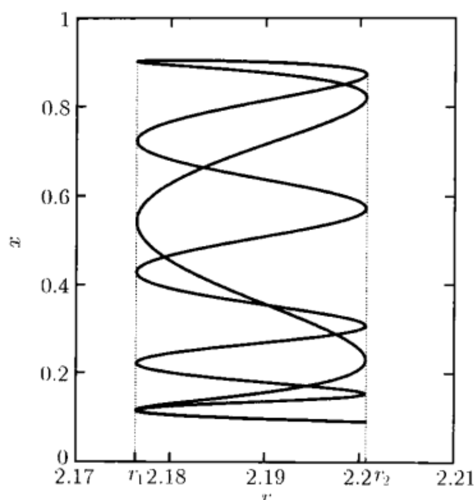



图 7.23 周期 7 环的分支图

锁相区间的边界点的延拓给出两条周期 7 环的折分支曲线 $t_1^{(7)}$ 和 $t_2^{(7)}$(见图 7.24). 它们形成典型的 Arnold 舌, 接近 Neimark-Sacker 曲线 $h^{(1)}$ 上的点, 原来的不动点乘子按这个理论有表达式

$$\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{7},$$

注意, 点 $(r,\varepsilon) = (2,0)$ 是另一个 Arnold 舌的原点, 它对应于周期 6 环 (参看例 4.2) 这个 1:6 舌没有显示在图 7.24 上.

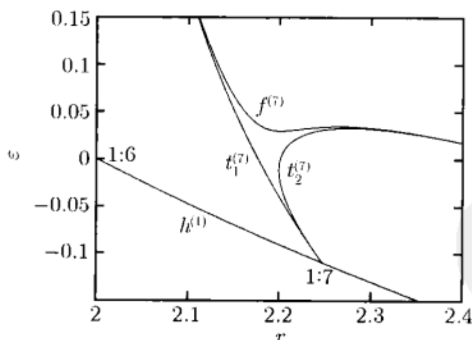



图 7.24 (7.17) 中 1:7Arnold 舌

值得指出的是, 如果 $\varepsilon$ 增加并通过某个临界值, 而 $r$ 固定则稳定的周期 7 环具有倍周期. 临界参数值形成一条曲线 $f^{(7)}$, 它也表示在图 7.24 上. 在这条曲线的 (附近) 上方一个周期 14 环出现, 而闭不变曲线就不再存在. 这是一种可使不变曲线失去它的光滑性而消失的可能方式之一. ◇

## 7.4　对称系统中的分支

这一节接触一个重要课题: 对称系统中的分支. 首先, 扼要说明一下对称系统的某些一般结果, 包括中心流形定理的对称形式. 然后, 分析最简单的离散对称系统中出现的平衡点分支和极限环分支.

对称系统自然地出现在许多应用中. 通常对称性反映动力系统的某些空间不变性或它的有限维近似. 许多分支规范形也有某些对称性. 如我们将看到的, 某些分支在具给定对称性的一类系统中有类似的余维, 对应的分支通常也有某些唯一特性. 反之, 某些分支在某些对称系统中变得不可能出现.

### 7.4.1　对称系统的一般性质

假设有一 (紧) 群 $G$, 它在 $\mathbb{R}^n$ 中对任何 $g_{1,2} \in G$ 可用矩阵 $\{T_g\}$:

$$T_e = I_n, \quad T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$$

表示. 这里 $e \in G$ 是群单位($eg = ge = g$), $I_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵.

**定义 7.2**　*连续–时间系统*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.19}$$

*称为关于群 $G$ 的表示 $\{T_g\}$(或者, 简单地, $G$等价) 是不变的, 如果对一切 $g \in G$ 和所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 有*

$$T_g f(x) = f(T_g x). \tag{7.20}$$

**例 7.3**　著名的 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{7.21}$$

关于变换

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

是不变的. 矩阵 $R$ 对应于这个变换 ($R^2 = I$), 连同单位矩阵 $I$ 组成群 $\mathbb{Z}_2$ 的三维表示 (见 7.4.2 节). ◇

由方程 (7.20) 得知线性变换

$$y = T_g x, \quad g \in G$$

不改变系统 (7.19). 事实上

$$\dot{y} = T_g\dot{x} = T_g f(x) = f(T_g x) = f(y).$$

因此, 如果 $x(t)$ 是 (7.19) 的解, 则 $y(t)=T_g x(t)$ 也是解. 例如, 如果$(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$, (这里 $z_0 \neq 0$) 是 Lorenz 系统 (7.21) 的一条同宿于原点的同宿解, 那么存在另外一条同宿于相同平衡点的轨道 $(-x_0(t), -y_0(t), z_0(t))$.

**定义 7.3** 不动点子空间 $X^G \subset \mathbb{R}^n$ 是集合

$$X^G = \{x \in \mathbb{R}^n : T_g x = x, \text{对一切 } g \in G\}.$$

集合 $X^G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 这个子空间是 (7.19) 的一个不变集, 因为由 $x \in X^G$ 得 $\dot{x} \in X^G$. 事实上, 对所有 $g \in G$, 有

$$T_g\dot{x} = T_g f(x) = f(T_g x) = f(x) = \dot{x}.$$

对系统 (7.21), 只有一个对称变换 $T$, 所以不动点子空间是 $z$ 轴, $X^G = \{(x,y,z) : x = y = 0\}$. 这个轴显然在系统相应流的作用下不变.

下面解释对称性带给对中心流形定理的修改. 假设有光滑的 $G$ 等价系统 (7.19). 设 $x^0$ 是属于不动点子空间 $X^G$ 的一个平衡点, Jacobi 矩阵 $A = f_x$ 在 $x_0$ 有 $n_0$ 个 (包括重次) 特征值在虚轴上. 设 $X_c$ 表示对应 $A$ 的临界特征空间. 下面的引理直接从恒等式 $T_g A = AT_g$, 对一切 $g \in G$ 得知, 而这可对 (7.20) 关于 $x$ 在 $x = x_0$ 微分得到.

**引理 7.3** $X^c$ 是 $G$ 不变, 换句话说, 若 $v \in X^c$, 则对一切 $g \in G$ 有 $T_g v \in X^c$. □

因此, 可考虑 $\{T_g\}$ 在 $X^c$ 上的限制 $\{T_g^c\}$. 若在 $X^c$ 上固定某个坐标 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_0})$, 则 $\{T_g^c\}$ 将由某个 $n_0 \times n_0$ 矩阵给出.

**定理 7.6** (Ruelle, 1973) (7.19) 的平衡点 $x^0 \in X^G$ 的任何一个中心流形 $W^c$ 是局部 $G$ 不变.

此外, 在 $W^c$ 上存在局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^{n_0}$, 在此坐标下, (7.19) 在 $W^c$ 上的限制

$$\dot{\xi} = \psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_0} \tag{7.22}$$

关于 $\{T_g\}$ 在 $X^c$ 上的限制是不变的

$$T_g^c \psi(\xi) = \psi(T_g^c \xi).$$ □

通常, 用 $A$ 的特征值, $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$, 可确定 $W^c$ 的吸引性. 如果 (7.19) 依赖于参数, 可以如第 5 章, 将方程 $\dot{\alpha} = 0$ 附加在系统中来构造一个依赖于参数的中心流形 $W^c_\alpha$. 依赖于 $\alpha$ 的限制系统 (7.22) 对每一固定 $\alpha$ 关于 $T_g^c$ 是不变的. 类似的结果对 $G$ 等价的离散–时间系统也成立.

### 7.4.2　$\mathbb{Z}_2$ 等价系统

最简单可能的非平凡群 $G$ 是由两个不同元素 $(e, r)$ 所组成, 它使得

$$r^2 = e, \quad re = er = r, \quad e^2 = e.$$

通常用 $\mathbb{Z}_2$ 记这个群. 设 $\{I_n, R\}$ 为 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性表示, 其中 $I_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵, $n \times n$ 矩阵 $R$ 满足

$$R^2 = I_n.$$

矩阵 $R$ 定义了一个对称变换$x \mapsto Rx$①. 容易验证 (练习 3), 空间 $R^n$ 可分解为直和

$$R^n = X^+ \oplus X^-,$$

其中, 对 $x \in X^+$ 有 $Rx = x$, 以及, 对 $x \in X^-$ 有 $Rx = -x$. 因此, $R$ 在 $X^+$ 上是恒同, 在 $X^-$ 上是中心反射. 按照定义 7.4, $X^+$ 是对应 $G$ 的不动点子空间. 设 $n^{\pm} = \dim X^{\pm}, n^+ \geqslant 0, n^- \geqslant 1$. 显然, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的基, 在此基下矩阵 $R$ 有形式

$$R = \begin{pmatrix} I_{n^+} & 0 \\ 0 & -I_{n^-} \end{pmatrix},$$

其中 $I_m$ 是 $m \times m$ 单位矩阵. 从现在起, 假定这样的基已选定, 因此可以考虑光滑依赖于参数的系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{7.23}$$

它满足对一切 $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ 有

$$Rf(x, \alpha) = f(Rx, \alpha),$$

这里 $R$ 是上面定义的矩阵. 不动点子空间 $X^+$ 是 (7.23) 的不变集.

对 $\mathbb{Z}_2$ 不变系统 (7.23) 的平衡点和周期解存在简单的分类.

**定义 7.4**　(7.23) 的平衡点 $x^0$ 称为不动的, 如果 $Rx^0 = x^0$.

由此, 对称变换映不动平衡点为它自身. 如果一个平衡点不是不动的, $Rx^0 = x^1 \neq x^0$, 则 $x^1$ 也是 (7.23) 的平衡点 (验证) 且 $Rx^1 = x^0$.

**定义 7.5**　(7.23) 的两个平衡点 $x^0$ 和 $x^1$ 称为 $R$共轭, 如果 $x^1 = Rx^0$.

类似的术语可对周期解引入.

**定义 7.6**　(7.23) 的周期解 $x_f(t)$ 称为不动的, 如果对一切 $t \in \mathbb{R}^1$, 有 $Rx_f(t) = x_f(t)$.

① 有时候, 也用符号 $R$ 表示这个变换, 在这种情况, $I_n$ 将指恒同映射.

显然, 闭轨对应属于 $X^+$ 的不动周期解且在对称变换 $R$ 作用下不变 (见图 7.25(a)). 如果 $n^+ \geqslant 2$, 它可存在. 但是, 存在另外一类定义闭轨的周期解它是 $R$ 不变, 但不是不动的.

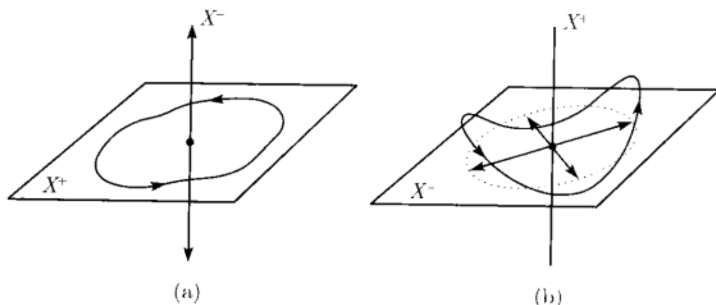



图 7.25 不变环: (a) $F$ 环; (b) $S$ 环

**定义 7.7** (7.23) 的 (最小) 周期为 $T_s$ 的周期解称为是对称的, 如果对一切 $t \in \mathbb{R}^1$, 有

$$Rx_s(t) = x_s\left(t + \frac{T_s}{2}\right).$$

因此, 变换 $R$ 将对称周期解变换成它自己, 并将时间提升半个周期. 对应于对称周期解的轨道不能交 $X^+$, 且为了存在, 要求 $n^- \geqslant 2$. 它在 $X^-$ 上的投影关于中心反射是对称的 (见图 7.25(b)). 注意, 对称周期解的 $X^+$ 分量具有倍频率的振动.

称 (7.23) 的极限环 $L$ 为不动的 (对称的), 如果对应的周期解是不动的 (对称的), 分别以 $F$ 环和 $S$ 环记之. $F$ 环和 $S$ 环作为 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线都是不变的, $R(L) = L$. 将下面的引理的证明留给读者作为练习.

**引理 7.4** (7.23) 的任何一个 $R$ 不变环, 不是 $F$ 环就是 $S$ 环. □

当然, 可以存在有非不变极限环, $R(L) \neq L$. 若 $x^0(t)$ 是对应于这种环的周期解, 则 $x^1(t) = Rx^0(t)$ 是 (7.23) 的另外一个周期解.

**定义 7.8** 两个非不变极限环称为 $R$共轭, 如果它们对应的两个周期解, 满足对一切 $t \in \mathbb{R}^1$ 有 $x^1(t) = Rx^0(t)$.

### 7.4.3 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统平衡点的余维 1 分支

现在的目的是对 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统中平衡点的一般分支进行分析. 显然, $R$ 共轭平衡点分支的发生如同一般系统一样, 只不过是用对称变换 $R$“加倍”. 例如, 两对具相反稳定性的 $R$ 共轭平衡点由于折分支它们可以重合而消失. 因此, 可以期望的新现象只有分支平衡点是不动的那种类型. 下面分析一个简单的例子.

**例 7.4** (对称的叉分支) 考虑纯量系统

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{7.24}$$

这个系统明显是 $\mathbb{Z}_2$ 等价. 事实上, 在此情形, $Rx=-x$(反射) 以及 $n^+=0, n^-=1$. 在 $\alpha=0$, 系统 (7.24) 有不动平衡点 $x^0=0$, 它具零特征值. (7.24) 的分支图是简单的 (见图 7.26). 总存在平凡平衡点 $x^0=0$, 当 $\alpha<0$ 时线性稳定, $\alpha>0$ 时不稳定. 按定义 7.5, 它是不动的. 还存在两个稳定的非平凡平衡点 $x^{1,2}(\alpha)=\pm\sqrt{\alpha}$, 当 $\alpha>0$ 时, 它们存在且 $R$ 共轭, $Rx^1(\alpha)=x^2(\alpha)$.

任何一个 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x}=\alpha x-x^3+O(x^5)$$

在原点附近局部拓扑等价于系统 (7.24). 事实上, 这样的系统有形式

$$\dot{x}=\alpha x-x^3+x\psi_\alpha(x^2), \qquad (7.25)$$

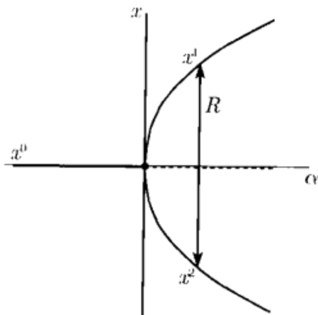


图 7.26　对称的叉分支

这里某个 $\psi_\alpha(x^2)=O(x^4)$, 这是因为任何一个在 $x=0$ 为零的奇函数可表示为 $x\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为偶函数, 因此, $\varphi(x)=\psi(x^2)$. 显然, $x=0$ 永远是 (7.25) 的平衡点. 非平凡平衡点满足方程

$$\alpha-x^2+\psi_\alpha(x^2)=0,$$

它在 $(x,\alpha)=(0,0)$ 附近可由隐函数定理容易地分析. 这就证明了对对应的小参数值 $|\alpha|$, (7.24) 和 (7.25) 的平衡点的个数和稳定性是相同的. 对一切 $(x,\alpha)$ 使得系统相图恒同的同胚 $h_\alpha:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 可构造出并满足

$$h_\alpha(-x)=-h_\alpha(x).$$

换句话说, 同胚可用 $x$ 的奇函数定义. ◇

由下面的定理, 这个例子具有基本意义.

**定理 7.7** (零特征值的分支)　*假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统*

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{R}^1,$$

*$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha)=f(Rx,\alpha), R^2=I_n$, 在 $\alpha=0$ 有不动平衡点 $x^0=0$, 具单零特征值 $\lambda_1=0, v\in\mathbb{R}^n$ 是对应的特征向量.*

*于是, 系统有一维 $R$ 不变中心流形 $W^c_\alpha$, 并发生下面一般的交替情形之一:*

*(i) (折分支). 若 $v\in X^+$, 则对所有充分小 $|\alpha|$, 有 $W^c_\alpha\subset X^+$ 且系统在 $W^c_\alpha$ 上的限制在原点附近局部拓扑等价于规范形*

$$\dot{\xi}=\beta\pm\xi^2.$$

(ii) (叉分支). 若 $v \in X^-$, 则对所有充分小 $|\alpha|$, 有 $W^c_\alpha \cap X^+ = x^0$ 且系统在 $W^c_\alpha$ 上的限制在原点附近局部拓扑等价于规范形

$$\dot{\xi} = \beta\xi \pm \xi^3. \qquad \square$$

在情形 (i), 在不变子空间 $X^+$ 内标准折分支发生, 产生两个不动–类型的平衡点. 这种情形的一般性条件就是第 3 章对非对称折分支已经叙述过的条件.

在情形 (ii), 发生例 7.3 中研究过的叉分支, 得知当不动平衡点改变稳定性时出现两个 $R$ 共轭平衡点. 一般性条件包含在 $\alpha = 0$ 系统在中心流形上的限制的不为零的三次项. 详情留给读者思考.

具有一对纯虚特征值的 $\mathbb{Z}_2$ 对称系统没有给我们带来比非对称 Hopf 分支理论更新的东西. 就是说可以证明下面的定理.

**定理 7.8** (纯虚特征值上的分支) 假设 $\mathbb{Z}_2$ 不变系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha) = f(Rx,\alpha), R^2 = I_n$, 在 $\alpha = 0$ 有不动平衡点 $x^0 = 0$, 它有单对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$. 则一般地, 这个系统有二维 $R$ 不变中心流形 $W^c_\alpha$, 系统在 $W^c_\alpha$ 上的限制在原点附近局部拓扑等价于规范形

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \pm (\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

这个规范形是一般 Hopf 分支的标准规范形. 它刻画了振幅为 $\sqrt{\beta}$ 的唯一极限环的出现 (或消失). 有个微小的不同, 就是依赖于临界特征空间 $X^c$ 是属于 $X^+$ 还是 $X^-$. 如果 $X^c \subset X^+$, 则 $W^c_\alpha \subset X^+$ 且标准的 Hopf 分支发生在不变子空 $X^+$ 内. 这个分支环是 $F$ 型. 反之, 如果 $X^c \subset X^-$, 则 $W^c_\alpha \cap X^+ = x^0$, 系统在中心流形上的限制关于变换

$$R \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Z}_2$ 不变. 分支出的小振幅极限环是 $S$ 型.

### 7.4.4 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统中环的余维 1 分支

如同平衡点情形, 非不变极限环分支的发生跟一般系统的情形相同. $F$ 环和 $S$ 环的分支则完全不同, 必须分别处理.

1. $F$ 环的余维 1 分支

考虑 (7.23) 的不动极限环 $L_F$, 选择一个余维 1 超平面 $\Sigma$, 它与环横截且是 $R$ 不变, $R(\Sigma) = \Sigma$. 设 $P_\alpha$ 是定义在 $\Sigma$ 上, 在它与 $L_F$ 交附近的 Poincaré 映射 (见图 7.27).

**引理 7.5**　Poincaré 映射 $P_\alpha : \Sigma \to \Sigma$ 是 $G$ 等价,

$$R_\Sigma \circ P_\alpha = P_\alpha \circ R_\Sigma,$$

这里 $R_\Sigma$ 是映射 $R$ 在 $\Sigma$ 上的限制.

**证明**　设 (7.23) 的轨道 $\gamma$ 从点 $u \in \Sigma$ 出发, 又回到接近于 $u$ 的点 $v \in \Sigma : v = P_\alpha(u)$. $R$ 共轭轨道 $\tilde{\gamma} = R(\gamma)$ 从点 $\tilde{u} = R_\Sigma(u)$ 出发而在点 $\tilde{v} = R_\Sigma(v)$ 回到 $\Sigma$. 由于 $\tilde{v} = P_\alpha(\tilde{u})$, 有

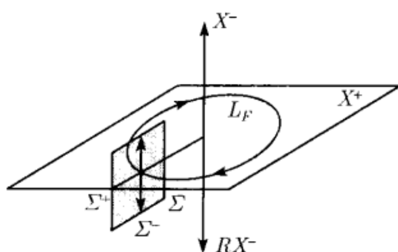


图 7.27　$F$ 环的 Poincaré 映射

$$R_\Sigma(P_\alpha(u)) = P_\alpha(R_\Sigma(u)),$$

对所有 $u \in \Sigma$ 上面方程两边都有定义. □

因此, $F$ 环的分支分析化为具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称的离散–时间动力系统 (映射) 的不动点分析. 在 $\Sigma$ 上引入局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, 使得 $\xi = 0$ 对应于环 $L_F$. 用相同符号 $R$ 代替 $R_\Sigma$, 并将 $\Sigma$ 分解为

$$\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-,$$

这里 $\xi \in \Sigma^\pm$, 如果 $R\xi = \pm\xi$. 分别考虑每个余维 1 情形. 我们给出的下面定理, 它已经够明显的了, 就不给出证明.

**定理 7.9** (在 $\mu = 1$ 的分支)　假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha) = f(Rx,\alpha), R^2 = I_n$, 在 $\alpha = 0$, 有 $F$ 环 $L_0$, 具单乘子 $\mu_1 = 1$, 它是满足 $|\mu| = 1$ 的唯一乘子. 设 $v$ 是关于这个环的 Poincaré 映射 $P_0$ 的 Jacobi 矩阵对应特征向量. 则映射 $P_\alpha$ 有一维 $R$ 不变中心流形 $W^c_\alpha$ 以及 $P_\alpha$ 在这个流形上的限制, 一般地, 这个限制在这个环附近局部拓扑等价于下面规范形之一:

(i) (折分支) 若 $v \in \Sigma^+$, 则

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2;$$

(ii) (叉分支) 若 $v \in \Sigma^-$, 则

$$\eta \mapsto (1+\beta)\eta \pm \eta^3.$$

□

在情形 (i), $W^c_\alpha \subset \Sigma^+$, 有标准的折分支, 于是出现两个具不同稳定性的 $F$ 环 $L_1, L_2 \in X^+$(见图 7.28).

在情形 (ii), $W^c_\alpha \cap \Sigma^+ = 0$, 出现 (或不出现) 两个 $R$ 共轭极限环 $L_{1,2}, L_2 = R(L_1)$, 如同原来的 $F$ 环改变其稳定性 (见图 7.29).

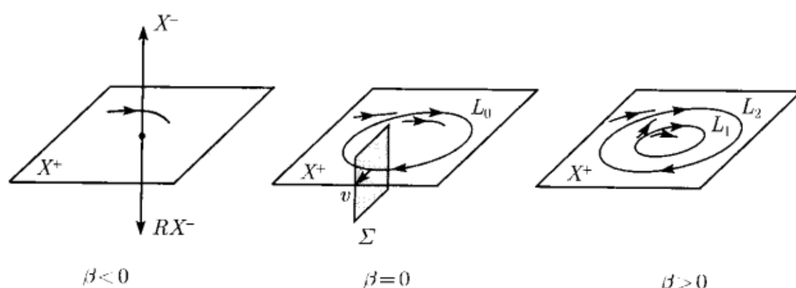



图 7.28 $F$ 环的折分支

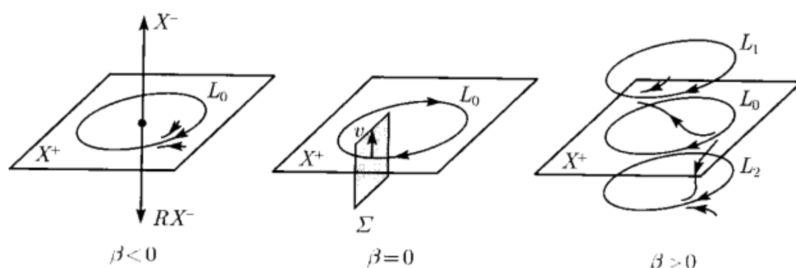



图 7.29 $F$ 环的叉分支

**定理 7.10** (在 $\mu=-1$ 的分支) 假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha)=f(Rx,\alpha), R^2=I_n$, 在 $\alpha=0$, 有 $F$ 环 $L_0$ 具单乘子 $\mu_1=-1$, 它是满足 $|\mu|=1$ 的唯一乘子. 设 $v$ 是相应的 Poincaré 映射 $P_0$ 的 Jacobi 矩阵对应的特征向量. 则映射 $P_\alpha$ 有一维 $R$ 不变中心流形 $W^c_\alpha$ 以及 $P_\alpha$ 在这个流形上的限制, 一般地, 这个限制在这个环附近局部拓扑等价于规范形:

$$\eta\mapsto-(1+\beta)\eta\pm\eta^3.$$

此外, 对应于 $P^2_\alpha$ 的不动点的倍周期极限环, 当 $v\in\Sigma^+$ 则是 $F$ 型, 当 $v\in\Sigma^-$ 则是 $S$ 型.

□

**定理 7.11** (复乘子 $|\mu_{1,2}|=1$ 的分支) 假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha)=f(Rx,\alpha), R^2=I_n$, 在 $\alpha=0$, 有 $F$ 环 $L_0$ 具单乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0}$, 它是满足 $|\mu|=1$ 的仅有的乘子. 则映射 $P_\alpha$ 有二维 $R$ 不变中心流形 $W^c_\alpha$, 其上从对应 $L_0$ 的不动点, 一般地分支出唯一不变闭曲线. 这条曲线对应于系统的二维不变环面 $\mathbb{T}^2$, $R(\mathbb{T}^2)=\mathbb{T}^2$.

□

**注** 折分支和叉分支是 $\mathbb{R}^3$ 中一般单参数的 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统中仅有可能的余维 1 分支.

◇

2. $S$ 环的余维 1 分支

如我们可看到的, 在这情形截面不可能选择为 $R$ 不变. 代之以可选两个与环 $L_0$ 相割的超平面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$, 使得

$$R(\Sigma_1) = \Sigma_2,$$

对所有充分小 $|\alpha|$, Poincaré 映射 $P_\alpha$ 可表示为在这个环附近定义的两个映射 $Q_\alpha^{(1)}: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 和 $Q_\alpha^{(2)}: \Sigma_2 \to \Sigma_1$ 的合成 (见图 7.30)

$$P_\alpha = Q_\alpha^{(2)} \circ Q_\alpha^{(1)}.$$

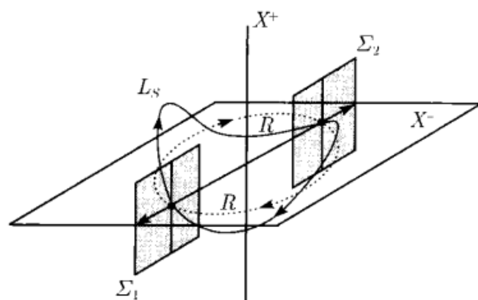



图 7.30　$S$ 环的 Poincaré 映射

**引理 7.6**　*存在光滑映射 $Q_\alpha: \Sigma_1 \to \Sigma_1$ 使得*

$$P_\alpha = Q_\alpha^2. \tag{7.26}$$

**证明**　在适当的坐标下映射 $Q_\alpha^{(2)}$ 与 $Q_\alpha^{(1)}$ 重合. 更确切地, 由于系统的对称性,

$$Q_\alpha^{(2)} \circ R = R \circ Q_\alpha^{(1)},$$

或者, 等价地, $Q_\alpha^{(2)} = R \circ Q_\alpha^{(1)} \circ R^{-1}$. 现在引入映射

$$Q_\alpha = R^{-1} \circ Q_\alpha^{(1)},$$

它把 $\Sigma_1$ 映为它自己. 首先, 允许沿着系统的轨道从 $\Sigma_1$ 上的点飞到 $\Sigma_2$ 上的点, 然后应用对称变换的逆变换 $R^{-1}$ 把它变回 $\Sigma_1$. 有

$$P_\alpha = R \circ Q_\alpha^{(1)} \circ R^{-1} \circ Q_\alpha^{(1)} = R \circ (R \circ R^{-1}) \circ Q_\alpha^{(1)} \circ R^{-1} \circ Q_\alpha^{(1)} = R^2 \circ Q_\alpha^{(2)},$$

这就给出了 (7.26), 因为 $R^2 = I$. □

因此, $S$ 环的分支分析简化为映射 $Q_\alpha$ 的不动点分析, 而这映射没有特别的对称性. 但是, 方程 (7.26) 在可能的分支上加了强的限制.

**命题 7.1** 一个 $S$ 环不可能有单乘子 $\mu=-1$.

**证明** 设 $A$ 和 $B$ 是 $P_0$ 和 $Q_0$ 在它们的公共不动点计算的 Jacobi 矩阵. 于是由 (7.26) 得

$$A=B^2.$$

如果 $\mu$ 是 $A$ 的单实特征值, 则存在 $B$ 的单实特征值 $\lambda$. 因此, $\mu=\lambda^2>0$. □

因此, 只有情形 $\mu_1=1$ 和 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm i\theta_0}$ 必须考虑.

**定理 7.12** (在 $\mu=1$ 的分支) 假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha)=f(Rx,\alpha),R^2=I_n$, 在 $\alpha=0$, 有 $S$ 环 $L_0$ 具单乘子 $\mu_1=1$, 它是满足 $|\mu|=1$ 的仅有的乘子. 设 $v$ 是相应的 Poincaré 映射 $P_0=Q_0^2$ 的 Jacobi 矩阵 $A=B^2$ 对应的特征向量. 则映射 $P_\alpha$ 有一维 $R$ 不变中心流形 $W_\alpha^c$, 以及 $P_\alpha$ 在这个流形上的限制, 一般地, 这个限制在这个环附近局部拓扑等价于下面规范形之一:

(i) (折分支) 若 $Bv=v$, 则

$$\eta\mapsto\beta+\eta\pm\eta^2;$$

(ii) (叉分支) 若 $Bv=-v$, 则

$$\eta\mapsto(1+\beta)\eta\pm\eta^3.$$

**证明概要** 在情形 (i), 有 $Q_\alpha$ 的标准折分支 ($\lambda=1$). 因此, 在它的中心流形上 (它也是 $P_\alpha$ 的中心流形) 映射 $Q_\alpha$ 一般地等价于

$$\xi\mapsto\gamma+\xi\pm\xi^2.$$

这个映射的不动点对应系统的 $S$ 环. 它的二次迭代

$$\xi\mapsto(2\gamma+\cdots)+(1+\cdots)\xi\pm(2+\cdots)\xi^2+\cdots$$

拓扑等价于规范形 (i).

在情形 (ii), 有 $Q_\alpha$ 的标准翻转分支 ($\lambda_1=-1,\lambda_1^2=1$). 在它的中心流形上, 映射 $Q_\alpha$ 等价于

$$\xi\mapsto-(1+\gamma)\xi\pm\xi^3.$$

这个映射的周期 2 环对应于原来系统的一对 $R$ 共轭环. 这个映射的二次迭代

$$\xi\mapsto(1+2\gamma+\cdots)\xi\mp(2+\cdots)\xi^3+\cdots$$

拓扑等价于规范形 (ii). □

**定理 7.13** (复乘子 $|\mu_{1,2}|=1$ 的分支)　假设 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}^1,$$

$f$ 光滑, $Rf(x,\alpha)=f(Rx,\alpha), R^2=I_n$, 在 $\alpha=0$, 有 $S$ 环 $L_0$ 具单乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0}$, 它是满足 $|\mu|=1$ 的仅有的乘子. 于是, 映射 $P_\alpha$ 有二维 $R$ 不变中心流形 $W_\alpha^c$, 其上从对应 $L_0$ 的不动点, 一般地分支出唯一不变闭曲线. 这条曲线对应于系统的二维不变环面 $\mathbb{T}^2$, $R(\mathbb{T}^2)=\mathbb{T}^2$. □

**注**　$\mathbb{R}^3$ 中在变换 $Rx=-x, x\in\mathbb{R}^3$ 下不变的系统不可能具有 $S$ 环的 Neimark-Sacker 分支. ◇

## 7.5　练　　习

1. (鞍–结点同宿分支附近环周期的渐近) 当环趋于在鞍–结点分支的同宿轨道时, 计算作为 $\beta$ 函数的环周期 $T_\beta$ 的渐近表达式. 提示: 表达式的主项由

$$T_\beta\sim\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\xi}{\beta+\xi^2}$$

给出, 其中 $\xi$ 是鞍–结点附近中心流形 $W_\beta^c$ 上的坐标.

2. (Arnold 的圆周映射) 考虑下面的两参数光滑映射 $P_{\alpha,\varepsilon}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$,

$$P_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)=\varphi+\alpha+\varepsilon\sin\theta,$$

其中 $0\leqslant\varepsilon<1,\varphi,\alpha(\mathrm{mod}2\pi)$. 计算曲线的渐近表达式, 此曲线在 $(\alpha,\varepsilon)$ 平面界定的区域内对应的映射有旋转数 $\rho=\dfrac{1}{2}$. 提示: 由旋转数 $\rho=\dfrac{1}{2}$ 得知出现周期 2 环, 而边界是由这些环的折分支定义.

3. (对称分解) 设 $R$ 是使得 $R^2=I_n$ 的 $n\times n$ 实矩阵. 证明: 空间 $\mathbb{R}^n$ 可分解为 $\mathbb{R}^n=X^+\oplus X^-$, 其中 $Rx=x$, 对 $x\in X^+$ 以及 $Rx=-x$, 对 $x\in X^-$. 提示: $R$ 任何一个特征值 $\lambda$ 满足 $\lambda^2=1$.

4. ($\mathbb{Z}_2$ 等价的平面系统中的 Hopf 分支) 证明: 在变换

$$R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

作用下不变的平面系统永远不会发生 Hopf 分支. 提示: 任何一个满足 $AR=RA$ 的实矩阵是对角形, 其中 $R$ 是上面定义的.

5. (Lorenz 系统中叉分支) 证明: Lorenz 系统 (7.21) 的平衡点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 在 $r_0=1$ 对任何固定的正数 $(\sigma,b)$ 有非退化的叉分支. 提示: (a) 验证在 $r_0=1$, 在

原点的平衡点有单零特征值, 计算它对应的特征向量 $v$. 验证 $Av=-v$, 其中 $A$ 是 (7.21) 在 $x=y=z=0$ 对 $r=1$ 计算的 Jacobi 矩阵, 所以定理 7.6 中的情形 (ii) 可应用.

(b) 计算中心流形 $W^c$ 在 $r_0=1$ 的二阶近似并证明它是 $R$ 不变.

(c) 验证系统在中心流形上的限制没有二次项. 能否预先知道这点?

(d) 计算作为 $(\sigma, b)$ 的函数的三次项系数, 并验证对正参数值它是非零的.

6. ($O(2)$ 对称 Hopf 分支的规范形) 下面考虑写为两个复方程的光滑四维系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1(\beta + \mathrm{i}\omega(\beta) + A(\beta)|z_1|^2 + B(\beta)|z_2|^2), \\ \dot{z}_2 = z_2(\beta + \mathrm{i}\omega(\beta) + B(\beta)|z_1|^2 + A(\beta)|z_2|^2), \end{cases} \tag{7.27}$$

其中 $\beta$ 是分支参数, $\omega(0)>0, A(\beta)$ 和 $B(\beta)$ 是复值函数, 且对 $a(\beta)=\mathrm{Re}A(\beta), b(\beta)=\mathrm{Re}B(\beta)$, 有

$$a(0)b(0)(a^2(0)-b^2(0)) \neq 0.$$

这是一个具四维中心流形的 $O(2)$ 等价系统, Hopf 分支的 (截断) 规范形 (van Gils, Mallet-Paret, 1986; Kuznetsov, 1984, 1985), 注意, 一对临界特征值 $\pm\mathrm{i}\omega(0)$ 是二重的.

(a) 验证系统 (7.27) 关于由变换

$$R(z_1,z_2)=(z_2,z_1), \quad T_\theta(z_1,z_2)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_2)(\theta \bmod 2\pi) \tag{7.28}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 中组成的正交群 $O(2)$ 的表示是不变的.

(b) 将系统 (7.27) 写为极坐标形式 $z_k=\rho_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, k=1,2$, 并验证 $\rho_k$ 方程与 $\varphi_k$ 无关.

(c) 引入 $r_k=\rho_k^2, k=1,2$ 并推导 $r_k$ 的平面二次系统. 假设 $a(0)<0$, 当 $\beta$ 变化时求所得系统的分支图. 提示: 存在三个子空间 (i) $b(0)<a(0)$; (ii) $b(0)>a(0), a(0)+b(0)<0$; (iii) $b(0)>0, a(0)+b(0)>0$. 在所有情形, 振幅系统没有极限环.

(d) 借助四维系统 (7.27) 解释 (c) 中的结果. 证明: 除了在原点的平凡平衡点以外, 系统还有一对 $R$ 共轭极限环, 以及/或者由闭轨叶化的二维 $R$ 不变环面和 $T_\theta$ 不变环面. 解释为什么在参数变化下在环面上存在这种结构不稳定轨道配置得到保持. 证明当它们同时存在时环与环面具有相反的稳定性.

(e) 求证: 任何一个关于变换 (7.28) 不变且有 $\lambda(0)=\mathrm{i}\omega(0)$ 的光滑系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda(\alpha)z_1 + f_1(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,\alpha), \\ \dot{z}_2 = \lambda(\alpha)z_2 + f_2(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,\alpha) \end{cases} \tag{7.29}$$

可用光滑依赖于参数的光滑可逆变换化为三次项在内的系统 (7.27), 其中 $\beta = \beta(\alpha)$. 验证所得的变换具有对称性 (即在 (7.28) 下不变).

(f) 证明: 在截断规范形 (7.27) 中添加任何 $O(2)$ 等价高阶项后, 极限环和环面还幸存.

(g) 假设 (7.27) 是二维区域 $\Omega$ 内反应扩散系统在中心流形上方程的截断规范形, 它有由旋转和反射所组成的空间对称群 $O(2)$. 证明: 这个系统在中心流形上的环对应反应扩散系统的*旋转波*, 环面刻画这个系统的*驻波*.

## 7.6　附录: 文献评注

Andronov(1973) 在 20 世纪 40 年代就已经在叙述平面其他余维 1 分支时讨论了鞍–结点同宿分支. 关于鞍–结点和鞍–鞍点同宿分支的高维定理是属于 Shilnikov (1963, 1966, 1969). 这里叙述的鞍–鞍点多重同宿情形是根据 Ilyashenko 于 1987 年在国立莫斯科大学所作的报告 (Ilyashenko, Li, 1999). 非横截鞍–鞍点同宿轨道的两参数开折是由 Champneys, Harterich 和 Sandstede (1996) 所分析, 他们也构造了一个具两条同宿于鞍–鞍点的轨道的多项式系统. 当同宿轨道沿着非中心方向回到鞍–鞍点时的其他余维 2 情形, 平面系统是由 Lukyanov(1982) 分析, 一般情形是由 Chow 和 Lin(1990) 以及 Deng(1990) 分析.

Gavrilov 和 Shilnikov(1972, 1973) 第一个研究鞍点环的不变流形非横截相交, 他们分析在临界参数值附近 Smale 马蹄是如何产生和消失, 也见文献 (Gruzdev, Neimark, 1975), 这个复杂现象的详细情形是由 Newhouse 等 (1983) 以及 Palis 和 Takens(1993) 研究. 后面的书还包含有在非横截同宿轨道于鞍点环附近定义的 Poincaré 映射可用 Hénon 映射逼近的证明. 当鞍点环是中性时对应的余维 2 分支是由 Gonchenko 和 Gonchenko(2000) 研究的. 这引导 Gonchenko, Kuznetsov 和 Meijer(2004) 对广义 Henon 映射的研究. 非双曲环同宿轨道分支原先是由 Afraimovivh 和 Shilnikov(1972, 1974, 1982) 分析; 这个现象的近代处理见文献 (Ilyashenko, Li, 1999).

"蓝天" 问题第一个是由 Palis 和 Pugh(1975) 叙述. Medvedev(1980) 在 Klein 瓶上第一个构造了这种分支的明确例子. 但是, 当趋于 "蓝天" 参数值时构造的极限环具有无穷多个折分支. 稳定环的 "蓝天" 分支的 "法兰西" 号角装置是由 Turaev 和 Shilnikov(1995) 以及 Gavrilov 和 Shilnikov(2000) 提出并分析 (Shilnikov et al., 2001, 第 12.4 节). 有些作者朴素地把任何一个同宿分支看成 "蓝天" 突变.

在环上的连续–时间系统的分支以及相应的圆周映射分支是一个古典课题, 要追溯到 Poincaré 的年代. 环面上微分方程理论的一个好介绍可在书 (Arnold, 1983) 找到, 它还包含了 Denjoy 定理的证明 (Denjoy, 1932; Nitecki, 1971). 通常的双曲不

变流形 (包括环面) 在扰动下得到保持是由 Fenichel(1971) 证明的. 当通常的双曲性失去时, 环面可破裂. 可能出现破裂的情景由 Arnold, Afraimovich, Ilyashenko 和 Shilnikov(1994) 分类, 进一步的分析由 Broer, Simo 和 Tatjer(1998) 做出. 一个例子显示分支序列导致不变环面破裂的复杂性也可见文献 (Aronson et al., 1982).

具有对称性的分支是一个巨大而迅速发展的领域. 这里标准的参考书是 Golubitsky 和 Schaeffer(1985) 以及 Golubitsky, Stewart 和 Schaeffer(1988). 但是阅读它们需要相当高深的数学知识. 中心流形定理在紧对称群上的实现是 Ruelle(1973) 叙述的. 到非紧情形的推广是由 Sandstede, Scheel 和 Wulff(1997) 证明的. 出现在离散对称系统中的极限环和它的分支的主要结果是由 Fiedler(1988) 以及 Nikolaev(1994) 得到的. 本书对 $\mathbb{Z}_2$ 等价系统环分支的叙述接近于 Nikolaev(1992, 1995)(也可见文献 (Nikolaev, Shnol, 1998a, 1998b)).



# 第 8 章 连续–时间动力系统平衡点的双参数分支

这一章讨论一般双参数微分方程系统的平衡点分支. 首先列出全部这类分支. 然后对每一个分支在最小可能相维和指定有关的一般性条件下推导*依赖于参数的规范形*. 接下来, 截断高阶项并显示所得系统的分支图. 完整地分析高阶项的影响, 在这些情形它并不定性地影响分支图, 截断系统对有关的分支提供了拓扑规范形. 利用依赖于参数的中心流形定理和定理 5.4(见第 5 章) 可把这一章的结果应用到 $n$ 维系统中去. 结合简化/标准化技巧对所有余维 2 分支临界规范形系数作了推导以结束本章.

用参数和坐标变换将系统化为规范形可导致冗长的中间计算和表达式, 使得这个理论看上去呈现不必要的复杂性. 这里有许多这样的表达式, 读者会考虑尝试反对这种 "手算". 强烈建议用符号操作软件包之一, 这对这个问题是合适的 (见本章末练习 15 以及第 10 章文献评注).

## 8.1 平衡点的余维 2 分支一览

考虑双参数系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{8.1}$$

这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, f$ 是 $(x, \alpha)$ 的充分光滑函数.

### 8.1.1 余维 1 分支曲线

假设在 $\alpha = \alpha^0$, 系统 (8.1) 有平衡点 $x = x^0$, 对此折分支或 Hopf 分支条件满足. 于是, 一般地, 在 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面内存在*分支曲线* $\mathcal{B}$, 沿着这条曲线系统具有相同分支的平衡点. 考虑两个简单例子.

**例 8.1**(纯量系统的折分支曲线) 假设在 $\alpha = \alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)^{\mathrm{T}}$, 系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \tag{8.2}$$

有平衡点 $x = x^0$, 特征值 $\lambda = f_x(x^0, \alpha^0) = 0$. 考虑非线性纯量方程组

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0, \\ f_x(x, \alpha) = 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

这是 $\mathbb{R}^3$ 中以 $(x,\alpha_1,\alpha_2)$ 为坐标的两个方程的方程组. 一般地, 它定义了一个通过点 $(x^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)$ 的一维光滑流形 (曲线)$\Gamma\subset\mathbb{R}^3$(见图 8.1). 这里 "一般地" 意味着 (8.3) 的 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix}$$

的秩是最大, 即等于 2. 例如, 如果定理 3.1 在 $\alpha^0$ 关于 $\alpha_1$ 的折分支条件满足:

(A.1) $f_{xx}(x^0,\alpha^0)\neq 0$;

(A.2) $f_{\alpha_1}(x^0,\alpha^0)\neq 0$.

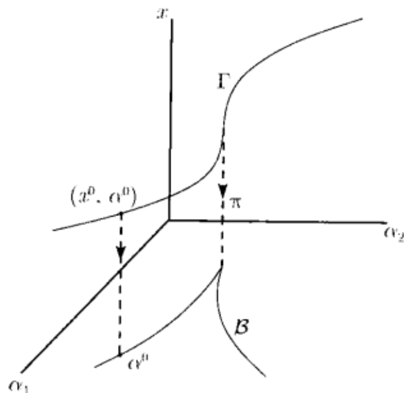



图 8.1　分支曲线以及它对应的分支边界 $\mathcal{B}$

则在 $(x^0,\alpha^0)$, 秩 $J=2$, 因为

$$\det\begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 0 & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix}=-f_{xx}f_{\alpha_1}\neq 0.$$

这时, 由隐函数定理, 满足 (8.3) 且使得

$$X(\alpha_2^0)=x^0,\quad A(\alpha_2^0)=\alpha_1^0$$

的两个光滑函数

$$\begin{cases} x=X(\alpha_2), \\ \alpha_1=A(\alpha_2) \end{cases}$$

(局部) 存在. 这些函数定义了在点 $(x^0,\alpha^0)$ 附近由 $\alpha_2$ 参数化的曲线 $\Gamma$. 由连续性, 一般性条件 (A.1) 和 (A.2) 在 $\Gamma$ 附近的点也满足. 因此, 构造可重复以进一步延展这条曲线.

如果在某一点 $f_{\alpha_1}=0$ 但 $f_{\alpha_2}\neq 0$, 其中 $f_{xx}\neq 0$, 类似的论述给出由 $\alpha_1$ 参数化的 $\Gamma$ 的局部存在性. 即使在某点 $f_{xx}=0$, 这表明非退化条件 (A.1) 不成立, 系统

(8.3) 仍可以定义一条曲线, 只要

$$\det\begin{pmatrix} f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

如前, 在这样的点, 秩 $J=2$, 曲线 $\Gamma$ 由 $x$ 局部参数化.

每一点 $(x,\alpha)\in\Gamma$ 确定了系统 (8.2) 的平衡点, 在参数值 $\alpha$ 这个平衡点有零特征值 (见系统 (8.3)). **标准投影**

$$\pi:(x,\alpha)\mapsto\alpha$$

将 $\Gamma$ 映为参数平面上的曲线 $\mathcal{B}=\pi\Gamma$(见图 8.1). 折分支在这条曲线上发生. ◇

**例 8.2** (平面系统中的 Hopf 分支曲线)　考虑平面系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2 \tag{8.4}$$

在 $\alpha=\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0)^{\mathrm{T}}$ 系统有平衡点 $x^0=(x_1^0,x_2^0)^{\mathrm{T}}$, 具一对在虚轴上的特征值 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}\omega_0$. 现在考虑 $\mathbb{R}^4$ 中以 $(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2)$ 为坐标的三个纯量方程的系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ \mathrm{tr}(f_x(x,\alpha))=0, \end{cases} \tag{8.5}$$

这里 tr 表示矩阵对角线元素之和 (迹). 显然, $(x^0,\alpha^0)$ 满足 (8.5), 因为迹等于 $f_x$ 的特征值之和. 如果平衡点 $x^0$ 在 $\alpha^0$ 有一般 Hopf 分支, 那么 (8.5) 的 Jacobi 矩阵在 $(x^0,\alpha^0)$ 有最大的秩 (等于 3). 证明留给读者. 事实上, 在较少限制假设下这个秩仍等于 3. 因此, 系统 (8.5) 在 $\mathbb{R}^4$ 定义了通过 $(x^0,\alpha^0)$ 的曲线 $\Gamma$. 曲线上的每一点给出 (8.4) 具 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0>0$ 的平衡点, 只要 $\det\,(f_x(x,\alpha))>0$. $\Gamma$ 在 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 平面上的标准投影给出了 Hopf 分支边界 $\mathcal{B}=\pi\Gamma$.

注意, (8.5) 中第二个方程对有两个**实特征值**

$$\lambda_1=\tau,\quad \lambda_2=-\tau$$

的平衡点也满足, 这里 $\tau>0$. 这时 $\det\,(f_x(x,\alpha))<0$, 平衡点称为**中性鞍点**. 对中性鞍点, 鞍点量 $\sigma=\lambda_1+\lambda_2=0$(见第 6 章). ◇

例 8.1 和例 8.2 的构造可以推广到任意高的 $n$ 维相空间中去. 如前, 假设在 $\alpha=\alpha^0$ 系统 (8.1) 有满足折分支或 Hopf 分支条件的平衡点 $x=x^0$. 在每一个情形, 借助于 Jacobi 矩阵 $f_x$ 的元素可构造一个光滑纯量函数 $\psi=\psi(x,\alpha)$. 将这个函数加到平衡点方程得系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ \psi(x,\alpha)=0, \end{cases} \tag{8.6}$$

一般地, 它在以 $(x,\alpha)$ 为坐标的 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中定义一条通过点 $(x^0,\alpha^0)$ 的曲线 $\Gamma$. $\Gamma$ 是由满足确定分支条件的平衡点组成. $\Gamma$ 在 $\alpha$ 平面上的标准投影对应于分支边界 $\mathcal{B}$.

在折分支情形函数 $\psi$ 最容易构造. 满足

$$\psi = \psi_t(x,\alpha) = \det(f_x(x,\alpha)) \tag{8.7}$$

的系统 (8.6) 定义的平衡点曲线至少有一个零特征值. 事实上, $\psi_t$ 是 $f_x$ 的所有特征值的积, 因此在具零特征值的平衡点为零. 可以验证, 在一般的折分支点 $(x^0,\alpha^0)$, 秩 $J=n+1$, 其中 $J$ 是 (8.6) 关于 $(x,\alpha)$ 的 Jacobi 矩阵.

函数 $\psi=\psi_H(x,\alpha)$ 可以对 Hopf 分支构造. 也就是说,

$$\psi_H(x,\alpha) = \det\ (2f_x(x,\alpha)\odot I_n), \tag{8.8}$$

其中 $\odot$ 表示两个矩阵的**双交错积**. 这个积是某个 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 阶方阵. 函数 $\psi_H$ 等于 $f_x$ 所有形式上不相同特征值之和的积:

$$\psi_H = \prod_{i>j}(\lambda_i+\lambda_j).$$

因此, 它在一对其和为零的特征值的平衡点等于零. 同时指出在一般 Hopf 分支秩 $J=n+1$. 在第 10 章将回到双交错积的确切定义和实际计算.

### 8.1.2 余维 2 分支点

令参数 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 同时变化去追踪分支曲线 $\Gamma$(或 $\mathcal{B}$). 于是, 在某些参数值监控非双曲平衡点时下面的事情或许会发生:

(i) 额外的特征值趋于虚轴, 因此改变了中心流形 $W^c$ 的维数;

(ii) 某些对余维 1 分支的一般性条件不满足.

对邻近的参数值我们可期望出现系统新的相图, 这意味着余维 2 分支的出现. 折分支或 Hopf 分支不同的一般性条件有着不同的特性. 正如在第 3 章看到, 有些条件 (称为 "非退化条件") 意味着在中心流形上方程的规范形系数在临界点不为零. 这些系数可用 $f(x,0)$ 在平衡点的 Taylor 系数来计算. 反之, 有些条件 (称为 "横截性条件") 包含有 $f(x,\alpha)$ 关于某些参数 $\alpha_i$ 的某些导数. 这两种类型的条件在分支分析中起着不同的作用. 非退化条件本质上决定在参数扰动下出现平衡点以及环的个数和稳定性, 而横截性条件只不过建议引入新参数以 "开折" 分支 (见第 3 章). 因此, 只有破坏非退化条件才能产生新的相图. 例如, 在 Hopf 分支点, 若

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\mathrm{Re}\ \lambda_{1,2}(\alpha)=0,$$

则一般地, 当 $\alpha_i$ 通过临界值时特征值不穿过虚轴. 于是得对亚临界参数值和超临界参数值有相同的局部相图.

先追随折分支曲线 $\mathcal{B}_t$. 一个在这条曲线上的典型点确定的平衡点有单零特征值 $\lambda_1=0$, 且没有其他特征值在虚轴上. (8.1) 在中心流形 $W^c$ 上的限制有形式

$$\dot{\xi}=b\xi^2+O(\xi^3). \tag{8.9}$$

关于系数 $b$ 的公式已经在第 5 章推导过. 由定义, 系数 $a$ 在非退化折分支点不为零. 跟踪此曲线可遇到下面的奇异性:

(1) 另外的特征值 $\lambda_2$ 趋于虚轴, $W^c$ 变成二维:

$$\lambda_{1,2}=0$$

(见图 8.2(a)). 这是Bogdanov-Takens (或零-零)分支的条件. 要有这种分支, 需要 $n\geqslant 2$.

(2) 两个另外的复特征值 $\lambda_{2,3}$ 到达虚轴, $W^c$ 变成三维:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_{2,3}=\pm i\omega_0,$$

对 $\omega_0>0$(见图 8.2(b)). 这些条件对应于**折** Hopf (fold-Hopf) 分支, 有时称为 Gavrilov-Guckenheimer **分支**或**零-对分支**. 显然要出现这种分支, 需要 $n\geqslant 3$.

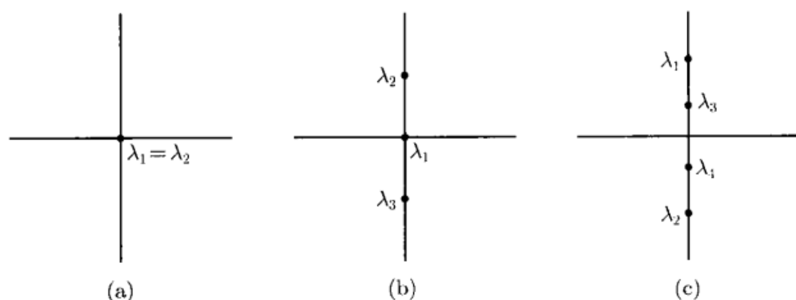



图 8.2　余维 2 的线性奇异性

(3) 特征值 $\lambda_1=0$ 保持单的, 且只有这一个在虚轴上 ($\dim W^c=1$), 但是 (8.9) 中规范形系数 $a$ 为零:

$$\lambda_1=0,\quad b=0.$$

这是**尖分支**条件, 只有在 $n\geqslant 1$ 的系统中才可能出现. 注意, 仅仅观察平衡点的特征值是无法发现这种分支的, 因为 $f(x,0)$ 的二次项包含在 $b$ 的计算中. 这种类型的分支有时称为 "非线性项的退化性".

现在追随系统 (8.1) 的 Hopf 分支曲线 $\mathcal{B}_H$. 在这条曲线上的典型点, 系统有单对纯虚特征值 $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$, $\omega_0>0$ 的平衡点, 且没有其他具 $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ 的特征值. 中心流形 $W^c$ 在此情形是二维, 且存在 (极) 坐标 $(\rho,\varphi)$, 在此坐标系下 (8.1) 在此

流形上的限制轨道等价于

$$\begin{cases} \dot{\rho} = l_1\rho^3 + O(\rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^3). \end{cases} \tag{8.10}$$

公式中的系数 $l_1$ 已经在第 3 章和第 5 章中推导过. 由定义, 在非退化的 Hopf 点 $l_1 \neq 0$.

当沿着这曲线移动时, 还会遇到下面新的可能性:

(4) 两个额外的复共轭特征值 $\lambda_{3,4}$ 趋于虚轴, $W^c$ 变成四维:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_1,$$

$\omega_{0,1} > 0$(图 8.2(c)). 这些条件定义了Hopf-Hopf **分支或对–对分支**. 只有 $n \geqslant 4$ 这种分支才可能发生.

(5) 最后, 当 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ 保持单时第一个 Lyapunov 系数 $l_1$ 可能为零, 因此, $\dim W^c = 2$,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad l_1 = 0.$$

在这一点, "软的"Andronov-Hopf 分支变成 "硬的" 分支 (或反之). 称这种情形为**Bautin 分支**(见文献评注). 通常称它为**广义 (或退化)Hopf 分支**. 如果 $n \geqslant 2$, 这是有可能的. 如同尖分支, Bautin 分支不可能只观察特征值就能发现. 我们必须考虑到 (8.1) 右端在平衡点的 Taylor 级数的二次项和三次项的系数.

显然, 当 $\omega_0$ 趋于零时, 沿着 Hopf 分支曲线 Bogdanov-Takens 分支也可定位. 在这点两个纯虚特征值重合得二重零特征值. 如果继续跟踪由 (8.6) 定义的曲线, 其中 $\psi = \psi_H$ 由 (8.8) 给出, 我们将注意到一个特征值满足 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 的**中性鞍点平衡点**, 显然, 跟踪 Hopf 分支曲线时折 Hopf 分支也可能被找到.

因此, 我们识别了五种分支点, 这些在沿着余维 1 曲线移动时在一般的双参数系统中都可能会遇到. 这种分支的每一种都由两个独立条件所刻画 (因此是余维 2). 在一般的连续–时间系统中不存在其他余维 2 分支.

8.2~8.6 节在最少可能的相空间维数下系统地研究这些分支. 每一个余维 2 分支的分析组织得类似于对余维 1 分支的研究:

(i) 首先, 任何一个具有分支的一般双参数系统都可用光滑的坐标, 参数的可逆变换以及时间重参数化 (如果有必要) 化为依赖于参数的最简单的形式. 在这个推导的过程中某些**非退化条件**和**横截性条件**将加在系统中使得变换成为可能. 这些条件明确指出系统是 "一般" 的.

(ii) 然后, 截断高阶项并叙述所得系统的分支图, 有时称这种系统为 "**近似规范形**" 或 "**模型系统**". 对这个系统有非退化的分支图, 一些额外的一般性条件在这一步就得加进去.

(iii) 最后, 讨论高阶项的影响.

对尖分支、Bautin 分支和 Bogdanov-Tankens 分支, 高阶项并不定性地影响分支图, 对模型系统给出了对应分支的**拓扑规范形**(见第 2 章定义). 注意, 在一般的**纯量系统**或者**平面系统**中, 这些恰好是可能的余维 2 分支. 对剩下的余维 2 分支 (折 Hopf 和 Hopf-Hopf 情形最低相维分别为 $n=3$ 和 $n=4$), 情况更为复杂, 因为高阶项会改变分支图. 如果考虑到这些项, 就要讨论系统的性态哪些特性将保持, 哪些不保持. 在任何情形, 近似规范形的研究提供在分支点附近系统性态的重要信息.

所得结果可利用 Shoshitaishvili 的定理 5.4 推广到 $n$ 维情形. 由这个定理得知, 在临界参数值附近所有出现在不变中心流形 $W^c_\alpha$ 上的 “本质” 性态沿横截方向 (**标准双曲性**) 指数地吸引或者排斥, 得到的图描述了系统在 $W^c_\alpha$ 上限制的分支. 为确定所给系统的分支情况, 对应的临界规范形系数必须计算①. 8.7 节用结合简化/规范化方法推导所有余维 2 分支的临界规范形系数.

## 8.2 尖　分　支

### 8.2.1 规范形的推导

假设系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^1,\ \alpha\in\mathbb{R}^2,\tag{8.11}$$

函数 $f$ 光滑, 在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 对此尖分支条件满足, 即 $\lambda=f_x(0,0)=0$, 以及 $b=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)=0$. 如同在第 3 章对折分支的分析, $f(x,\alpha)$ 在 $x=0$ 关于 $x$ 的 Taylor 展开得

$$f(x,\alpha)=f_0(\alpha)+f_1(\alpha)x+f_2(\alpha)x^2+f_3(\alpha)x^3+O(x^4).$$

由于 $x=0$ 是平衡点. 有 $f_0(0)=f(0,0)=0$. 由尖分支条件得 $f_1(0)=f_x(0,0)=0$, 以及 $f_2(0)=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)=0$.

如第 3 章利用依赖于参数的**坐标平移**

$$\xi=x+\delta(\alpha)\tag{8.12}$$

分析 (8.11) 右端的简化. 将 (8.12) 代入 (8.11) 并考虑到 $f(x,\alpha)$ 的展开式得

$$\begin{aligned}\dot{\xi}=&[f_0(\alpha)-f_1(\alpha)\delta+\delta^2\varphi(\alpha,\delta)]+[f_1(\alpha)-2f_2(\alpha)\delta+\delta^2\phi(\alpha,\delta)]\xi\\&+[f_2(\alpha)-3f_3(\alpha)\delta+\delta^2\psi(\alpha,\delta)]\xi^2+[f_3(\alpha)+\delta\theta(\alpha,\delta)]\xi^3+O(\xi^4),\end{aligned}$$

① 假设系统一般地依赖于参数, 故要求横截性条件满足, 原则上, 这必须分开验证.

其中 $\varphi, \phi, \psi$ 和 $\theta$ 为某光滑函数. 由于 $f_2(0) = 0$, 所以不能用隐函数定理选择函数 $\delta(\alpha)$ 以消去上面方程中 $\xi$ 的线性项 (如第 3 章). 但是, 存在光滑平移函数 $\delta(\alpha)$, $\delta(0) = 0$, 对所有充分小 $||\alpha||$ 可消去方程中的二次项, 只要

(C.1) $f_3(0) = \dfrac{1}{6} f_{xxx}(0,0) \neq 0.$

为看到这一点, 以 $F(\alpha, \delta)$ 记 $\xi^2$ 前面的系数:

$$F(\alpha, \delta) = f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta).$$

有

$$F(0,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \delta}\right|_{(0,0)} = -3f_3(0) \neq 0.$$

因此, 隐函数定理给出光滑纯量函数 $\delta = \delta(\alpha)$ 的 (局部) 存在性和唯一性, 使得 $\delta(0) = 0$ 且对足够小 $||\alpha||$ 有

$$F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0.$$

用上面构造的 $\delta(\alpha)$, $\xi$ 方程中就不包含有二次项. 现在可用

$$\begin{cases} \mu_1(\alpha) = f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta(\alpha) + \delta^2(\alpha)\varphi(\alpha, \delta(\alpha)), \\ \mu_2(\alpha) = f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta(\alpha) + \delta^2(\alpha)\phi(\alpha, \delta(\alpha)) \end{cases} \tag{8.13}$$

引入新参数 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. 这里 $\mu_1$ 是方程中与 $\xi$ 无关的项, $\mu_2$ 是 $\xi$ 前面的系数. 显然, $\mu(0) = 0$. 参数 (8.13) 可定义, 如果映射 $\mu = \mu(\alpha)$ 的 Jacobi 矩阵在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 非奇异:

(C.2) $\det\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \det\begin{pmatrix} f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0} \neq 0.$

于是, 由反函数定理, 局部存在唯一光滑逆函数 $\alpha = \alpha(\mu)$ 满足 $\alpha(0) = 0$. 由此, $\xi$ 方程现在化为

$$\dot{\xi} = \mu_1 + \mu_2\xi + c(\mu)\xi^3 + O(\xi^4),$$

其中 $c(\mu) = f_3(\alpha(\mu)) + \delta(\alpha(\mu))\theta(\alpha(\mu), \delta(\alpha(\mu)))$ 是 $\mu$ 的光滑函数, 且由于 (C.1),

$$c(0) = f_3(0) = \frac{1}{6} f_{xxx}(0,0) \neq 0.$$

最后, 执行线性尺度化

$$\eta = \frac{\xi}{|c(\mu)|},$$

并引入新参数:

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{|c(\mu)|}, \quad \beta_2 = \mu_2.$$

这给出

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta + s\eta^3 + O(\eta^4), \tag{8.14}$$

其中 $s = \text{sign}\ c(0) = \pm 1$, 以及可光滑依赖于 $\beta$ 的项 $O(\eta^4)$.

因此证明了下面引理.

**引理 8.1** 　*假设一维系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

*$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$, 有平衡点 $x = 0$, 尖分支条件满足:*

$$\lambda = f_x(0,0) = 0, \quad b = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) = 0.$$

*假设下面的一般性条件得到满足:*

(C.1) $f_{xxx}(0,0) \neq 0$;

(C.2) $(f_{\alpha_1}f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2}f_{x\alpha_1})(0,0) \neq 0$.

*则存在坐标和参数的光滑可逆变换将系统化为*

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4).$$

□

**注**　(1) 注意, 由 (C.2) 得知, 由

$$\begin{cases} f(x,\alpha) = 0, \\ f_x(x,\alpha) = 0 \end{cases}$$

定义唯一光滑折分支曲线 $\Gamma$, 它在以 $(x,\alpha)$ 为坐标的 $\mathbb{R}^3$ 空间中通过 $(x,\alpha) = (0,0)$ 并局部地由 $x$ 参数化 (见 8.1.1 节).

(2) 给定 $f_x(0,0) = f_{xx}(0,0) = 0$, 非退化条件 (C.1) 和横截条件 (C.2) 一起等价于由

$$(x,\alpha) \mapsto (f(x,\alpha), f_x(x,\alpha), f_{xx}(x,\alpha))$$

定义的映射 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 在点 $(x,\alpha) = (0,0)$ 的正则性 (Jacobi 矩阵的非奇性). ◇

(8.14) 被截去项 $O(\eta^4)$ 的系统称为尖分支的*近似规范形*. 在下面的小节里将研究它的分支图, 并将看到高阶项事实上并不改变它的性态. 这说明称

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3$$

为尖分支的*拓扑规范形*是有道理的.

### 8.2.2 规范形的分支图

考虑对应于 $s = -1$ 的规范形:

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3. \tag{8.15}$$

它的分支图容易分析. 系统 (8.15) 可有 1 到 3 个平衡点. 折分支出现在 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面的分支曲线 $T$ 上, 它是曲线

$$\Gamma : \begin{cases} \beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3 = 0, \\ \beta_2 - 3\eta^2 = 0 \end{cases}$$

在参数平面上的投影. 从这两个方程消去 $\eta$ 得投影

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) :\ 4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 = 0\}.$$

这是一条半立方抛物线(见图 8.3). 曲线 $T$ 有两个分枝 $T_1$ 和 $T_2$, 它们在尖点 $(0, 0)$ 相切. 所得的楔将参数平面分成两个区域. 在楔内部的区域 1 中有系统 (8.15) 的三个平衡点, 两个稳定, 一个不稳定, 在楔的外部的区域 2 存在单个平衡点, 它是稳定的 (图 8.3). 容易验证, 如果在异于原点的任一点穿过 $T_1$ 或 $T_2$, 非退化折分支 (关于参数 $\beta_1$) 发生. 如果从区域 1 到区域 2 穿过曲线 $T_1$, 右边的稳定平衡点与不稳定平衡点相遇而两者都消失. 左边的稳定平衡点与不稳定平衡点在 $T_2$ 同样情况发生. 若从区域 1 内部趋于尖点, 则三个平衡点都合并成 (8.15) 右端的三重根.

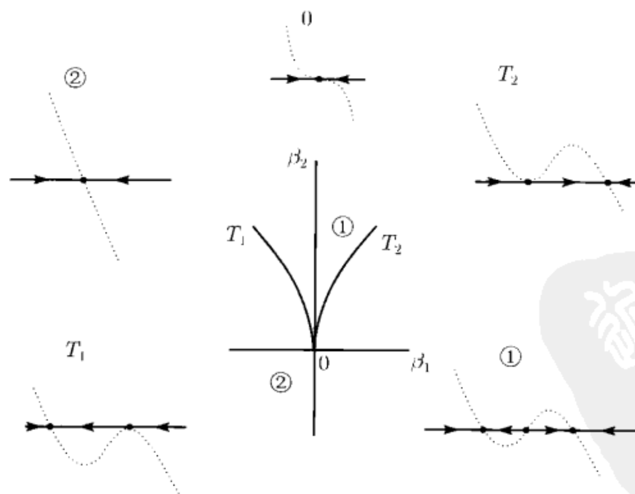



图 8.3　一维尖分支

叙述这种分支的一个有用的方法是在 $\mathbb{R}^3$ 中画出 (8.15) 的平衡点流形

$$\mathcal{M} = \{(\eta, \beta_1, \beta_2) :\ \beta_1 + \beta_2 - \eta^3 = 0\},$$

见图 8.4. $\mathcal{M}$ 在 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面上的标准投影沿着 $\Gamma$ 除了原点有折型奇异性, 在原点显示*尖点奇异性*. 注意, 曲线 $\Gamma$ 到处光滑且在尖点没有几何奇异性. 投影使得折参数边界不光滑.

尖分支导致出现的现象是大家知道的*滞后*(hysteresis) 现象. 更确切地, 发生在分枝 $T_1$ 或 $T_2$ 上的突变 "跳跃" 到不同稳定平衡点 (起因于参数变化时折分支使得追踪的稳定平衡点消失) 是发生在分枝 $T_1$ 还是 $T_2$ 上, 取决于被追踪的平衡点原先属于 $\mathcal{M}$ 的上面一片还是在 $\mathcal{M}$ 的下面一片 (见图 8.5). 如果在参数平面围绕原点一圈, 将穿过楔两次, 跳跃将在 $T$ 的每个分枝上出现.

情形 $s = 1$ 可类似处理, 或者用代换 $t \to -t$, $\beta_1 \to -\beta_1$, $\beta_3 \to -\beta_2$ 将它化为已经考虑过的情形. 在这情形, 截断系统典型地有一个不稳定平衡点或者一个稳定平衡点和两个不稳定平衡点, 通过折分支时它们可成双地相遇而消失.

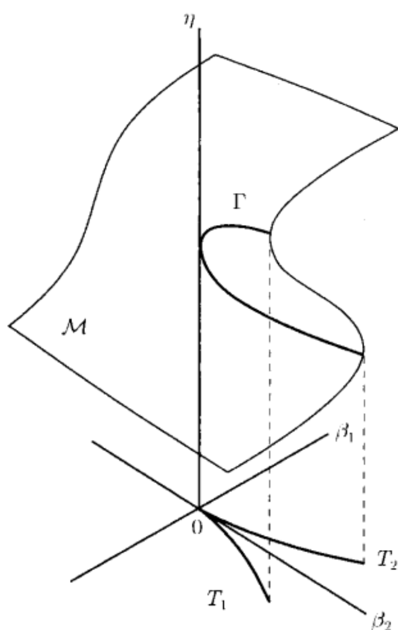



图 8.4　尖分支附近的平衡点流形

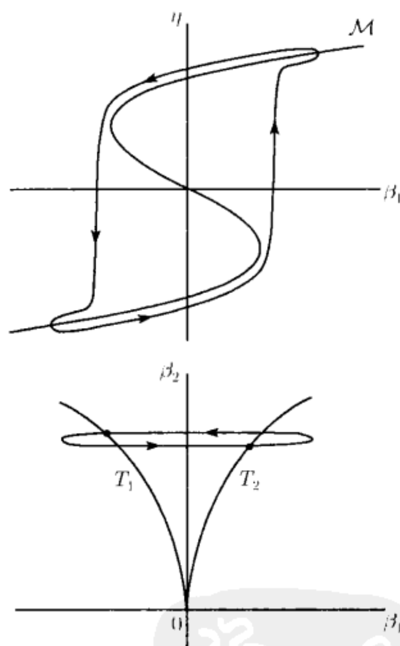



图 8.5　尖分支附近的滞后

### 8.2.3　高阶项的影响

下面的引理实际上指出 (8.14) 中的高阶项是无关紧要的.

**引理 8.2**　*系统*

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$

*在原点附近拓扑等价于系统*

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3. \qquad \square$$

这个引理的一个初等证明在这一章练习 2 的提示中有概要说明. 现在叙述一条一般定理来结束对尖分支的分析.

**定理 8.1**(尖分支的拓扑规范形)　任何一个一般的在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$ 且在平衡点有尖分支的双参数纯量系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

在原点附近是局部拓扑等价于下面规范形之一:

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3. \qquad \square$$

如果 $n$ 维系统有尖分支, 上面的定理应该被应用于中心流形上的方程 (见第 5 章). 回忆 $c(0)$(因此规范形中的符号) 可以用公式 (5.28) 和 (5.23) 计算. 在 8.7 节给出一个 $c(0)$ 的另一个推导. Shoshitaishvili 定理对这个情形给出下面的拓扑规范形:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3, \\ \dot{\zeta}_- = -\zeta_-, \\ \dot{\zeta}_+ = \zeta_+, \end{cases}$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\zeta_\pm \in \mathbb{R}^{n_\pm}$, $n_-$ 和 $n_+$ 是临界平衡点具 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ 和 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ 的特征值个数. 图 8.6 显示 $n = 2$, $c(0) < 0$, 且在尖点第二个特征值是负 ($n_-$=1, $n_+$=0) 时的分支图.

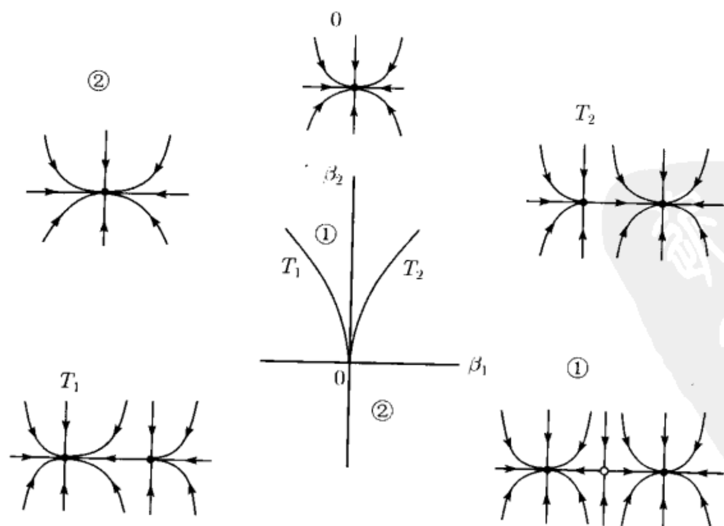



图 8.6　平面上的尖分支

# 8.3　Bautin (广义 Hopf) 分支

## 8.3.1　规范形的推导

假设系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{8.16}$$

其中函数 $f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 满足 Bautin 分支条件. 更确切地说, 平衡点有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \omega_0 > 0$, 且第一个 Lyapunov 系数为零, $l_1 = 0$. 由于 $\lambda = 0$ 不是特征值, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 当参数变化时平衡点一般会移动但仍保持孤立并接近于原点. 如同对 Andronov-Hopf 分支的分析, 对所有足够小 $\|\alpha\|$ 的 $\alpha$, 总可以利用依赖于参数的坐标平移将平衡点移动到 $x = 0$, 从现在起, 假设 $f(0, \alpha) \equiv 0$.

由引理 3.3, 可将 (8.16) 写为复数形式

$$\dot{z} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad z \in \mathbb{C}^1, \tag{8.17}$$

这里 $\mu, \omega$ 和 $g$ 是它们变量的光滑函数, $\mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0$, 形式地

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geqslant 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

其中函数 $g_{kl}(\alpha)$ 光滑.

**引理 8.3** (Bautin 分支的 Poincaré 规范形)　*方程*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \sum_{2 \leqslant k+l \leqslant 5} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + O(|z|^6), \tag{8.18}$$

*其中 $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha),\ \mu(0) = 0,\ \omega(0) = \omega_0 > 0$, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 可经可逆的光滑依赖于参数的复坐标变换:*

$$z = w + \sum_{2 \leqslant k+l \leqslant 5} \frac{1}{k!l!} h_{kl}(\alpha) w^k \bar{w}^l, \quad h_{21}(\alpha) = h_{32}(\alpha) = 0,$$

*化为方程*

$$\dot{w} = \lambda(\alpha)w + c_1(\alpha)w|w|^2 + c_2(\alpha)w|w|^4 + O(|w|^6). \tag{8.19}$$

□

这条引理可用与引理 3.6 的相同方法证明. 由引理 3.6, 可以假定 (8.18) 中的所有二次项和非共振三次项都已经消去: $g_{20} = g_{11} = g_{02} = g_{30} = g_{12} = g_{21} = 0$,

以及 $\frac{1}{2}g_{21} = c_1$. 于是, 适当选取 $h_{ij}$, $i+j=4$, 可以消去 (8.18) 中所有四次项, 当改变五次和更高次项系数时没有去触及三次共振项的系数 $c_1(\alpha)$. 最后, 可以 “移去”(8.19) 中除了共振项以外的所有五次项. 这些计算可作为符号操作很好的练习.

系数 $c_1(\alpha)$ 和 $c_2(\alpha)$ 是复数, 用时间重参数化可使它们同时成为实数.

**引理 8.4** *系统 (8.19) 局部轨道等价于系统*

$$\dot{w} = (\nu(\alpha)+\mathrm{i})w + l_1(\alpha)w|w|^2 + l_2(\alpha)w|w|^4 + O(|w|^6), \tag{8.20}$$

*其中 $\nu(\alpha)$, $l_1(\alpha)$ 以及 $l_2(\alpha)$ 是实函数, $\nu(0)=0$.*

**证明** 首先, 引入新时间 $\tau = \omega(\alpha)t$. 由于 $\omega(0)=\omega_0>0$, 对所有充分小 $\|\alpha\|$ 时间方向保持. 这给出

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = (\nu(\alpha)+\mathrm{i})w + d_1(\alpha)w|w|^2 + d_2(\alpha)w|w|^4 + O(|w|^5), \tag{8.21}$$

其中

$$\nu(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\alpha) = \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_2(\alpha) = \frac{c_2(\alpha)}{\omega(\alpha)}.$$

注意, $\nu_1, d_1$ 和 $d_2$ 光滑, 而 $d_{1,2}$ 仍是复值.

接下来, 沿着 (8.21) 的轨道引入新时间 $\theta$ 使得

$$\mathrm{d}\tau = (1 + e_1(\alpha)|w|^2 + e_2(\alpha)|w|^4)\mathrm{d}\theta,$$

以改变时间参数化, 其中实函数 $e_{1,2}$ 还得定义. 借助于 $\theta$, (8.21) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = (\nu+\mathrm{i})w + ((\nu+\mathrm{i})e_1 + d_1)w|w|^2 + ((\nu+\mathrm{i})e_2 + e_1d_1 + d_2)w|w|^4 + O(|w|^5).$$

因此, 令

$$e_1(\alpha) = -\mathrm{Im}\ d_1(\alpha), \quad e_2(\alpha) = -\mathrm{Im}\ d_2(\alpha) + [\mathrm{Im}\ d_1(\alpha)]^2$$

得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = (\nu(\alpha)+\mathrm{i})w + l_1(\alpha)w|w|^2 + l_2(\alpha)w|w|^4 + O(|w|^5),$$

其中

$$l_1(\alpha) = \mathrm{Re}\ d_1(\alpha) - \nu(\alpha)\mathrm{Im}\ d_1(\alpha) = \frac{\mathrm{Re}\ c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} - \mu(\alpha)\frac{\mathrm{Im}\ c_1(\alpha)}{\omega^2(\alpha)} \tag{8.22}$$

是第 3 章引入的第一个 Lyapunov 系数, 以及

$$l_2(\alpha) = \mathrm{Re}\ d_2(\alpha) - \mathrm{Re}\ d_1(\alpha)\ \mathrm{Im}\ d_1(\alpha) + \nu(\alpha)\ ([\mathrm{Im}\ d_1(\alpha)]^2 - \mathrm{Im}\ d_2(\alpha)).$$

函数 $\nu(\alpha)$, $l_1(\alpha)$ 和 $l_2(\alpha)$ 光滑且是实值. □

**定义 8.1**　实函数 $l_2(\alpha)$ 称为第二个 Lyapunov 系数.

在 (8.22) 中用的 $c_1 = c_1(\alpha)$ 可以用公式 (见第 3 章)

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2} + \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda+\bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda-\bar{\lambda})}$$

计算, 其中 $\lambda = \lambda(\alpha)$, $g_{kl} = g_{kl}(\alpha)$.

在 Bautin 分支点, 这里

$$\mu(0) = 0, \quad l_1(0) = \frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0}\left(\operatorname{Re} g_{21}(0) - \frac{1}{\omega_0}\operatorname{Im}(g_{20}(0)g_{11}(0))\right) = 0,$$

得

$$l_2(0) = \frac{\operatorname{Re} c_2(0)}{\omega_0}.$$

下面的公式给出 $l_2(0)$ 在 Bautin 点的较紧凑的表达式

$$\begin{aligned}
12l_2(0) =& \frac{1}{\omega_0}\operatorname{Re} g_{32} \\
&+ \frac{1}{\omega_0^2}\operatorname{Im}\left[g_{20}\bar{g}_{31} - g_{11}(4g_{31}+3\bar{g}_{22}) - \frac{1}{3}g_{02}(g_{40}+\bar{g}_{13}) - g_{30}g_{12}\right] \\
&+ \frac{1}{\omega_0^3}\{\operatorname{Re}\left[g_{20}(\bar{g}_{11}(3g_{12}-\bar{g}_{30}) + g_{02}\left(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3}g_{30}\right) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}g_{03}) \right.\\
&\left.+ g_{11}(\bar{g}_{02}\left(\frac{5}{3}\bar{g}_{30}+3g_{12}\right) + \frac{1}{3}g_{02}\bar{g}_{03} - 4g_{11}g_{30})\right] \\
&+ 3\operatorname{Im}(g_{20}g_{11})\operatorname{Im} g_{21}\} \\
&+ \frac{1}{\omega_0^4}\{\operatorname{Im}\left[g_{11}\bar{g}_{02}(\bar{g}_{20}^2 - 3\bar{g}_{20}g_{11} - 4g_{11}^2)\right] \\
&+ \operatorname{Im}(g_{20}g_{11})[3\operatorname{Re}(g_{20}g_{11}) - 2|g_{02}|^2\},
\end{aligned} \tag{8.23}$$

其中, 所有的 $g_{kl}$ 都在 $\alpha = 0$ 计算. 在推导这个公式时要考虑到方程 $l_1(0) = 0\Big($ 或者, 等价地, $\operatorname{Re} g_{21} = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{Im}(g_{20}g_{11})\Big)$.

假设在 Bautin 点

(B.1) $l_2(0) \neq 0$.

点 $\alpha = 0$ 的邻域可由两个新参数参数化, 第一个的零点轨迹对应于 Hopf 分支条件, 在给定的 Bautin 点两者同时为零. 显然, 可以把 $\nu(\alpha)$ 视为第一个参数, 而把 $l_1(\alpha)$ 视作为第二个参数. 注意, 它们两个对所有充分小 $\|\alpha\|$ 都有定义且在 $\alpha = 0$ 为零. 因此, 用映射

$$\begin{cases} \mu_1 = \nu(\alpha), \\ \mu_2 = l_1(\alpha) \end{cases} \tag{8.24}$$

引入新参数 $(\mu_1,\mu_2)$, 假设它在 $\alpha=0$ 正则:

$$\text{(B.2)}\qquad \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\nu}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\nu}{\partial\alpha_2}\\ \dfrac{\partial l_1}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial l_1}{\partial\alpha_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0}=\frac{1}{\omega_0}\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\mu}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\mu}{\partial\alpha_2}\\ \dfrac{\partial l_1}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial l_1}{\partial\alpha_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0}\neq 0.$$

由于 $\omega_0\neq 0$, 这个条件可容易地用 $\mu(\alpha)$, $\mathrm{Re}\ c_1(\alpha)$ 和 $\mathrm{Im}\ c_1(\alpha)$ 表达. 这等价于映射 (8.24) 的局部光滑可逆性, 因此可用 $\mu$ 来表达 $\alpha$, 由此得方程

$$\dot{w}=(\mu_1+\mathrm{i})w+\mu_2 w|w|^2+L_2(\mu)w|w|^4+O(|w|^6),$$

由于 (B.1), 其中 $L_2(\mu)=l_2(\alpha(\mu))$ 是满足 $L_2(0)=l_2(0)\neq 0$ 的 $\mu$ 的光滑函数. 于是重尺度化

$$w=\sqrt[4]{|L_2(\mu)|}u,\quad u\in\mathbb{C}^1,$$

以及定义参数

$$\begin{cases}\beta_1=\mu_1,\\ \beta_2=\sqrt{|L_2(\mu)|}\ \mu_2,\end{cases}$$

得规范形

$$\dot{u}=(\beta+\mathrm{i})u+\beta_2 u|u|^2+su|u|^4+O(|u|^6).$$

其中 $s=\mathrm{sign}\ l_2(0)=\pm 1$, 而 $l_2(0)$ 是由 (8.23) 所给.

总结所得结果, 可叙述为下面定理.

**定理 8.2**　假设平面系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}^2,$$

$f$ 光滑, 有平衡点 $x=0$, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 具特征值

$$\lambda_{1,2}(\alpha)=\mu(\alpha)\pm\mathrm{i}\omega(\alpha),$$

其中 $\omega(0)>0$. 对 $\alpha=0$, 设 Bautin 分支条件成立:

$$\mu(0)=0,\quad l_1(0)=0,$$

其中 $l_1(\alpha)$ 是第一个 Lyapunov 系数. 假设下面的一般性条件满足:

(B.1) $l_2(0)\neq 0$, 这里 $l_2(0)$ 是由 (8.23) 给出的第二个 Lyapunov 系数;

(B.2) 映射 $\alpha\mapsto(\mu(\alpha),l_1(\alpha))^{\mathrm{T}}$ 在 $\alpha=0$ 正则.

则由所引入的复变量, 应用光滑依赖于参数的可逆坐标变换, 以及执行光滑的参数和时间变换, 系统可简化为复数形式

$$\dot{z}=(\beta_1+\mathrm{i})z+\beta_2 z|z|^2+sz|z|^4+O(|z|^6),\tag{8.25}$$

这里 $s = \text{sign}\ l_2(0) = \pm 1$. □

用与对尖分支分析的同样方法进行讨论. 首先, 将研究 (8.25) 去掉 $O(|z|^6)$ 项所得的近似规范形. 如将看到的, 这个近似规范形也是 Bautin 分支的拓扑规范形.

### 8.3.2　规范形的分支图

令 $s = -1$, 并把没有 $O(|z|^6)$ 项的系统 (8.25) 用极坐标 $(\rho, \varphi)$, $z = \rho e^{i\varphi}$ 写为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{8.26}$$

(8.26) 中的两个方程是互相独立的. 第二个方程描述单位角速度的旋转. 第一个方程的平凡平衡点 $\rho = 0$ 对应于截断系统的仅有的平衡点, $z = 0$. (8.26) 第一个方程的正平衡点满足

$$\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4 = 0, \tag{8.27}$$

它刻画圆形极限环. 方程 (8.27) 可有零个、一个或两个正解 (环). 这些解沿着直线

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

从平凡点分枝并在半抛物线

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0,\ \beta_2 > 0\}$$

相遇而消失. 环的稳定性可从 (8.26) 的第一个方程明显地察觉. (8.26) 的分支图描绘在图 8.7. 直线 $H$ 对应于 Hopf 分支: 沿着这条直线平衡点有特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i$. $\beta_1 < 0$ 平衡点稳定, $\beta_1 > 0$ 时平衡点不稳定. 第一个 Lyapunov 系数 $l_1(\beta) = \beta_2$. 因此, Bautin 分支点 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 分 $H$ 为两个分枝: $H_-$ 和 $H_+$, 它们分别对应 Hopf 分支的负 Lyapunov 系数和正 Lyapunov 系数 (即 “软” 和 “硬”). 若从左到右穿过 $H_-$, 则从平衡点分支出稳定极限环, 若相反方向穿过 $H_+$, 则出现不稳定极限环. 这些环在对应于环的非退化折分支 (第 4, 5 章研究过) 的曲线 $T$ 上相遇并消失. 沿着这条曲线系统有乘子为 1 的临界极限环以及 Poincaré 映射的非零规范形系数 $a$. 这些曲线将参数平面划分成三个区域 (见图 8.7).

为了完全弄清楚分支图, 在参数平面上绕着 Bautin 点逆时针方向漫游考察, 从区域 1 中的点开始, 在该区域系统有单个稳定平衡点而没有环. 从区域 1 到区域 2 穿过 Hopf 分支边界 $H_-$, 出现唯一稳定极限环, 当进入区域 3 时它依然存在. 穿过 Hopf 边界 $H_+$, 当平衡点恢复它的稳定性时, 产生一个额外的在第一个环内部的不稳定极限环. 两个具相反稳定性的环在区域 3 中存在并在曲线 $T$ 上通过折分支时消失而留下单个稳定平衡点, 这就走完了一圈.

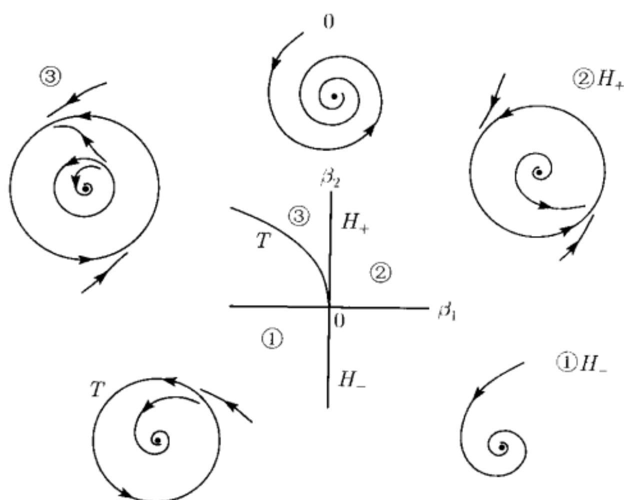



图 8.7　$s=-1$ 时的 Bautin 分支

(8.25) 中 $s=1$ 的情形可类似地处理, 或者通过变换 $(z,\beta,t)\mapsto(\bar{z},-\beta,-t)$ 把它化为已经研究过的情形.

### 8.3.3　高阶项的影响

**引理 8.5**　*系统*

$$\dot{z}=(\beta_1+\mathrm{i})z+\beta_2 z|z|^2\pm\ z|z|^4+O(|z|^6),$$

*在原点附近局部拓扑等价于系统*

$$\dot{z}=(\beta_1+\mathrm{i})z+\beta_2 z|z|^2\pm\ z|z|^4.$$ □

引理的证明可以从推导第一个系统的 Poincaré 映射的 Taylor 展开式并分析它的不动点得到. 于是得知低于 6 次的项与 $O(|z|^6)$ 无关, 因此与第二个系统重合. 这意味着两个映射对相应的参数值有相同个数的不动点, 且当参数变化时这些不动点在原点附近产生类似的分支. 于是, 可以构造一个同胚 (实际上是一个微分同胚) 使得在原点附近系统的参数图恒同, 且对所有参数值同胚将第一个系统的相图映为第二个系统的相图 (如第 3 章的附录). 因此, 可以用下面所述的定理完成对 Bautin 分支的分析.

**定理 8.3**(Bautin 分支的拓扑规范形)　*任何一个一般双参数平面系统*

$$\dot{x}=f(x,\alpha)$$

*在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 若它有 Bautin 分支, 则此系统在原点附近局部拓扑等价*

于下面的复规范形之一：

$$\dot{z} = (\beta_1 + \mathrm{i})z + \beta_2 z|z|^2 \pm \ z|z|^4. \qquad \square$$

这个定理意味着所述的规范形捕捉到具有 Bautin 分支且满足一般性条件 (B.1) 和 (B.2) 的任何一个二维系统的拓扑. 特别, 虽然这种系统中的极限环可能不是漂亮的圆周, 但我们还是可以期望它们两个对附近的参数值存在. 此外, 它们沿着从余维 2 点出发的曲线相遇并消失.

Bautin 分支是说明从平衡点余维 2 分支附近出现极限环分支的第一个例子. 在这种情形, 用纯粹的局部分析 (在 Hopf 点计算 Lyapunov 系数 $l_1$ 和 $l_2$) 可以证明对附近的参数值极限环的折分支的存在性.

Bautin 分支的高维情形可以用中心流形简化到已经研究过的平面情形来处理. 于是, (8.16) 应该考虑为中心流形上的方程. Shoshitaishvili 定理给出 $\mathbb{R}^n$ 中 Bautin 分支的拓扑规范形：

$$\begin{cases} z \ = (\beta_1 + \mathrm{i})z + \beta_2 z|z|^2 + sz|z|^4, \\ \dot{\zeta}_- = -\zeta_-, \\ \dot{\zeta}_+ = \zeta_+, \end{cases}$$

其中 $s = \operatorname{sign} l_2(0) = \pm 1$, $z \in \mathbb{C}^1$, $\zeta_\pm \in \mathbb{R}^{n_\pm}$, $n_-$ 和 $n_+$ 分别是临界平衡点具 $\operatorname{Re}\lambda < 0$ 和 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 的特征值个数, 故 $n_- + n_+ + 2 = n$.

在 8.7 节的 $n$ 维情形回到对 $l_2(0)$ 的计算.

## 8.4　Bogdanov-Takens (零–零) 分支

### 8.4.1　规范形的推导

考虑平面系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{8.28}$$

$f$ 光滑. 假设 (8.28) 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 具两个零特征值 (Bogdanov-Takens 条件), $\lambda_{1,2}(0) = 0$.

第 0 步 (预备变换). 在 $\alpha = 0$, 可将 (8.28) 写为形式

$$\dot{x} = A_0 x + F(x), \tag{8.29}$$

其中 $A_0 = f_x(0,0)$, 以及 $F(x) = f(x,0) - A_0 x$ 是光滑函数, $F(x) = O(\|x\|^2)$. 由分支条件得

$$\Delta(0) = \det A_0 = 0, \quad \sigma(0) = \operatorname{tr} A_0 = 0.$$

假设

(BT.0) $A_0 \neq 0$,

这就是说, $A_0$ 至少有一个非零元素. 于是, 存在两个实线性无关向量 $q_{0,1} \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$A_0 q_0 = 0, \quad A_0 q_1 = q_0. \tag{8.30}$$

向量 $q_0$ 是 $A_0$ 对应于特征值 0 的特征向量, $q_1$ 是 $A_0$ 对应于这个特征值的广义特征向量. 此外, 存在转置矩阵 $A_0^{\mathrm{T}}$ 相似的伴随特征向量$p_{1,2} \in \mathbb{R}^2$:

$$A_0^{\mathrm{T}} p_1 = 0, \quad A_0^{\mathrm{T}} p_0 = p_1. \tag{8.31}$$

向量 $q_1$ 和 $p_0$ 不是唯一确定的, 即使 $q_0$ 和 $p_1$ 是固定的①. 不过, 总可以选择四个满足 (8.30) 和 (8.31) 的向量使得

$$\langle q_0, p_0 \rangle = \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \tag{8.32}$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的标准数量积 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, 且

$$\langle q_1, p_0 \rangle = \langle q_0, p_1 \rangle = 0, \tag{8.33}$$

若把 $q_0$ 和 $q_1$ 选作为基, 则任一向量 $x \in \mathbb{R}^2$ 可唯一表示为

$$x = y_1 q_0 + y_2 q_1,$$

对某实数 $y_{1,2} \in \mathbb{R}^1$. 考虑到 (8.32) 和 (8.33), 我们找到新坐标 $(y_1, y_2)$:

$$\begin{cases} y_1 = \langle p_0, x \rangle, \\ y_2 = \langle p_1, x \rangle. \end{cases} \tag{8.34}$$

在坐标系 $(y_1, y_2)$ 下, 系统 (8.29) 取形式

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle p_0, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}. \tag{8.35}$$

注意, 这是 Jacobi 矩阵的特殊形式, 它是二阶零 Jordan 块.

对所有小 $\|\alpha\|$ 的 $\alpha$ 用相同坐标 $(y_1, y_2)$. 在这个坐标下系统 (8.28) 化为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p_0, f(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha) \rangle \\ \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha) \rangle \end{pmatrix}, \tag{8.36}$$

① 例如, 若 $q_1$ 满足 (8.30) 的第二个方程, 则 $q_1' = q_1 + \gamma q_0$ 也满足这个方程, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ 为任一实数.

且对 $\alpha=0$ 它化为 (8.35). 将 (8.36) 的右端在 $y=0$ 关于 $y$ 展成 Taylor 级数得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 \\ \qquad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(y,\alpha), \\ \dot{y}_2 = b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y_2 \\ \qquad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)y_2^2 + P_2(y,\alpha), \end{cases} \tag{8.37}$$

其中 $a_{kl}(\alpha), b_{kl}(\alpha)$ 和 $P_{1,2}(y,\alpha)=O(\|y\|^3)$ 是它们变量的光滑函数. 我们有

$$a_{00}(0)=a_{10}(0)=a_{01}(0)=b_{00}(0)=b_{10}(0)=b_{01}(0)=0.$$

函数 $a_{kl}(\alpha)$ 和 $b_{kl}(\alpha)$ 可借助 (8.28) 的右端 $f(x,\alpha)$ 和向量 $v_{0,1}, w_{0,1}$ 表达. 例如,

$$\begin{aligned} a_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle p_0, f(y_1q_0+y_2q_1,\alpha)\rangle\Big|_{y=0}, \\ b_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\langle p_1, f(y_1q_0+y_2q_1,\alpha)\rangle\Big|_{y=0}, \\ b_{11}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 y_2}\langle p_1, f(y_1q_0+y_2q_1,\alpha)\rangle\Big|_{y=0}. \end{aligned}$$

现在开始用光滑的逆变换 (光滑地依赖于参数) 和时间重参数化将 (8.37) 化为较简单的形式. 无疑我们将要引入新的参数.

第一步 (化为非线性振子). 记 (8.37) 的第一个方程的右端为 $u_2$, 并把 $y_1$ 改名为 $u_1$, 引入新变量 $(u_1, u_2)$:

$$\begin{cases} u_1 = y_1, \\ u_2 = y_2 + a_{00} + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + \frac{1}{2}a_{20}y_1^2 + a_{11}y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}y_2^2 + P_1(y,\cdot), \end{cases}$$

这个变换对小 $\|\alpha\|$ 在 $y=0$ 的某邻域内可逆且光滑地依赖于参数. 如果 $\alpha=0$, 原点是这个映射的不动点. 这个变换将 (8.37) 变成

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = g_{00}(\alpha) + g_{10}(\alpha)u_1 + g_{01}(\alpha)u_2 \\ \qquad + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)u_1^2 + g_{11}(\alpha)u_1u_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)u_2^2 + Q(u,\alpha), \end{cases} \tag{8.38}$$

其中 $g_{kl}(\alpha)$, $g_{00}(0)=g_{10}(0)=g_{10}(0)=g_{01}(0)=0$ 为某些光滑函数以及 $Q(u,\alpha)=O(\|u\|^3)$. 可以验证

$$g_{20}(0)=b_{20}(0),$$

$$g_{11}(0)=a_{20}(0)+b_{11}(0),$$
$$g_{02}(0)=b_{02}(0)+2a_{11}(0). \tag{8.39}$$

进一步, 有

$$g_{00}(\alpha)=b_{00}(\alpha)+\cdots,$$
$$g_{10}(\alpha)=b_{10}(\alpha)+a_{11}(\alpha)b_{00}(\alpha)-b_{11}(\alpha)a_{00}(\alpha)+\cdots,$$
$$g_{01}(\alpha)=b_{01}(\alpha)+a_{10}(\alpha)+a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha)-(a_{11}(\alpha)+b_{02}(\alpha))a_{00}(\alpha)+\cdots, \tag{8.40}$$

这里省略号表示包含至少某 $a_{kl}$ ,$b_{kl}$ 的一个乘积的所有项, 其中 $k+l\leqslant 1$ $(i+j\leqslant 1)$. 由于对所有 $k+l\leqslant 1$ , $a_{kl}(\alpha)$ ,$b_{kl}(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 为零, 所显示的项只需要计算 $g_{00}(\alpha)$, $g_{10}(\alpha)$ 和 $g_{01}(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 关于 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 的一阶偏导数.

注意, 系统 (8.38) 可以写为关于 $w=u_1$ 的单个二阶微分方程:

$$\ddot{w}=G(w,\alpha)+\dot{w}H(w,\alpha)+\dot{w}^2Z(w,\dot{w},\alpha),$$

它提供了非线性振子运动的一般形式.

第二步 (依赖于参数的平移). 依赖于参数的坐标沿 $u_1$ 方向的平移

$$\begin{cases} u_1=v_1+\delta(\alpha), \\ u_2=v_2 \end{cases}$$

将系统 (8.38) 变成

$$\begin{cases} \dot{v}_1=v_2, \\ \dot{v}_2=g_{00}+g_{10}\delta+O(\delta^2)+(g_{10}+g_{20}\delta+O(\delta^2))v_1+(g_{01}+g_{11}\delta+O(\delta^2))v_2 \\ \qquad +\dfrac{1}{2}(g_{20}+O(\delta^2))v_1^2+(g_{11}+O(\delta))v_1v_2+\dfrac{1}{2}(g_{02}+O(\delta))v_2^2+O(\|v\|^3). \end{cases}$$

假设

(BT.1) $g_{11}(0)=a_{20}(0)+b_{11}(0)\neq 0$.

于是, 由隐函数定理的标准叙述得光滑函数

$$\delta=\delta(\alpha)\approx-\frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(0)}$$

的局部存在性, 消去 $v_2$ 方程中与 $v_2$ 成比例的项得系统

$$\begin{cases} \dot{v}_1=v_2, \\ \dot{v}_2=h_{00}(\alpha)+h_{10}(\alpha)v_1+\dfrac{1}{2}h_{20}(\alpha)v_1^2+h_{11}(\alpha)v_1v_2+\dfrac{1}{2}h_{02}(\alpha)v_2^2+R(v,\alpha), \end{cases} \tag{8.41}$$

其中 $h_{kl}(\alpha)$ 和 $R(v,\alpha)=O(\|v\|^3)$ 光滑. 于是求得

$$h_{00}(\alpha)=g_{00}(\alpha)+\cdots,\quad h_{10}(\alpha)=g_{10}(\alpha)-\frac{g_{20}(0)}{g_{11}(0)}g_{01}(\alpha)+\cdots, \tag{8.42}$$

这里又一次只需保持在 $\alpha=0$ 关于 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 的一阶偏导数的计算 (见 (8.40)). 显然, $h_{00}(0)=h_{10}(0)=0$. 我们将看到, 只有 $h_{kl}(\alpha)$, $k+l=2$ 在 $\alpha=0$ 的值是有关的. 这些项为

$$h_{20}(0)=g_{20}(0),\quad h_{11}(0)=g_{11}(0),\quad h_{02}(0)=g_{02}(0), \tag{8.43}$$

其中 $g_{kl}(0)$, $k+l=2$ 由 (8.39) 确定.

第三步 (时间重参数化以及第二次化为非线性振子). 由方程

$$\mathrm{d}t=(1+\theta v_1)\mathrm{d}\tau$$

引入新时间 $\tau$, 其中 $\theta=\theta(\alpha)$ 是后面待定的光滑函数. 时间方向对小 $\|\alpha\|$ 在原点附近保持. 假设现在变量上面的点表示关于 $\tau$ 的导数, 于是有

$$\begin{cases}\dot v_1=v_2+\theta v_1v_2,\\ \dot v_2=h_{00}+(h_{10}+h_{00}\theta)v_1+\dfrac{1}{2}(h_{20}+2h_{10}\theta)v_1^2+h_{11}v_1v_2+\dfrac{1}{2}h_{02}v_2^2+O(\|v\|^3).\end{cases}$$

上面的系统类似于 (8.37) 的形式, 这似乎有点灰心. 但是, 可以用类似于第一步的坐标变换

$$\begin{cases}\xi_1=v_1,\\ \xi_2=v_2+\theta v_1v_2\end{cases}$$

再次将它化为非线性振子. 对所有的 $\theta$, 它将原点映为自己. 系统在 $(\xi_1,\xi_2)$ 坐标下取形式

$$\begin{cases}\dot\xi_1=\xi_2,\\ \dot\xi_2=f_{00}(\alpha)+f_{10}(\alpha)\xi_1+\dfrac{1}{2}f_{20}(\alpha)\xi_1^2+f_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2+\dfrac{1}{2}f_{02}(\alpha)\xi_2^2+O(\|\xi\|^3).\end{cases} \tag{8.44}$$

其中

$$f_{00}(\alpha)=h_{00}(\alpha),\quad f_{10}(\alpha)=h_{10}(\alpha)+h_{00}(\alpha)\theta(\alpha),$$

以及

$$\begin{aligned}f_{20}(\alpha)&=h_{20}(\alpha)+2h_{10}(\alpha)\theta(\alpha),\\ f_{11}(\alpha)&=h_{11}(\alpha),\\ f_{02}(\alpha)&=h_{02}(\alpha)+2\theta(\alpha).\end{aligned}$$

现在可取

$$\theta(\alpha) = -\frac{h_{02}(\alpha)}{2}$$

以消去 $\xi_2^2$ 项, 这样将时间重参数化. 由此, 有

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \mu_1(\alpha) + \mu_2(\alpha)\xi_1 + A(\alpha)\xi_1^2 + B(\alpha)\xi_1\xi_2 + O(||\xi||^3), \end{cases} \tag{8.45}$$

其中

$$\mu_1(\alpha) = h_{00}(\alpha), \quad \mu_2(\alpha) = h_{10}(\alpha) - \frac{1}{2}h_{00}(\alpha)h_{02}(\alpha) \tag{8.46}$$

以及

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}(h_{20}(\alpha) - h_{10}(\alpha)h_{02}(\alpha)), \quad B(\alpha) = h_{11}(\alpha). \tag{8.47}$$

第四步 (最后尺度化与设置新参数). 引入新时间 (仍记为 $t$)

$$t = \left|\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)}\right|\tau.$$

鉴于 (BT.1), $B(0) = h_{11}(0) = g_{11}(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$, 若进一步假设

(BT.2) $2A(0) = h_{20}(0) = g_{20}(0) = b_{20}(0) \neq 0$,

则上面的时间尺度化可定义. 同时, 引入新变量进行尺度化

$$\eta_1 = \frac{A(\alpha)}{B^2(\alpha)}\xi_1, \quad \eta_2 = \text{sign}\ \left(\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)}\right)\frac{A^2(\alpha)}{B^3(\alpha)}\xi_2.$$

注意, 由于 $A(0) \neq 0$ 和 $B(0) \neq 0$, 上面分母在 $\alpha = 0$ 不为零. 在坐标 $(\eta_1, \eta_2)$ 下, 系统 (8.45) 取形式

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2 + O(||\eta||^3), \end{cases} \tag{8.48}$$

其中

$$s = \text{sign}\ \left(\frac{B(0)}{A(0)}\right) = \text{sign}\ \left(\frac{a_{20}(0) + b_{11}(0)}{b_{20}(0)}\right) = \pm 1,$$

以及

$$\beta_1(\alpha) = \frac{B^4(\alpha)}{A^3(\alpha)}\mu_1(\alpha), \quad \beta_2(\alpha) = \frac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)}\mu_2(\alpha)\ .$$

显然, $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$. 为了在原点附近定义可逆的光滑参数变换, 必须假定映射 $\alpha \mapsto \beta$ 在 $\alpha = 0$ 的正则性:

(BT.3) $\det \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0} \neq 0.$

这个条件等价于映射 $\alpha \mapsto \mu$ 在 $\alpha = 0$ 的正则性, 且如果考虑到公式 (8.46), (8.42) 和 (8.40), 它可更清晰地表示. 事实上, 下面的引理可直接计算证明.

**引理 8.6** 设系统 (8.37) 写为

$$\dot{y} = P(y, \alpha), \quad y \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

且非退化条件 (BT.1) 和 (BT.2) 满足. 则横截性条件 (BT.3) 等价于映射

$$(y, \alpha) \ \mapsto \ \left(P(y, \alpha),\ \mathrm{tr}\left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y}\right),\ \det\left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y}\right)\right)$$

在点 $(y, \alpha) = (0, 0)$ 的正则性. □

引理中的映射是将 $\mathbb{R}^4$ 映到 $\mathbb{R}^4$, 因此它的正则性意味着它的 Jacobi 矩阵的行列式不为零. 由于式 (8.34) 定义的线性坐标变换 $x \mapsto y$ 是正则的, 所以可以仅仅验证映射

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha),\ \mathrm{tr}\left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right),\ \det\left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right)\right)$$

在 $(x, \alpha) = (0, 0)$ 的正则性.

因此, 在这一小节我们证明了下面的定理.

**定理 8.4** 假设平面系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 具重零特征值:

$$\lambda_{1,2}(0) = 0.$$

假设下面的一般性条件满足:

(BT.0) Jacobi 矩阵 $A(0) = f_x(0, 0) \neq 0$;

(BT.1) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

(BT.2) $b_{20}(0) \neq 0$;

(BT.3) 映射

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \mathrm{tr}\left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right), \det\left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right)\right)$$

在点 $(x,\alpha)=(0,0)$ 正则.

则存在光滑依赖于参数的光滑可逆的变量变换, 保持方向的时间重参数化, 以及光滑可逆的参数变换一起将系统简化为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2 + O(\|\eta\|^3), \end{cases}$$

其中 $s = \text{sign}\,[b_{20}(a_{20}(0)+b_{11}(0))] = \pm 1$. □

系数 $a_{20}(0)$, $b_{20}(0)$ 和 $b_{11}(0)$ 可根据 $f(x,0)$ 用系统 (8.37) 后面给的公式计算.

**注**　(1) 时间重参数化在推导中间依赖于参数的规范形 (8.45) 是本质的, 但在临界参数值这是不必要的. 可以证明 (8.37) 在 $\alpha=0$ 光滑等价于

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = A(0)\xi_1^2 + B(0)\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3), \end{cases} \tag{8.49}$$

其中, $A(0)=\dfrac{1}{2}b_{20}(0)$ 以及 $B(0)=a_{20}(0)+b_{11}(0)$.

(2) 存在几个 (等价的)Bogdanov-Takens 规范形. 规范形 (8.48) 是由 Bogdanov 引入的, Takens 推导了规范形

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + O(\|\eta\|^3), \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + s\eta_1^2 + O(\|\eta\|^3), \end{cases} \tag{8.50}$$

其中 $s=\pm 1$. 这两个规范形的等价性证明留给读者作为一个练习. ◇

### 8.4.2　规范形的分支图

取 $s=-1$ 并考虑 (8.48) 中没有项 $O(\|\eta\|^3)$ 的系统

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 - \eta_1\eta_2. \end{cases} \tag{8.51}$$

这是第一个情形, 这里截断系统的分析是非平凡的. 更确切地说, 平衡点分支是容易分析的, 极限环的研究 (实际上是环的唯一性) 有点棘手.

系统 (8.51) 的分支图如图 8.8 所示. 这个系统的任何平衡点都位于水平轴 $\eta_2=0$ 上, 且满足方程

$$\beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 = 0. \tag{8.52}$$

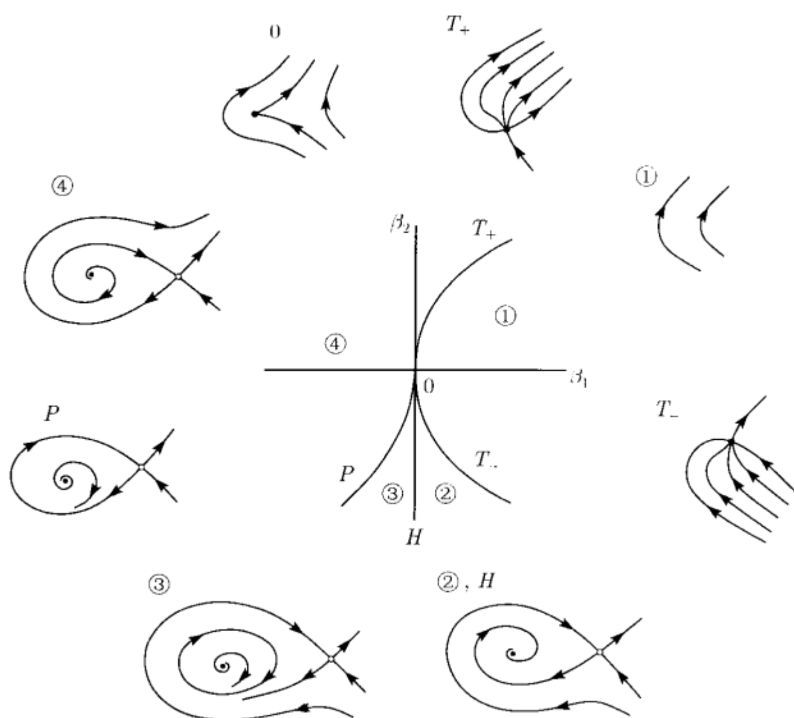



图 8.8　$s=-1$ 时的 Bogdanov-Takens 分支

方程 (8.52) 可没有实根或者有两个实根. 判别抛物线

$$T=\{(\beta_1,\beta_2):4\beta_1-\beta_2^2=0\} \tag{8.53}$$

对应于折分支: 沿着这条曲线系统 (8.51) 有具零特征值的平衡点. 若 $\beta_2\neq 0$, 则折分支是非退化的, 且从右到左穿过 $T$ 时出现两个平衡点. 以 $E_1$ 记左边的那个, $E_2$ 记右边的一个:

$$E_{1,2}=(\eta_{1,2}^0,0)=\left(\frac{-\beta_2\mp\sqrt{\beta_2^2-4\beta_1}}{2},0\right).$$

点 $\beta=0$ 将折分支曲线分为两个分枝 $T_-$ 和 $T_+$, 它们分别对应于 $\beta_2<0$ 和 $\beta_2>0$. 可以验证, 通过 $T_-$ 时稳定结点 $E_1$ 和鞍点 $E_2$ 合并在一起, 当穿过 $T_+$ 时产生一个不稳定结点 $E_1$ 和一个鞍点 $E_2$. 存在一条非分支曲线 (图中未画), 这条曲线位于 $\beta_1>0$ 并通过原点, 在它上面平衡点 $E_1$ 经历从结点到焦点的转移.

铅直轴 $\beta_1=0$ 是一条直线, 在它上面平衡点 $E_1$ 有一对特征值, 它们的和为零, 即 $\lambda_1+\lambda_2=0$. 铅直轴的下半部分

$$H=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_1=0,\ \beta_2<0\} \tag{8.54}$$

对应于非退化的 Andronov-Hopf 分支 ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), 上半轴是一条非分支直线, 它对应于中性鞍点. 由于 $l_1 < 0$, Hopf 分支给出一个稳定极限环 (练习 10(b)). 这个环在 $H$ 附近对 $\beta_1 < 0$ 存在. 平衡点 $E_2$ 对所有在曲线 $T$ 的左边的参数值保持为鞍点并没有分支. 在 (8.51) 的动力学中没有其他局部分支.

围绕 Bogdanov-Takens 点 $\beta = 0$ 附近作来回旅游, 从区域 1 出发, 那里没有平衡点 (故也不可能有极限环). 从区域 1 穿过折分支曲线的分枝 $T_-$ 进入区域 2 得到两个平衡点: 鞍点和稳定结点. 然后, 当穿过 Hopf 分支边界 $H$ 时结点变成焦点而失去稳定性. 当参数值接近 $H$ 的左边的参数值时出现一个稳定极限环. 如果继续顺时针方向旅游最后回到区域 1, 必须保留没有极限环. 因此, 在 $H$ 和 $T_+$ 之间的某个地方必须有大范围分支 "破坏" 这个极限环. 我们知道, 平面系统只有两个这样的余维 1 分支: 鞍点同宿分支 (第 6 章) 和鞍 – 结点同宿分支 (第 7 章). 由于鞍–结点平衡点在折分支不可能有同宿轨道, 大范围分支唯一可能的候选者只能是出现同宿于鞍点 $E_2$ 的轨道. 因此, 应该至少存在一条从 $\beta = 0$ 出发的分支曲线, 沿着这条曲线系统 (8.51) 有鞍点同宿分支. 当沿着曲线 $P$ 朝着 Bogdanov-Takens 点追踪同宿轨道时, 似回路的轨道收缩并消失.

**引理 8.7** *存在对应于系统 (8.51) 的鞍点同宿分支的唯一光滑曲线 $P$, 它从 $\beta = 0$ 出发并有局部表示*

$$P = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2),\ \beta_2 < 0\right\}. \tag{8.55}$$

*此外, 对小 $\|\beta\|$, 当参数值在由 Hopf 分支曲线 $H$ 和同宿分支曲线 $P$ 所围的区域内时, 系统 (8.51) 有唯一且双曲的稳定环, 在这个区域之外没有环.* □

附录 A 对这条引理给出一个扼要 "标准" 证明, 这个证明基于*奇异尺度化的 "爆炸"* 和 *Hamilton 系统扰动的 Pontryagin 技巧*. 证明给出表达式 (8.55)(也见练习 14(a)), 并几乎可逐词逐句地应用到对保留有项 $O(\|\eta\|^3)$ 的完全系统 (8.48).

鉴于这条引理, 通过 Hopf 分支产生的稳定环不在区域 3 中分支出. 我们顺时针运动时, 这个环 "生长" 并趋于鞍点, 在 $P$ 变成同宿轨道. 注意, 在同宿分支附近环的双曲性由沿着 $P$ 的鞍点量 $\sigma_0 < 0$ 这个事实得知. 为完成我们的环游, 注意, 在位于曲线 $P$ 与折分支曲线分枝 $T_+$ 之间的区域 4 中没有环. 参数在这个区域存在不稳定结点和鞍点, 它们在折分支曲线 $T_+$ 相遇而消失. 我们也指出, 在 $\beta = 0$ 具有两个零特征值的临界平衡点刚好有两条渐近轨道 (一条 $t \to +\infty$ 时趋于平衡点, 另一条 $t \to -\infty$ 时趋于它). 这两条轨道构成独特的 "尖刀口"(见图 8.8).

情形 $s = +1$ 可类似处理. 由于它可通过变换 $t \mapsto -t$, $\eta_2 \mapsto -\eta_2$ 化为我们已经研究过的情形, 参数图仍保留但极限环在 Bogdanov-Takens 点附近变成不稳定.

### 8.4.3　高阶项的影响

**引理 8.8**　*系统*

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 \pm \eta_1\eta_2 + O(\|\eta\|^3) \end{cases}$$

*在原点附近局部拓扑等价于系统*

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 \pm \eta_1\eta_2. \end{cases}$$

□

我们仅给出一个证明概要. 取 $s=-1$, 并把系统 (8.48) 中的项 $O(\|\eta\|^3)$ 展成 $\eta_1$ 的 Taylor 级数, 得

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2(1+\eta_1 P(\eta_1,\beta)) - \eta_1\eta_2(1+\eta_1 Q(\eta_1,\beta)) \\ \qquad +\eta_2^2(\eta_1 R(\eta,\beta) + \eta_2 S(\eta,\beta)), \end{cases} \tag{8.56}$$

其中 $P,Q,R$ 和 $S$ 是某些光滑函数.

这是一个容易的练习, 用隐函数定理证明 (8.56) 的折分支曲线和 Hopf 分支曲线的存在性, 它们接近于 (8.51) 中对应的曲线 $T$ 和 $H$. 这些分支的非退化条件也可直接验证.

一步一步地几乎重复附录 A 中的证明概要, 就可对系统 (8.56) 证明类似于引理 8.7 的引理[①]. 于是, 映 (8.56) 的参数图为 (8.51) 的参数图的同胚 (实际是微分同胚) 以及对应相图 (依赖于参数) 等同的微分同胚可构造.

如通常, 我们叙述一条一般性定理.

**定理 8.5**(BT 分支的拓扑规范形)　*任何一个在 $\alpha=0$ 有平衡点, 具 Bogdanov-Takens 分支的一般平面双参数系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha)$$

*在平衡点附近局部拓扑等价于下面规范形之一:*

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 \pm \eta_1\eta_2. \end{cases}$$

□

① 为了确切地如附录 A 中的方法进行证明, 我们必须用适当的变量和时间变换来去除 (8.56) 中的项 $P(\eta_1,\beta)$. 于是 (8.56) 的平衡点与 (8.51) 的重合.

如对 Bautin 分支, Bogdanov-Takens 分支引起**极限环分支**, 即对附近参数值出现同宿轨道. 因此, 可解析地证明 (验证分支条件和一般性条件 (BT.1)~(BT.3)) 系统**大范围分支**的存在性. 这又是解析地发现同宿分支不多的几个通常方法之一.

Bogdanov-Taken 分支在高维情形并没有带来新东西, 因为用中心流形定理可以把它化到平面情形. Shoshitaishvili 定理给出下面的 Bogdanov-Takens 分支在 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑规范形:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2, \\ \dot{\varsigma}_- = -\varsigma_-, \\ \dot{\varsigma}_+ = \varsigma_+, \end{cases}$$

其中 $s = \operatorname{sign} A(0)B(0) = \pm 1$, $(\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, $\varsigma_\pm \in \mathbb{R}^{n_\pm}$, 以及 $n_-$ 和 $n_+$ 是临界平衡点具 $\operatorname{Re}\lambda < 0$ 和 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 的特征值个数, 所以 $n_- + n_+ + 2 = n$.

我们将在 8.7 节解释如何找 $A(0)$ 和 $B(0)$. 这里仅指出中心流形在临界参数值的线性近似已足够计算它们.

**例 8.3**(Bazykin, 1985)　考虑两个微分方程的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \dfrac{x_1x_2}{1+\alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \dfrac{x_1x_2}{1+\alpha x_1} - \delta x_2^2. \end{cases}$$

这个方程模拟捕食–被捕食生态系统的动力学. 变量 $x_1$ 和 $x_2$(已尺度化), 分别是被捕食者和捕食者种群的数目, $\alpha, \gamma, \varepsilon$ 和 $\delta$ 是非负参数, 它们刻画孤立种群以及它们相互之间的交互作用 (Bazykin, 1985). 如果 $\delta = 0$, 这个系统化为的模型, 与第 3 章考虑过的系统仅仅不同于尺度化 (见例 3.1). 假设 $\varepsilon \ll 1$ 而 $\gamma = 1$ 固定. 这个系统关于剩下参数 $(\alpha, \delta)$ 的分支图具有平面系统所有可能的余维 2 分支.

系统有两个平凡平衡点

$$O = (0, 0), \quad E_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon}, 0\right).$$

平衡点 $O$ 始终是鞍点, $E_0$ 当 $\alpha > 1 - \varepsilon$ 时是稳定结点, 并且对这些参数值是仅有的吸引点. 在直线

$$k = \{(\alpha, \delta) : \alpha = 1 - \varepsilon\}$$

上, 当 $E_0$ 变成鞍点 (上临界分支) 时, 从 $E_0$ 到正象限分支出非平凡平衡点. 事实上, 在直线 $k$ 的左方系统可以有一个和三个正平衡点 $E_1, E_2, E_3$. 这些平衡点在曲线 $t$:

$$t =\{(\alpha, \delta) : 4\varepsilon(\alpha - 1)^3 + [(\alpha^2 - 20\alpha - 8)\varepsilon^2 + 2\alpha\varepsilon(\alpha^2 - 11\alpha + 10) + \alpha^2(\alpha - 1)^2]\ \delta - 4(\alpha + \varepsilon)^3\delta^2 = 0\}$$

上由于折 (切) 分支而成双地重合并消失. 这条曲线界定的区域形如 "嘴唇", 如图 8.9(a) 所示[①]. 在这个区域内部, 系统有三个平衡点 (两个反鞍点 $E_1, E_3$ 和一个鞍点 $E_2$). 在这个区域外面, 至多有一个非平凡平衡点可存在. 在曲线 $t$ 上有两个尖奇点 $C_1$ 和 $C_2$. 可以验证对应的尖分支是一般的. 从 "嘴唇" 内部趋于这些点的任何一个时, 三个正平衡点同时相遇, 它们中只有一个依然在外面存在.

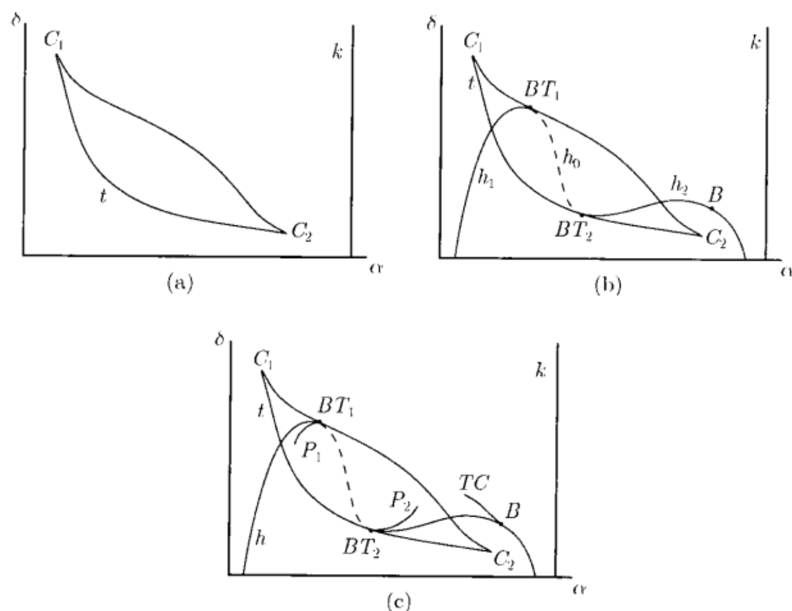



图 8.9　参数图的结构

系统平衡点满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 的参数值属于曲线

$$h =\{(\alpha, \delta) : 4\varepsilon[\alpha(\alpha - 1) + \varepsilon(\alpha + 1)] + [2(\varepsilon + 1)\alpha^2 + (3\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1)\alpha + \varepsilon(\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 5)]\delta + (\alpha + \varepsilon - 1)^2\delta^2 = 0\}.$$

曲线 $h$ 与曲线 $t$ 在点 $BT_1$ 和 $BT_2$ 有二次切触 (见图 8.9(b)). 平衡点在对应的参数值有重零特征值. 可以验证系统在这些点有一般 Bogdanov-Takens 分支. $BT_1$ 和 $BT_2$ 之间部分 $h_0$ 上的点对应中性鞍点, 外面的分枝定义两条 Hopf 分支曲线 $h_1$ 和 $h_2$. 最后一个局部余维 2 分支出现在 Hopf 曲线 $h_2$ 的点 $B$ 上. 这是一个 Bautin 点, 在它上面第一个 Lyapunov 系数 $l_1$ 为零, 但是第二个 Lyapunov 系数 $l_2 < 0$. 沿着

① 事实上, 这个区域比图 8.9 中的更狭窄.

$h_2$ 在点 $B$ 的右方有 $l_1 < 0$, 在点 $BT_2$ 和 $B$ 之间 $l_1 > 0$, 而在 $BT_1$ 的左方 $l_1 < 0$. 负值 $l_1$ 由 Hopf 分支保证出现稳定极限环, 正值导致附近出现不稳定环.

基于在上一节发展的 Bautin 与 Bogdanov-Takens 分支理论, 我们可以对系统的*极限环分支*作出某些结论. 存在从 Bautin 点 $B$ 出发的分支曲线 $TC$, 在上面产生极限环折分支: 一个稳定极限环和一个不稳定极限环重合形成一个具乘子 $\mu = 1$ 的非双曲环, 再消失 (见图 8.9(c)); 另外两条极限环分支曲线 $P_1$ 和 $P_2$ 从 Bogdanov-Takens 点 $BT_{1,2}$ 出发. 当然, 这些是同宿分支曲线, 沿着它们 "中性" 鞍点 $E_2$ 有围绕 "次要的" 反鞍点 $E_{1,3}$ 之一的同宿轨道.

分支图的完成要求如第 10 章叙述的数值方法. 所得的参数图如图 8.10 所示, 有关的相图如图 8.11 所示①. 同宿曲线 $P_{1,2}$ 终止于折曲线 $t$ 上的点 $D_{1,2}$. 这些点是余维 2 鞍–结点同宿点, 在上面同宿轨道沿着*非中心流形*回到鞍–结点 (见图 8.12(a)). 同宿曲线 $P_{1,2}$ 与曲线 $t$ 相切于点 $D_{1,2}$. 令人惊讶的是环折曲线 $TC$ 的端点: 它终止于分枝 $h_0$ 上对应于中性鞍点的点. 这是另一类余维 2 大范围分支, 我们对它还没有研究过, 即曲线 $TC$ 终止于点 $F$, 那里 $h_0$ 跟另一条鞍点同宿曲线 $P_0$ 相交. 这条曲线 $P_0$ 对应 "*大同宿环*" 的出现 (见图 8.12(b)). 它在折曲线 $t$ 上终止于类似于 $D_{1,2}$ 的点 $D_{3,4}$. 在点 $F$ 存在同宿于鞍点 $E_2$ 的 "大" 同宿轨道, 在这点的鞍点量 $\sigma_0$ 是零 (见第 6 章). 由大同宿轨道破裂所产生的环的稳定性沿着被 $F$ 分开的 $P_0$ 的两个分枝相反. 这导致环附近折曲线的存在性. 数值延拓技巧显示折曲线 $TC$ 从 $B$ 点出发终止于 $F$. 曲线 $TC$ 与 $P_0$ 在点 $F$ 有*无穷阶*切触. 切曲线 $t$ 的区间 $D_1D_3$ 和 $D_2D_4$ 对应余维 1 同宿鞍–结点分支 (第 7 章已经研究过, 定理 7.1). 通过这些区间的任何一个离开 "嘴唇" 产生的极限环在 $D_1D_3$ 附近稳定, 在 $D_2D_4$ 附近不稳定; 不稳定环位于 "大" 稳定环的*内部*. 参数图是完全的, 建议读者绕着它 "散步", 并追踪相图的各种形态.

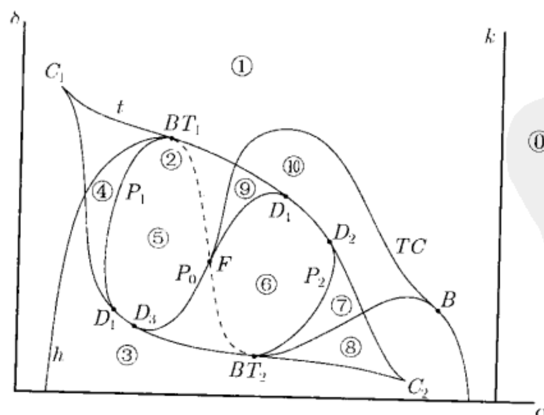



图 8.10　Bazykin 捕食–被捕食系统的分支图

① 相图是在单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$ 的下半球面在平面 $(x_1, x_2)$ 上的中心投影上.

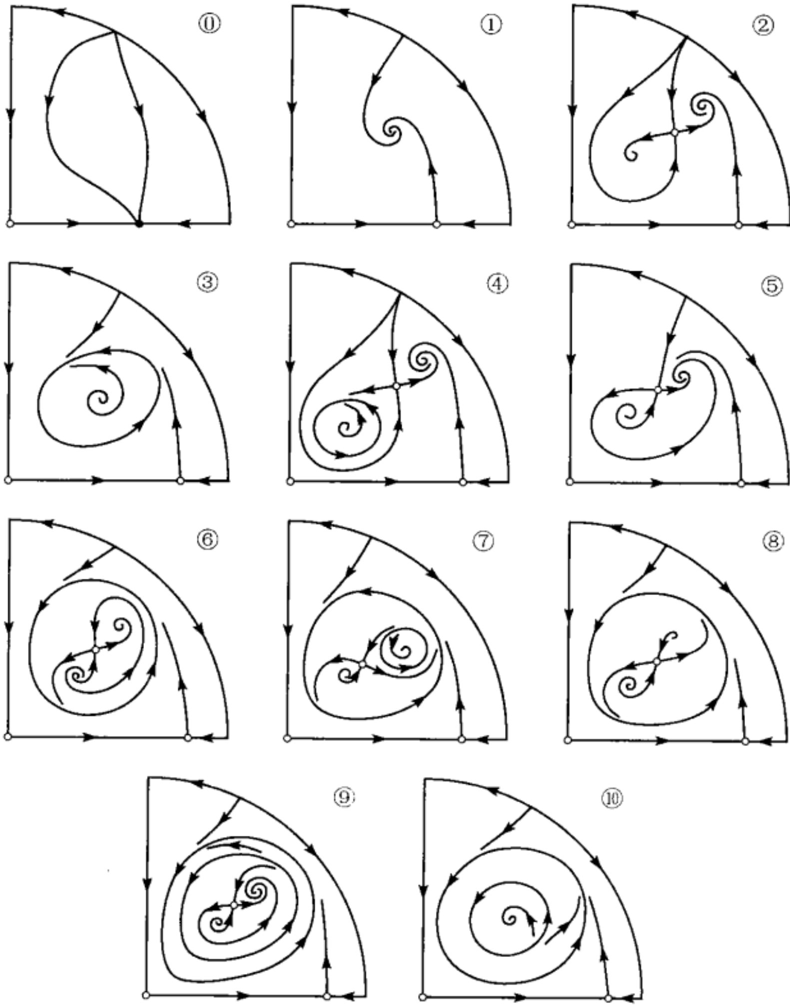



图 8.11　Bazykin 捕食–被捕食系统的一般相图

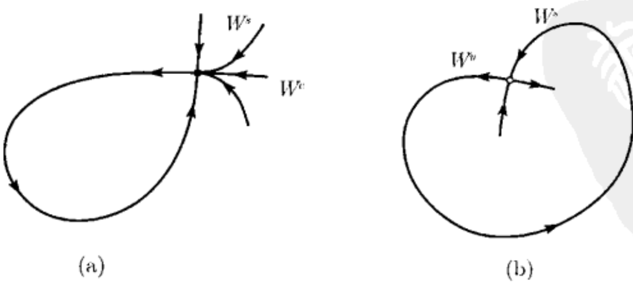



图 8.12　(a) 非中心鞍–结点同宿轨道; (b)“大” 同宿轨道

没有定理保证所研究的系统不能多于两个极限环, 即使 $\varepsilon \ll 1$ 和 $\gamma = 1$. 尽管

如此, 数值模拟确认的相图如图 8.11 所示. 事实上, 它是对一般参数值 $(\alpha, \delta)$ 系统只有这些可能. 所述分支图的生态解释可以在文献 (Bazykin, 1985) 中找到. 在这里仅指出此系统的非平凡平衡点和振动性态共存. ◇

## 8.5 折-Hopf 分支

现在有依赖于两个参数的三维光滑系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{8.57}$$

假设在 $\alpha = 0$, 系统有平衡点 $x = 0$, 具一个零特征值 $\lambda_1 = 0$ 和一对纯虚特征值 $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$.

### 8.5.1 规范形的推导

把 (8.57) 的右端在 $x = 0$ 关于 $x$ 展开得

$$\dot{x} = a(\alpha) + A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{8.58}$$

这里 $a(0) = 0,\ F(x, \alpha) = O(\|x\|^2)$. 由于矩阵 $A(0)$ 的特征值 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$ 是单的, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 矩阵 $A(\alpha)$ 有单特征值

$$\lambda_1(\alpha) = \nu(\alpha), \quad \lambda_{2,3}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha), \tag{8.59}$$

其中 $\nu, \mu$ 和 $\omega$ 是 $\alpha$ 的光滑函数使得

$$\nu(0) = \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

注意, 这些特征值是平衡点 $x = 0$ 在 $\alpha = 0$ 时的特征值, 但是, 典型地, 对附近的参数值 $a(\alpha) \neq 0$, 矩阵 $A(\alpha)$ 不是 (8.58) 任何平衡点的 Jacobi 矩阵. 尽管如此, 矩阵 $A(\alpha)$ 可定义, 它分别有两个对应于特征值 $\nu(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ 的光滑依赖于参数的特征向量 $q_0(\alpha) \in \mathbb{R}^3$ 和 $q_1(\alpha) \in \mathbb{C}^3$:

$$A(\alpha)q_0(\alpha) = \nu(\alpha)q_0(\alpha), \quad A(\alpha)q_1(\alpha) = \lambda(\alpha)q_1(\alpha).$$

此外, 伴随特征向量 $p_0(\alpha) \in \mathbb{R}^3$ 和 $p_1(\alpha) \in \mathbb{C}^3$ 可由

$$A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_0(\alpha) = \nu(\alpha)p_0(\alpha), \quad A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_1(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)p_1(\alpha)$$

定义. 标准化特征向量, 使得对一切小的 $\|\alpha\|$①有

$$\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1.$$

① 通常, 对两个复向量 $v, w \in \mathbb{C}^3$ 有 $\langle v, w \rangle = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2 + \bar{v}_3 w_3$.

下面的正交性由 Fredholm 交替定理得知

$$\langle p_1, q_0 \rangle = \langle p_0, q_1 \rangle = 0.$$

现在任何一个实向量 $x$ 可表示为

$$x = uq_0(\alpha) + zq_1(\alpha) + \bar{z}\,\bar{q}_1(\alpha),$$

其中

$$\begin{cases} u = \langle p_0(\alpha), x \rangle, \\ z = \langle p_1(\alpha), x \rangle. \end{cases}$$

在坐标 $u \in \mathbb{R}^1$ 和 $z \in \mathbb{C}^1$ 下, 系统 (8.58) 化为

$$\begin{cases} \dot{u} = \Gamma(\alpha) + \nu(\alpha)u + g(u, z, \bar{z}, \alpha), \\ \dot{z} = \Omega(\alpha) + \lambda(\alpha)z + h(u, z, \bar{z}, \alpha). \end{cases} \tag{8.60}$$

这里

$$\Gamma(\alpha) = \langle p_0(\alpha), a(\alpha) \rangle, \quad \Omega(\alpha) = \langle p_1(\alpha), a(\alpha) \rangle \tag{8.61}$$

是 $\alpha$ 的光滑函数, $\Gamma(0) = 0$, $\Omega(0) = 0$, 以及

$$\begin{aligned} g(u, z, \bar{z}, \alpha) &= \langle p_0(\alpha), F(uq_0(\alpha) + zq_1(\alpha) + \bar{z}\,\bar{q}_1(\alpha), \alpha) \rangle, \\ h(u, z, \bar{z}, \alpha) &= \langle p_1(\alpha), F(uq_0(\alpha) + zq_1(\alpha) + \bar{z}\,\bar{q}_1(\alpha), \alpha) \rangle \end{aligned} \tag{8.62}$$

是 $u, z, \bar{z}, \alpha$ 的光滑函数, 它们关于前面三个变量从二次项开始的 Taylor 展式是

$$g(u, z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{j+k+l \geqslant 2} \frac{1}{j!k!l!} g_{jkl}(\alpha) u^j z^k \bar{z}^l,$$

和

$$h(u, z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{j+k+l \geqslant 2} \frac{1}{j!k!l!} h_{jkl}(\alpha) u^j z^k \bar{z}^l,$$

显然, $\gamma(\alpha)$ 是实数, 且由于 $g$ 必须是实的, 有 $g_{jkl}(\alpha) = \bar{g}_{jkl}(\alpha)$. 因此, 对 $k = l$, $g_{jkl}$ 是实的. 显然, $g_{jkl}$ 和 $h_{jkl}$ 可由 (8.62) 给的表达式关于 $u, z$ 和 $\bar{z}$ 计算形式导数得到.

利用标准技巧, 可以用坐标变换简化 (8.60) 中的线性部分并消去非共振项.

**引理 8.9**(Poincaré 规范形)　假设

(ZH.1) $g_{200}(0) \neq 0$.

则存在局部定义的光滑依赖于参数光滑可逆的变量变换, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 把 (8.60) 化为

$$\begin{cases} \dot{v} = \gamma(\alpha) + G_{200}(\alpha)v^2 + G_{011}(\alpha)|w|^2 + G_{300}(\alpha)v^3 \\ \qquad +G_{111}(\alpha)v|w|^2 + O(\|v,w,\bar{w})\|^4), \\ \dot{w} = \Lambda(\alpha)w + H_{110}(\alpha)vw + H_{210}(\alpha)v^2w + H_{021}(\alpha)w|w|^2 \\ \qquad +O(\|v,w,\bar{w})\|^4), \end{cases} \tag{8.63}$$

其中 $v \in \mathbb{R}^1$, $w \in \mathbb{C}^1$ 以及 $\|(v,w,\bar{w})\|^2 = v^2 + |w|^2$. 在 (8.63), $\gamma(\alpha)$ 和 $G_{jkl}(\alpha)$ 是实值光滑函数, $\Lambda(\alpha)$ 和 $H_{jkl}(\alpha)$ 是复值光滑函数. 此外, $\gamma(0) = 0$, $\Lambda(0) = \mathrm{i}\omega_0$,

$$G_{200}(0) = \frac{1}{2}g_{200}(0), \quad G_{011}(0) = g_{011}(0), \quad H_{110}(0) = h_{110}(0), \tag{8.64}$$

以及

$$G_{300}(0) = \frac{1}{6}g_{200}(0) - \frac{1}{\omega_0}\mathrm{Im}(g_{110}(0)h_{200}(0)), \tag{8.65}$$

$$G_{111}(0) = g_{111}(0) - \frac{1}{\omega_0}[2\ \mathrm{Im}(\mathrm{g}_{110}(0)h_{011}(0)) + \mathrm{Im}(g_{020}(0)h_{010}(0))], \tag{8.66}$$

$$H_{210}(0) = \frac{1}{2}h_{210}(0) + \frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}[h_{200}(0)(h_{020}(0) - 2g_{110}(0)) - |h_{101}(0)|^2 - h_{011}(0)h_{200}(0)], \tag{8.67}$$

$$\begin{aligned} H_{021}(0) =& \frac{1}{2}h_{021}(0) + \frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\Big(h_{011}(0)h_{020}(0) \\ & - \frac{1}{2}g_{020}(0)h_{101}(0) - 2|h_{011}(0)|^2 - \frac{1}{3}|h_{002}(0)|^2\Big). \end{aligned} \tag{8.68}$$

**证明概要**　先对 $\alpha = 0$ 证明引理, 这时 $\Gamma = \nu = \Omega = 0$. 对 (8.60) 执行非线性变量变换

$$\begin{cases} v = u + \frac{1}{2}V_{020}z^2 + \frac{1}{2}V_{002}\bar{z}^2 + V_{110}uz + V_{101}u\bar{z}, \\ w = z + \frac{1}{2}W_{200}u^2 + \frac{1}{2}W_{020}z^2 + \frac{1}{2}W_{002}\bar{z}^2 + W_{101}u\bar{z} + W_{011}z\bar{z}, \end{cases} \tag{8.69}$$

其中 $V_{jkl}$ 和 $W_{jkl}$ 是后面将确定的未知系数. 变换 (8.69) 在 $(u,z) = (0,0)$ 附近是可逆的且将 (8.60) 化为直到三阶项的 (8.63) 的形式, 只要取

$$V_{020} = -\frac{g_{020}}{2\mathrm{i}\omega_0}, \quad V_{002} = \frac{g_{002}}{2\mathrm{i}\omega_0}, \quad V_{110} = -\frac{g_{110}}{\mathrm{i}\omega_0}, \quad V_{101} = \frac{g_{101}}{\mathrm{i}\omega_0},$$

以及

$$W_{200} = \frac{h_{200}}{\mathrm{i}\omega_0}, \quad W_{020} = -\frac{h_{020}}{\mathrm{i}\omega_0}, \quad W_{101} = \frac{h_{101}}{2\mathrm{i}\omega_0}, \quad W_{002} = \frac{h_{002}}{3\mathrm{i}\omega_0}, \quad W_{011} = \frac{h_{011}}{\mathrm{i}\omega_0},$$

其中所有 $g_{jkl}$ 和 $h_{jkl}$ 都必须在 $\alpha=0$ 计算. 恰当选取这些系数使得消去所得系统中的所有二次项, 除了 (8.63) 中出现的项. 然后, 可以消去所有非共振三次项而不用改变位于 (8.63) 中共振项前的系数. 为验证表达式 $G_{jkl}(0)$ 和 $H_{jkl}(0)$, 必须求 (8.69) 的逆直到并包括三次项①.

为了对 $\alpha\neq 0$, 小 $\|\alpha\|$ 证明这条引理, 必须执行依赖于参数的变换, 它在 $\alpha=0$ 与 (8.69) 相同, 但包含 $\alpha\neq 0$ 时小仿射部分以平衡 (8.63) 中 "不希望" 出现的线性项. 例如, 可取

$$\begin{cases} v=u+\delta_0(\alpha)+\delta_1(\alpha)u+\delta_2(\alpha)z+\delta_3(\alpha)\bar{z} \\ \quad +\dfrac{1}{2}V_{020}(\alpha)z^2+\dfrac{1}{2}V_{002}(\alpha)\bar{z}^2+V_{110}(\alpha)uz+V_{101}(\alpha)u\bar{z}, \\ w=z+\Delta_0(\alpha)+\Delta_1(\alpha)u+\Delta_2(\alpha)z+\Delta_3(\alpha)\bar{z} \\ \quad +\dfrac{1}{2}W_{200}(\alpha)u^2+\dfrac{1}{2}W_{020}(\alpha)z^2+\dfrac{1}{2}W_{002}(\alpha)\bar{z}^2+W_{101}(\alpha)u\bar{z} \\ \quad +W_{011}(\alpha)z\bar{z}, \end{cases} \tag{8.70}$$

这里 $\delta_k(0)=0$ 和 $\Delta_k(0)=0$. 为了证明这一点可选取 (8.70) 中依赖于参数的系数, 以对所有小 $\|\alpha\|$ 去消去所有常数项、线性项, 以及二次项, 除了 (8.63) 中所示的项. 为此, 必须用关于 $A(0)$ 特征值的假设和条件 (ZH.1) 以便应用隐函数定理. 详细留给读者. □

在 (8.63) 中作非线性时间重参数化并执行额外的变量变换以进一步简化系统. 如下面引理指出的, 在某些非退化条件下, 所有三次项除了一项共振项外都可 "移去".

**引理 8.10**(Gavrilov 规范形)　假设

(ZH.1) $G_{200}(0)\neq 0$;

(ZH.2) $G_{011}(0)\neq 0$.

*则系统 (8.63) 在原点附近局部光滑轨道等价于系统*

$$\begin{cases} \dot{u}=\delta(\alpha)+B(\alpha)u^2+C(\alpha)|z|^2+O(\|(u,z,\bar{z})\|^4), \\ \dot{z}=\Sigma(\alpha)z+D(\alpha)uz+E(\alpha)u^2z+O(\|(u,z,\bar{z})\|^4), \end{cases} \tag{8.71}$$

*其中 $\delta(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ 和 $E(\alpha)$ 是光滑的实值函数, $\Sigma(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 是光滑的复值函数. 此外, $\delta(0)=0$, $\Sigma(0)=\Lambda(0)=\mathrm{i}\omega_0$, 以及*

$$B(0)=G_{200}(0),\quad C(0)=G_{011}(0), \tag{8.72}$$

$$D(0)=H_{110}(0)-\mathrm{i}\omega_0\frac{G_{300}(0)}{G_{200}(0)}, \tag{8.73}$$

---

① 一个明显避免求 (8.69) 的逆的方法, 是微分 (8.69), 并用 (8.60) 的 $(\dot{u},\dot{v})$ 和所得的 (8.69) 的变换代入 (8.63), 再比较用 $(u,v)$ 表达的 $\dot{v}$ 和 $\dot{w}$ 的方程.

$$E(0) = \text{Re}\left[H_{210}(0) + H_{110}(0)\left(\frac{\text{Re } H_{021}(0)}{G_{011}(0)} - \frac{3G_{300}(0)}{2G_{200}(0)} + \frac{G_{111}(0)}{2G_{011}(0)}\right) - \frac{H_{021}(0)G_{200}(0)}{G_{011}(0)}\right]. \tag{8.74}$$

**证明** 如同引理 8.9, 从 $\alpha = 0$ 开始. 在 (8.63) 中作下面的时间重参数化:

$$\mathrm{d}t = (1 + e_1 v + e_2|w|^2)\mathrm{d}\tau, \tag{8.75}$$

常数 $e_{1,2} \in \mathbb{R}^1$ 待定. 同时通过下面公式引入新的变量, 仍记为 $u$ 和 $z$:

$$\begin{cases} u = v + \dfrac{1}{2}e_3 v^2, \\ z = w + Kvw, \end{cases} \tag{8.76}$$

其中 $e_3 \in \mathbb{R}^1$ 和 $K \in \mathbb{C}^1$ 是 "未知系数". 重参数化 (8.75) 在原点附近保持时间方向, 变换 (8.76) 局部可逆. 在新变量和新时间下, 若令

$$e_1 = -\frac{G_{300}(0)}{G_{200}(0)}, \quad K = -\frac{\mathrm{i}\omega_0 e_2 + H_{021}(0)}{G_{011}(0)}, \quad e_3 = 2 \text{ Re } K - e_1 - \frac{G_{111}(0)}{G_{011}(0)},$$

则系统 (8.63) 取形式 (8.71), 然后再调节余下的自由参数 $e_2$ 去消去项 $u^2 z$ 系数的虚部. 这永远是可能的, 因为这个系数有形式

$$\Psi - \mathrm{i}\omega_0 \frac{G_{200}(0)}{G_{011}(0)} e_2,$$

在 $e_2$ 前它有纯虚因子. 直接计算显示 $\text{Re } \Psi = E(0)$, 其中 $E(0)$ 是引理所述中由 (8.74) 所给的表达式.

对小 $\alpha \neq 0$ 借助隐函数定理的帮助, 如果在 (8.75) 中视 $e_{1,2}$ 为 $\alpha$ 的函数, 并用

$$\begin{cases} u = v + e_4(\alpha)v + \dfrac{1}{2}e_3(\alpha)v^2, \\ z = w + K(\alpha)vw \end{cases}$$

代替 (8.76), 其中 $e_{3,4}(\alpha)$, $e_4(0) = 0$ 以及 $K(\alpha)$ 为光滑函数, 读者可验证类似的结构.

□

最后, 在 (8.71) 中作变量和时间的线性尺度化

$$u = \frac{B(\alpha)}{E(\alpha)}\xi, \quad z = \frac{B^3(\alpha)}{C(\alpha)E^2(\alpha)}\zeta, \quad t = \frac{E(\alpha)}{B^2(\alpha)}\tau,$$

得到

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1(\alpha) + \xi^2 + s|\zeta|^2 + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \\ \dot{\zeta} = (\beta_2(\alpha) + \mathrm{i}\omega_1(\alpha))\zeta + (\theta(\alpha) + \mathrm{i}\vartheta(\alpha))\xi\zeta + \xi^2\zeta + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \end{cases} \tag{8.77}$$

其中 $s = \text{sign}[B(0)C(0)] = \pm 1$, 以及

$$\beta_1(\alpha) = \frac{E^2(\alpha)}{B^3(\alpha)}\,\delta(\alpha), \quad \beta_2(\alpha) = \frac{E(\alpha)}{B^2(\alpha)}\,\text{Re}\ \Sigma(\alpha),$$
$$\theta + \text{i}\vartheta(\alpha) = \frac{D(\alpha)}{B(\alpha)}, \quad \omega_1(\alpha) = \frac{E(\alpha)}{B^2(\alpha)}\,\text{Im}\ \Sigma(\alpha).$$

因为鉴于 (ZH.1) 和 (ZH.2), 有 $B(0)C(0) \neq 0$, 为使尺度化有效只需假定

(ZH.3) $E(0) \neq 0$.

注意, 如果 $E(0) > 0$, $\tau$ 与 $t$ 有相同方向. 当解释稳定性结果时我们要注意这点. 引入这个使得时间可能转向的自由是为了减少不同情形的数目. 也可以假设 $\omega_1(\alpha) > 0$, 因为变换 $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ 改变 $\omega_1$ 的符号.

若加入另外一个横截性条件, 即

(ZH.4) 映射 $\alpha \mapsto \beta$ 在 $\alpha = 0$ 正则,

则 $(\beta_1, \beta_2)$ 可视为新变量, 而 $\theta$ 视为 $\beta$ 的函数 (保留符号). 条件 (ZH.4) 等价于映射 $\alpha \mapsto (\gamma(\alpha), \mu(\alpha))^{\text{T}}$ 在 $\alpha = 0$ 的正则性 (见 (8.59) 和 (8.61)).

我们用下面的定理总结在这一节所得的结果.

**定理 8.6**　假设三维系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{8.78}$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 平衡点 $x = 0$ 有特征值

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_{2,3}(0) = \pm \text{i}\omega_0, \quad \omega_0 > 0.$$

设

(ZH.1) $g_{200}(0) \neq 0$;

(ZH.2) $g_{011}(0) \neq 0$;

(ZH.3) $E(0) \neq 0$, 这里 $E(0)$ 可用 (8.64)~(8.68) 以及 (8.74) 计算;

(ZH.4) 映射 $\alpha \mapsto (\gamma(\alpha), \mu(\alpha))^{\text{T}}$ 在 $\alpha = 0$ 正则.

则利用引入复变量、光滑依赖于参数的光滑变换、时间重参数化 (如果 $E(0) < 0$ 更改方向) 以及引入新参数, 就可将系统 (8.78) 化为形式

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s|\zeta|^2 + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \\ \dot{\zeta} = (\beta_2 + \text{i}\omega_1)\zeta + (\theta + \text{i}\vartheta)\xi\zeta + \xi^2\zeta + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \end{cases} \tag{8.79}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^1$ 和 $\zeta \in \mathbb{C}^1$ 是新变量; $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是新参数; $\theta = \theta(\beta)$, $\vartheta = \vartheta(\beta)$, $\omega_1 = \omega_1(\beta)$ 是光滑实值函数; $\omega_1(0) \neq 0$, 以及

$$s = \text{sign}[g_{200}(0) g_{011}(0)] = \pm 1, \quad \theta(0) = \frac{\text{Re}\ h_{110}(0)}{g_{200}(0)}.$$

□

对下面叙述只有 $s$ 和 $\theta(0)$ 是重要的. 假设

(ZH.5) $\theta(0) \neq 0$.

**注**　观察规范形中哪一个三次项得到保留是重要的. 代替 (8.79), Gavrilov 用下面属于 Guckenheimer 的规范形:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s|\zeta|^2 + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \\ \dot{\zeta} = (\beta_2 + \mathrm{i}\omega_1)\zeta + (\theta + \mathrm{i}\vartheta)\xi\zeta + \zeta|\zeta|^2 + O(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \end{cases} \tag{8.80}$$

其中保留在第二个方程中的项 $\zeta|\zeta|^2$ 代替出现在 (8.79) 中的项 $\xi^2\zeta$. 当然, 交替的选择导致等价的分支图. ◇

### 8.5.2　截断规范形的分支图

在坐标系 $(\xi, \rho, \varphi)$, $\zeta = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 下, 没有项 $O(\|\cdot\|^4)$ 的系统 (8.77) 可写为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2), \\ \dot{\varphi} = \omega_1 + \vartheta\xi, \end{cases} \tag{8.81}$$

前面两个方程与第三个方程无关. 对小 $|\xi|$, $\varphi$ 的方程刻画围绕 $\xi$ 轴并以几乎是常角速度 $\dot{\varphi} \approx \omega_1$ 的旋转. 因此, 为理解 (8.81) 的分支, 只需要研究对 $(\xi, \rho)$, 满足 $\rho \geqslant 0$ 的平面系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2). \end{cases} \tag{8.82}$$

通常称这个系统为 (截断)*振幅系统*. 如果考虑整个 $(\xi, \rho)$ 平面, 系统 (8.82) 是 $\mathbb{Z}_2$ 对称, 因为反射 $\rho \mapsto -\rho$ 使它不变. (8.82) 对应于各种可能不同情形的分支图描绘在图 8.13、图 8.14, 以及图 8.16、图 8.17 中. 在所有情形, 系统 (8.82) 在原点的小邻域内对小 $\|\beta\|$ 有零个或三个平衡点. 两个对 $\beta_1 < 0$ 存在的 $\rho = 0$ 的平衡点为

$$E_{1,2} = (\xi_{1,2}^{(0)}, 0) = (\mp\sqrt{-\beta_1}, 0).$$

这些平衡点在直线

$$S = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

上出现一般折分支. 分支直线 $S$ 有两个分枝 $S_+$ 和 $S_-$, 它们被点 $\beta = 0$ 分开, 这两个分枝分别对应于 $\beta_2 > 0$ 和 $\beta_2 < 0$(例如见图 8.13). 穿过分枝 $S_+$ 产生一个不稳定结点和一个鞍点, 通过 $S_-$ 得到一个稳定结点和一个鞍点.

平衡点 $E_{1,2}$ 可进一步分支, 即具 $\rho > 0$ 的非平凡平衡点

$$E_3 = (\xi_3^{(0)}, \rho_3^{(0)}) = \left(-\frac{\beta_2}{\theta} + o(\beta_2), \sqrt{-\frac{1}{s}\left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2}{\theta^2} + o(\beta_2^2)\right)}\right).$$

可从 $E_1$ 或 $E_2$ 分枝 (这里第一次用了假设 (ZH.5)). 显然, (8.82) 可以有另外的非平凡的平衡点满足

$$\xi = -\theta + \cdots, \quad \rho^2 = -s\theta^2 + \cdots,$$

这里的省略号表示当 $\beta \to 0$ 时为零的项. 我们不用担心这个平衡点, 因为它位于相平面原点的任何充分小邻域之外, 并不影响 $E_k$ 中的任何一个, $k = 1, 2, 3$. 非平凡平衡点 $E_3$ 出现在分支曲线

$$H = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{\beta_2^2}{\theta^2} + o(\beta_2^2)\right\}$$

上. 如果 $s\theta > 0$, 出现的平衡点 $E_3$ 是鞍点, $s\theta < 0$ 时它是结点. 对 $\theta\beta_2 > 0$, 这个结点如果存在则稳定, 如果这个不等式反向则不稳定①.

如果 $s\theta > 0$, 非平凡平衡点 $E_3$ 不分支, (8.82) 的分支图如图 8.13(对 $s = 1$, $\theta > 0$) 和图 8.14(对 $s = -1$, $\theta < 0$) 所示.

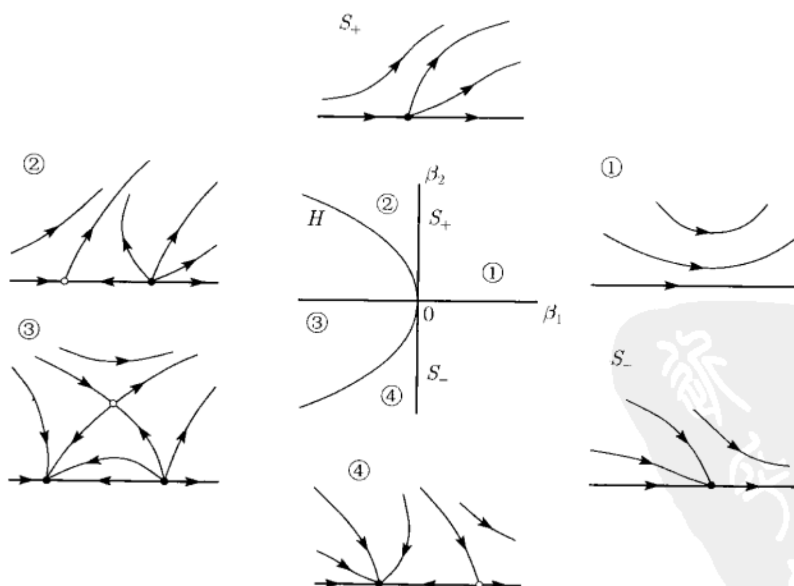



图 8.13　振幅系统 (8.81)($s = 1$, $\theta > 0$) 的分支图

① 细心的读者会认出如在第 7 章研究过的叉分支, 由于 (8.82) 的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性, 它在 $H$ 发生.

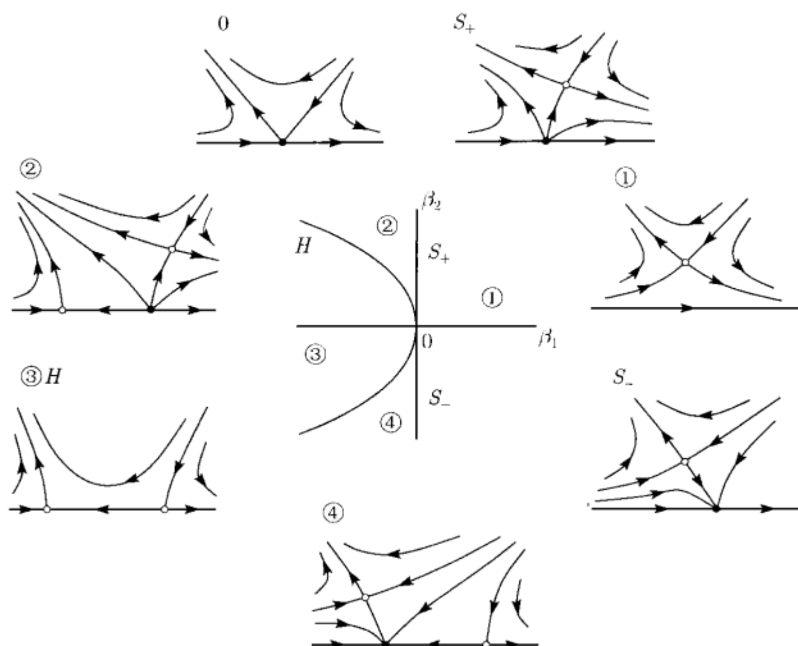



图 8.14 振幅系统 (8.81) ($s=-1,\ \theta<0$) 的分支图

**注** 对 $s=1$, 情形 $\theta(0)>0$ 和情形 $0<\theta(0)\leqslant 1$ 之间的微妙差别仅出现在临界参数值 $\beta=0$(见图 8.15). ◇

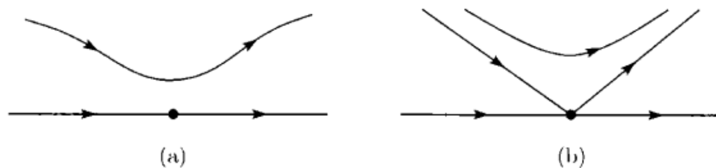



图 8.15 $s=1$ 的临界相图: (a) $0<\theta(0)\leqslant 1$; (b) $\theta(0)>1$

如果 $s\theta<0$, 对参数值属于直线

$$T=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_2=0,\ \theta\beta_1>0\}$$

上的平衡点 $E_3$, 有两个纯虚特征值.

可以验证对应的第一个 Lyapunov 系数是

$$l_1=-\frac{C_+}{\theta\sqrt{\theta\beta_1}},$$

$C_+>0$ 是某常数. 因此, 对充分小 $\|\beta\|>0$, 沿着 $T$, Lyapunov 系数 $l_1$ 不为零. 因

此, 如果在 $\beta=0$ 的邻域内穿过直线 $T$, 非退化的 Hopf 分支发生, 对邻近的参数值存在唯一极限环. 它的稳定性依赖于 $l_1$ 的符号.

可以证明, (8.82) 在 $(\xi,\rho)$ 平面的原点的充分小邻域内对小 $\|\beta\|$ 至多有一个极限环. 证明是困难的, 这里就省略了①. 这个极限环的命运依赖于 $s=1$, 还是 $s=-1$ 而不同 (见图 8.16 和图 8.17).

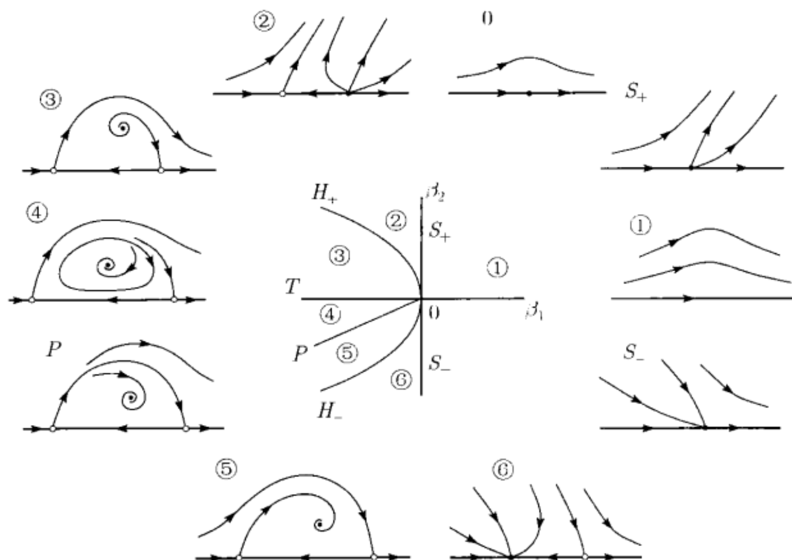



图 8.16　振幅系统 (8.81) ( $s=1,\ \theta<0$) 的分支图

如果 $s=1$(且 $\theta<0$), 极限环不稳定并与另外两个平凡平衡点 $E_{1,2}$ 共存, 它们是鞍点. 在参数变化下环趋于这两个鞍点分界线所形成的异宿环: 环的周期趋于无穷而环消失. 注意, 由于对称性 $\xi$ 轴永远是不变的, 故连接鞍点 $E_{1,2}$ 的轨道总是存在. 第二个连接出现在沿着从 $\beta=0$ 出发且有表达式

$$P=\left\{(\beta_1,\beta_2):\beta_2=\frac{\theta}{3\theta-2}\beta_1+o(\beta_1),\ \beta_1<0\right\}$$

的曲线上 (见练习 14(b)). 所得的分支图如图 8.16 所示.

如果 $s=-1$(且 $\theta>0$), 当没有 $\rho=0$ 的平衡点时, 通过 Hopf 分支出现稳定极限环. 当在参数平面内围绕原点顺时针方向移动时, 环必须在进入区域 3 前在某个地方消失, 那里没有极限环存在, 因为那里没有非平凡平衡点. 稍微想想, 环不可能由于同宿分支或异宿分支而 “消亡”. 为了理解由 Hopf 分支产生的环会发生什么情况, 在相平面原点固定一个的小邻域 $U_0$. 然后, 在参数平面内围绕 $\beta=0$ 顺时针

① 这基于奇异尺度化和 Hamilton 系统扰动的 Pontryagin 技巧 (如同 Bogdanov-Takens 情形, 但更为复杂, 见附录 A 和练习 14(b)).

方向移动, 环 "增大" 并与 $U_0$ 的边界相接触. 接下来只看 $U_0$ 的内部环变得看不见了. 我们不能缩小邻域 $U_0$ 而去掉这个称为环爆炸的现象, 也不可能使得这个邻域变得很大, 因为前面所有的分析只能在原点的充分小邻域内有效. 因此, 对 $s=-1$, 存在从 $\beta=0$ 出发并依赖于在其中考虑系统 (8.82) 的区域的 "分支" 曲线 $J$, 在它上面环趋于这个区域的边界 (见图 8.17). 如果在参数平面上沿着以原点 $\beta=0$(曲线 $J$ 终止于这个原点) 为中心的任意小圆作围绕旅游, 我们发现, 这个现象最奇怪的特征是环通过 Hopf 分支而产生, 然后趋于任何小但固定的区域的边界. 这意味着当圆周的半径收缩而参数任意快变化时, 环的直径却增大. 这就是为什么说环具有爆炸性.

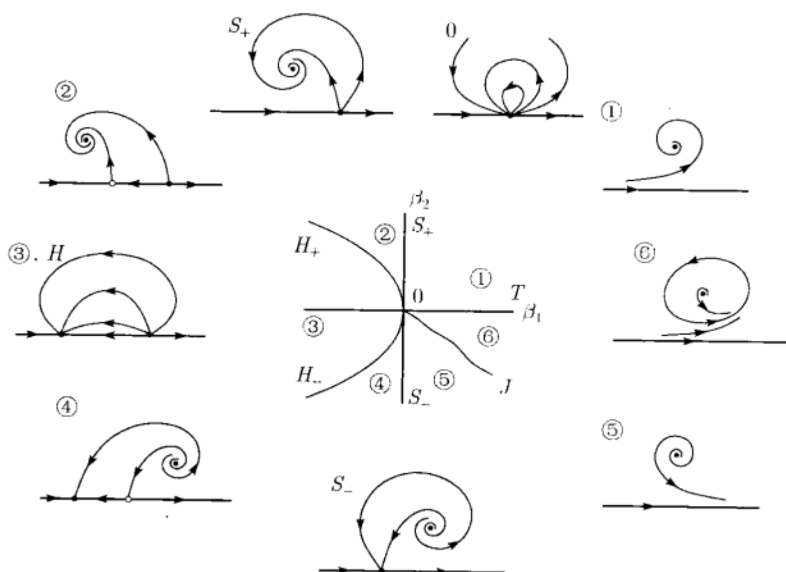



图 8.17　振幅系统 (8.81)($s=-1$, $\theta>0$ ) 的分支图

现在可以用所得 (8.82) 的分支图, 利用关于 $\varphi$ 旋转的 "扭扩" 去构造三维截断规范形(8.81) 的分支. (8.82) 中 $\rho=0$ 的平衡点 $E_{1,2}$ 对应 (8.81) 的平衡点. 因此, 曲线 $S$ 是 (8.81) 的折分支曲线, 在它上面出现两个平衡点, 一个结点一个鞍-焦点. (8.82) 中的非平凡平衡点 $E_3$ 对应 (8.81) 中的极限环, 并与 $E_3$ 有相同的稳定性(见图 8.18). 在叉分支曲线 $H$ 上从平衡点分支出的小环, 显然它对应于 (8.81) 的 Hopf 分支. 人们自然期望在折 Hopf 分支附近出现这两个局部分支曲线. (8.82) 中的极限环对应 (8.81) 中的不变环面(见图 8.19). 因此, Hopf 分支曲线 $T$ 刻画了环的 Neimark-Sacker 分支, 在它上面环失去稳定性而产生 "围绕" 它的稳定环面. 然后这个环面或者趋于由球形曲面和 $\xi$ 轴组成的异宿集 (见图 8.20) 或者到达所考虑区域的边界爆炸而 "消失".

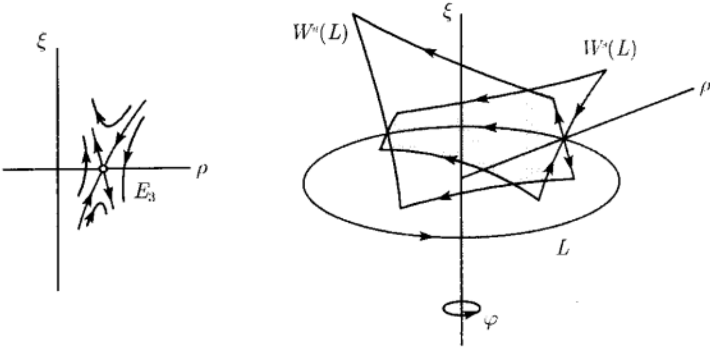



图 8.18　对应于环的非平凡平衡点

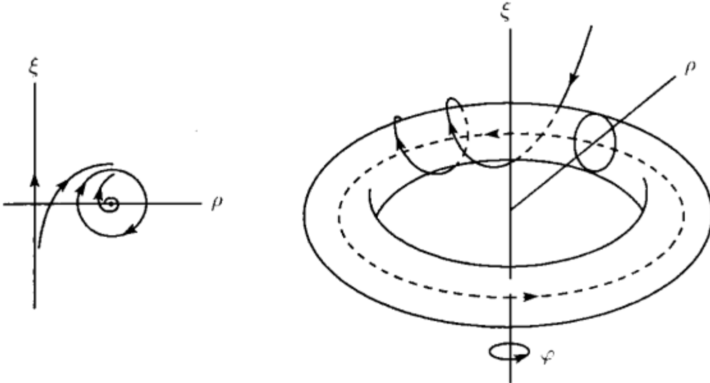



图 8.19　对应于环面的环

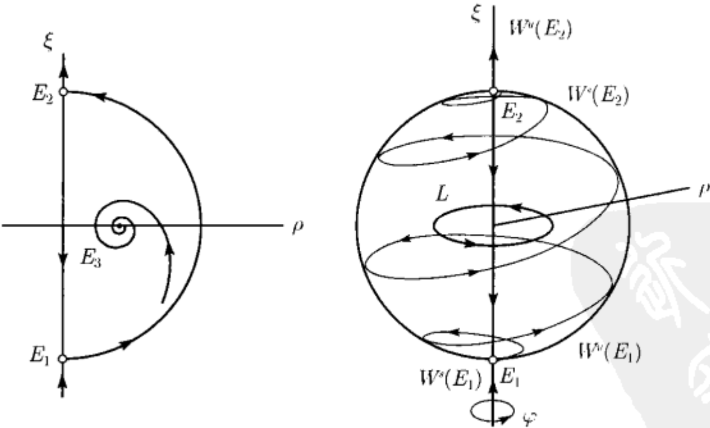



图 8.20　对应于 “球面” 的异宿轨道

### 8.5.3　高阶项的影响

回忆前面关于*截断规范形*(8.81) 的结果. 正如我们将看到的, 若考虑整个系统

(8.77), 则有些结果仍“保持”, 另外一些则没有. 在多数情况下 (8.81) 不是(8.77) 的规范形.

先从正面信息开始. 如同 (8.81), 在相同坐标系 $(\xi,\rho,\varphi)$ 下将 (8.77) 写为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2 + \Theta_\beta(\xi,\rho,\varphi), \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2) + \Psi_\beta(\xi,\rho,\varphi), \\ \dot{\varphi} = \omega_1 + \vartheta\xi + \Phi(\xi,\rho,\varphi), \end{cases} \tag{8.83}$$

其中 $\Theta_\beta, \Psi_\beta = O((\xi^2+\rho^2)^2)$ 和 $\Phi_\beta = O(\xi^2+\rho^2)$ 是光滑函数, 对 $\varphi$ 为 $2\pi$ 周期函数. 应用隐函数定理, 可以证明对充分小 $\|\beta\|$, 系统 (8.83) 在相空间原点的小邻域内有与 (8.81) 相同的*局部分支*. 更确切地说, 它至多有两个平衡点, 由于折分支出现在接近于 $S$ 的曲线上. 在接近于 $H$ 的曲线上平衡点产生 Hopf 分支, 从而产生一个唯一极限环. 如果 $s\theta < 0$, 这个环失去稳定性, 并由于在接近于曲线 $T$ 的某曲线上发生 Neimark-Sacker 分支而产生环面. 对这些分支的非退化条件可以比较简单地验证. 事实上, (8.83) 中代表这些分支曲线的函数的 Taylor 展开式中的主–阶项与 (8.81) 中的相同. 因此可以说, 一般地, “折分支和 Hopf 分支之间交互作用导致出现环面”.

如果 $s=1$ 且 $\theta>0$, 那么可以得到更多的信息, 即加入高阶项并不定性地改变 (8.81) 的整个分支图.

**引理 8.11** *若 $s=1$ 且 $\theta>0$, 则在原点附近, 系统 (8.83) 局部拓扑等价于系统 (8 81).* □

在这种情形, 在参数平面上只有折分支曲线和 Hopf 分支曲线. $\xi$ 轴上的一个平衡点永远是结点. 通过 Hopf 分支生成的环是鞍点型的, 不可能有环面.

此外, 在这种情形, 我们甚至不需要考虑三次项. 仅考虑二次项就足够了.

**引理 8.12** *若 $s=1$ 且 $\theta>0$, 则在原点附近, 系统 (8.83) 局部拓扑等价于系统*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + \rho^2 \\ \dot{\rho} = \beta_2\rho + \theta\xi\rho, \\ \dot{\varphi} = \omega_1 + \vartheta\xi. \end{cases} \tag{8.84}$$

□

此外, 如果取 $\omega_1 = 1$, 并以常数值 $\theta=\theta(0)$ 和 $\vartheta=0$ 代替函数 $\theta(\beta)$ 和 $\vartheta(\beta)$, 分支图保持等价. 由此, 可叙述下面的定理.

**定理 8.7**(简单的折-Hopf 分支) *假设系统*

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x\in\mathbb{R}^3,\ \alpha\in\mathbb{R}^2,$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 它有特征值

$$\lambda_1(0)=0,\quad \lambda_{2,3}(0)=\pm \mathrm{i}\omega_0,\quad \omega_0>0.$$

下面的一般性条件成立:

(ZH0.1) $g_{200}(0)g_{011}(0)>0$;

(ZH0.2) $\theta_0=\dfrac{\mathrm{Re}\ h_{110}(0)}{g_{200}(0)}>0$;

(ZH0.3) 映射 $\alpha\mapsto(\gamma(\alpha),\mu(\alpha))^{\mathrm{T}}$ 在 $\alpha=0$ 正则.

则在原点附近这个系统局部拓扑等价于系统

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\beta_2\rho+\theta_0\zeta\rho,\\ \dot{\varphi}=1,\\ \dot{\zeta}=\beta_1+\zeta^2+\rho^2,\end{cases}$$

这里 $(\rho,\varphi,\zeta)$ 是柱面极坐标. □

在所有其他情形, 加入一般的高阶项分支图就不拓扑等价了. 其理由是系统 (8.81) 的相图具有某些退化特性, 这些特性在一般高阶项的“扰动”下消失.

先解释一下为什么另一个“简单”情形 $s=-1$, $\theta<0$ 对加入高阶项就敏感. 在系统 (8.82) 中 $\xi$ 轴是不变的, 因为 $\rho=0$ 得 $\dot{\rho}=0$. 于是, 在图 8.14 的区域 3 中, 系统 (8.82) 有两个 $\rho=0$ 的鞍–焦点, 其中之一有二维稳定和一维不稳定流形, 另一个有一维稳定和二维不稳定不变流形. 不变轴连接这些鞍–焦点: 在区域 3 有对所有参数的异宿轨道.

反之, (8.83) 中的项 $\Psi_\beta(\xi,\rho,\varphi)=O((\xi^2+\rho^2)^2)$ 对 $\rho=0$ 不必要为零. 于是, $\xi$ 轴不再总是不变的, 而异宿连接一般消失①. 因此, 一般地, (8.81) 和 (8.83) 的分支图不等价.

**注**　$\xi$ 轴的不变性情况可以解释得比上面得到的更细致些. 应用适当的变量变换, 可使得 $\Psi_\beta$ 在 $(\xi,\rho)=(0,0)$ 的 Taylor 展开式中与 $\rho$ 成比例的项直到任意高阶, 保持这个轴在截断规范形中不变. 但是, “尾巴”在一般情况下不再与 $\rho$ 成比例. 这种性质称为楼层(flat), 因为可以把函数 $\Psi$ 分解为

$$\Psi_\beta(\xi,\rho,\varphi)=\rho^4\Psi_\beta^{(0)}(\xi,\rho,\varphi)+\Psi_\beta^{(1)}(\xi,\rho,\varphi),$$

其中 $\Psi^{(1)}$ 关于 $\rho$ 的所有偏导数在 $\rho=0$ 都等于零 ($\rho$的楼层函数). 但是, 一般地, $\Psi_\beta^{(1)}(\xi,0,\varphi)\neq0$. ◇

① 由于我们要调整两个参数去恢复连接, 这只能在 $(\beta_1,\beta_2)$ 平面的孤立点 (8.83) 的这种连接仍可出现.

如果 $s\theta < 0$, 截断规范形 (8.81) 中出现环面, 情况变得更加复杂. (8.83) 中由 Neimark-Sacker 分支而产生的环面仅对对应的分支曲线附近的参数值存在. 如果离开这条曲线, 环面就失去它的光滑性并毁灭. 事情的完全结果还不清楚. 看样子包含有无穷多个分支, 因为 Neimark-Sacker 曲线上的任何一个弱共振点是 Arnold 锁相舌的根 (见第 7 章).

对 $s=1, \theta<0$ 情形可得到更详细的信息. 在这种情形截断规范形 (8.81) 有曲线 $P$, 在此曲线上存在由鞍–焦点的二维不变流形的叠合而形成的球形曲面. 这是一个极度退化的结构, 当加入一般的高阶项时它就消失. 代之以这些不变流形横截相交形成一个*异宿结构*(见图 8.21, 那里这个结构的截面是与异宿轨道 $\Gamma_{1,2}$ 画在一起). 因此, 环面不可能趋于 "球面", 因为它实际并不存在, 在这之前它必须消失. 显然, 由连续性可知, 横截异宿结构的存在性区域应由某些对应于沿着连接鞍–焦点平衡点的异宿轨道的不变流形的*切触曲线*所围.

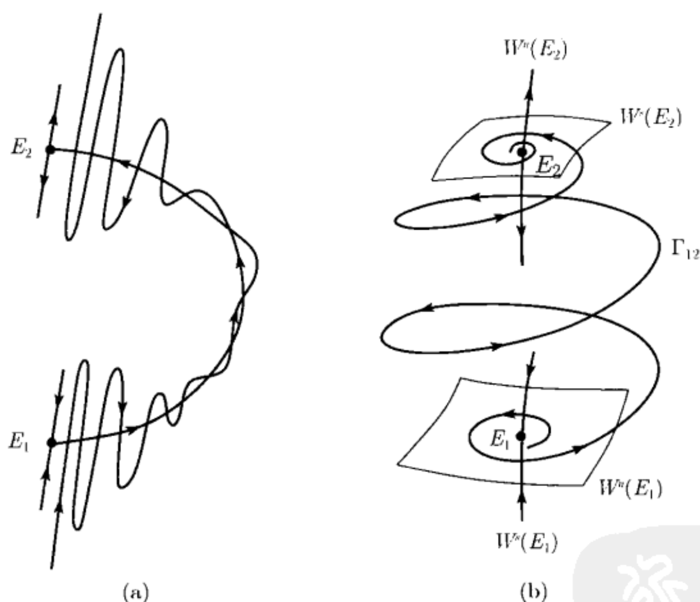



图 8.21　(a) 相交于稳定和不稳定流形的截线; (b) 连接鞍–焦点的异宿轨道

最后, 我们指出, 同宿于鞍–焦点的*同宿轨道*也是可能的, 事实上已经证明在一般情形会出现. 这样的轨道 $\Gamma_{11}$ 可以沿着一个鞍–焦点的二维不稳定流形螺旋转动开始, 在第二个鞍–焦点附近通过, 再沿着一维稳定不变流形回到第一个鞍–焦点 (见图 8.22(a)). 同宿于两个相反方向的鞍–焦点轨道也是可能的. 事实上, 存在两条从参数平面原点出发的彼此相交无穷多次的曲线, 它们对应两个同宿分支. 可以验证, 若同宿轨道存在且

$$-2 < \theta < 0,$$

则对应的鞍点量 $\sigma_0$(见第 6 章) 满足 Shilnikov"混沌" 条件, 导致存在 Smale 马蹄. 此外, 这两个同宿轨道之一位于由第二个鞍–焦点的二维稳定流形所围的吸引区域①(见图 8.22(b)) 的内部. 因此, 在这种情形一个稳定的 "奇怪" 动力学在折 Hopf 分支附近存在.

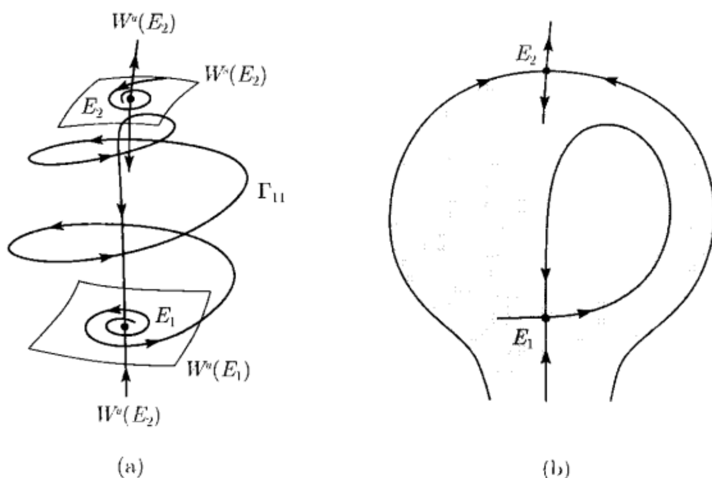



图 8.22　同宿于鞍点 $E_1$ 的一条轨道; (b) 吸引的边界

综上所述, 如果 $s = 1, \theta < 0$, 系统 (8.83) 除了局部分支曲线以外, 还可以有对应于大范围分支 (异宿切触、同宿轨道) 以及长周期极限环分支 (折分支和倍周期瀑布) 的分支集, 它们位于截断规范形 (8.81) 的异宿环曲线 $P$ 附近.

**注**　(1) 事实上, 如果在 $(\xi, \rho)$ 平面上考虑一类系统, 它在二维群 $\mathbb{Z}_2 : (\xi, \rho) \mapsto (\xi, -\rho)$ 表示下是不变的, 则截断平面规范形 (8.82) 有更基本的意义. (8.82) 的高阶项扰动令它在这类对称系统中可写为 (参看第 7 章)

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2 + \tilde{\Theta}_\beta(\xi, \rho^2), \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2) + \rho^4\tilde{\Psi}_\beta(\xi, \rho^2), \end{cases} \tag{8.85}$$

其中 $\tilde{\Theta}_\beta$, $\rho^4\tilde{\Psi}_\beta(\xi, \rho^2) = O((\xi^2 + \rho^2)^2)$. 系统 (8.85) 永远有不变轴 $\rho = 0$. 已经证明满足 $s\theta \neq 0$ 的系统 (8.85) 局部拓扑等价于 (8.82). 此外, 恒同相图的同胚可对所有参数值用变换 $(\xi, \rho) \mapsto (\xi, -\rho)$ 交换选择.

因此, 系统 (8.82) 是具不变轴 $x_2 = 0$ 的平面一般 $\mathbb{Z}_2$ 对称系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = G(x_1, x_2^2, \alpha), \\ \dot{x}_2 = x_2 H(x_1, x_2^2, \alpha) \end{cases}$$

① 回忆在原来系统中仅当 $E(0) > 0$ 时谈论的所有对象事实上是吸引的.

的规范形. 上面的系统在 $\alpha=0$ 有具两个零特征值的平衡点 $x=0$.

(2) 细心的读者也许会问, 如果 $s\theta<0$, 为什么二次项对截断系统 (8.82) 的分析还不够, 以及为什么还必须保留三次项. 理由是 $s\theta<0$ 的系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s\rho^2, \\ \dot{\rho}=\rho(\beta_2+\theta\xi) \end{cases}$$

的 Hopf 分支是退化的. 此外, 如果 $s=1,\theta<0$, 这个分支和由鞍点 $E_{1,2}$ 的分界线所形成的异宿环同时出现. 更确切地说, 系统沿着 "Hopf 直线" $T$ 可积, 对对应的参数值非平凡不动点是中心, 它被一族闭轨线所围. 对 $s=1,\ \theta<0$, 这族曲线被异宿环界定 (见图 8.23(a)), 但是对 $s=-1,\ \theta>0$ 保持无界 (图 8.23(b)). 事实上, 系统对 $\rho>0$ 轨道等价于 Hamilton 系统. 因此, 系统 (8.82) 在直线 $T$ 附近可考虑为 Hamilton 系统的 (仅仅有关的) 三次项的 "扰动". 这一项使得 Hopf 分支非退化, 分裂异宿曲线的铅直轴而 "稳定" 分支图. 用这些性质就可证明系统的极限环的唯一性并推导异宿曲线 $P$ 的渐近公式. 有兴趣的读者可直接看附录 A 以及练习 14(b). ◇

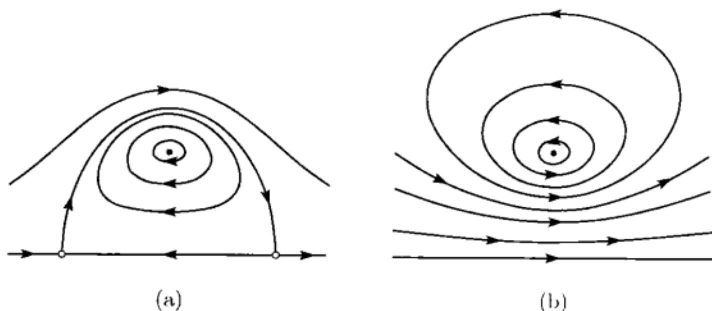



图 8.23 (a) $s=1,\ \theta<0$ ; (b) $s=-1,\ \theta>0$

用中心流形定理可把高维情形的折 Hopf 分支化为已考虑过的情形. 注意, 仅需要中心流形的线性近似以区别 "简单" 情形和 "困难" 情形. 但是, 若要求 $E(0)$, 则需要二阶近似. 在 8.7 节 $n$ 维情形, 回到对 (8.63) 系数的计算.

## 8.6 Hopf-Hopf 分支

考虑依赖于两个参数的四维光滑系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^4,\ \alpha\in\mathbb{R}^2. \tag{8.86}$$

在 $\alpha=0$, 设 (8.6) 有平衡点 $x=0$, 它具有两对不同的纯虚特征值:

$$\lambda_{1,4}=\pm i\omega_1,\quad \lambda_{2,3}=\pm i\omega_2,$$

其中 $\omega_1>\omega_2>0$. 由于没有零特征值, 系统 (8.86) 对所有小 $\|\alpha\|$ 的 $\alpha$ 有接近于 $x=0$ 的平衡点. 假设已经作了依赖于参数的坐标轴平移, 将坐标原点移到这个平衡点. 因此, 不失一般性, 可以假设对所有小的 $\|\alpha\|$, $x=0$ 是系统 (8.86) 的平衡点: $f(0,\alpha)\equiv 0$.

### 8.6.1　规范形的推导

将 (8.86) 写为形式

$$\dot{x}=A(\alpha)x+F(x,\alpha), \tag{8.87}$$

这里 $F(x,\alpha)=O(\|x\|^2)$ 是光滑函数. 矩阵 $A(\alpha)$ 有两对单复共轭特征值

$$\lambda_{1,4}(\alpha)=\mu_1(\alpha)\pm i\omega_1(\alpha),\quad \lambda_{2,3}(\alpha)=\mu_2(\alpha)\pm i\omega_2(\alpha),$$

对所有充分小 $\|\alpha\|$, $\mu_{1,2}$ 和 $\omega_{1,2}$ 是 $\alpha$ 的光滑函数且

$$\mu_1(0)=\mu_2(0)=0,\quad \omega_1(0)>\omega_2(0)>0.$$

由于特征值是单的, 存在对应于特征值 $\lambda_{1,2}(\alpha)=\mu_{1,2}(\alpha)\pm i\omega_{1,2}(\alpha)$ 的两个复特征向量 $q_{1,2}(\alpha)\in\mathbb{C}^4$:

$$A(\alpha)q_1(\alpha)=\lambda_1(\alpha)q_1(\alpha),\quad A(\alpha)q_2(\alpha)=\lambda_2(\alpha)q_2(\alpha).$$

如通常, 用

$$A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_1(\alpha)=\bar{\lambda}_1(\alpha)p_1(\alpha),\quad A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_2(\alpha)=\bar{\lambda}_2(\alpha)p_2(\alpha).$$

引入伴随特征向量 $p_{1,2}(\alpha)\in\mathbb{C}^4$, 其中 T 表示转置. 这些特征向量可以选择光滑依赖于 $\alpha$, 用 $\mathbb{C}^4$ 中的标准数量积标准化

$$\langle p_1,q_1\rangle=\langle p_2,q_2\rangle=1,$$

且使得满足正交条件

$$\langle p_2,q_1\rangle=\langle p_1,q_2\rangle=0,$$

因此它们在 $\mathbb{C}^4$ 中形成一个**双正交向量集**. 注意, 我们永远用数量积 $\langle v,w\rangle=\sum_{k=1}^{4}\bar{v}_k w_k$, 它对第二个量是线性的. 任何实向量 $x\in\mathbb{R}^4$ 对每一个小 $\|\alpha\|$ 可表示为

$$x=z_1q_1+\bar{z}_1\bar{q}_1+z_2q_2+\bar{z}_2\bar{q}_2,$$

其中

$$z_1 = \langle p_1, x\rangle, \quad z_2 = \langle p_2, x\rangle$$

是新复坐标, $z_{1,2} \in \mathbb{C}^1$ (参看 3.5 节). 在这坐标下, 系统 (8.87) 取形式

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha) z_1 + g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha), \\ \dot{z}_2 = \lambda_2(\alpha) z_2 + h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha), \end{cases} \tag{8.88}$$

其中

$$\begin{aligned} g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \langle p_1, F(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2, \alpha)\rangle, \\ h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \langle p_2, F(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2, \alpha)\rangle \end{aligned}$$

(为简单起见, $p_k, q_l$ 依赖于参数没有标出). 函数 $g$ 和 $h$ 是它们变量的复值光滑函数并有关于它们前面四个变量从二次项开始的形式 Taylor 展开:

$$g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) = \sum_{j+k+l+m \geqslant 2} g_{jklm}(\alpha) z_1^k \bar{z}_1^l z_2^l \bar{z}_2^m$$

和

$$h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) = \sum_{j+k+l+m \geqslant 2} h_{jklm}(\alpha) z_1^k \bar{z}_1^l z_2^l \bar{z}_2^m,$$

**引理 8.13**(Poincaré 规范形)　假设

(HH.0) $k\omega_1(0) \neq l\omega_2(0), \quad k, l > 0,\ k + l \leqslant 5.$

则存在局部定义且光滑依赖于参数的复变量的光滑可逆变换, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 将 (8.88) 化为形式

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \lambda_1(\alpha) w_1 + G_{2100}(\alpha) w_1 |w_1|^2 + G_{1011}(\alpha) w_1 |w_2|^2 \\ \qquad + G_{3200}(\alpha) w_1 |w_1|^4 + G_{2111}(\alpha) w_1 |w_1|^2 |w_2|^2 + G_{1022}(\alpha) w_1 |w_2|^4 \\ \qquad + O(\|(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)\|^6), \\ \dot{w}_2 = \lambda_2(\alpha) w_2 + H_{1110}(\alpha) w_2 |w_1|^2 + H_{0021}(\alpha) w_2 |w_2|^2 \\ \qquad + H_{2210}(\alpha) w_2 |w_1|^4 + H_{1121}(\alpha) w_2 |w_1|^2 |w_2|^2 + H_{0032}(\alpha) w_2 |w_2|^4 \\ \qquad + O(\|(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)\|^6), \end{cases} \tag{8.89}$$

其中 $w_{1,2} \in \mathbb{C}^1$ 且 $\|(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)\|^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2$. 复值函数 $G_{jklm}(\alpha)$ 和 $H_{jklm}(\alpha)$ 光滑. 此外,

$$G_{2100}(0) = g_{2100} + \frac{\mathrm{i}}{\omega_1} g_{1100} g_{2000} + \frac{\mathrm{i}}{\omega_2}(g_{1010} h_{1100} - g_{1001} \bar{h}_{1100})$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1+\omega_2} g_{0101}\bar{h}_{0200} - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1-\omega_2} g_{0110}h_{2000} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{\omega_1}|g_{1100}|^2 - \frac{2\mathrm{i}}{3\omega_1}|g_{0200}|^2,
\end{aligned} \tag{8.90}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{1011}(0) =& g_{1011} + \frac{\mathrm{i}}{\omega_2}(g_{1010}h_{0011} - g_{1001}\bar{h}_{0011}) \\
&- \frac{\mathrm{i}}{\omega_1}(2g_{2000}g_{0011} - g_{1100}\bar{g}_{0011} - g_{0011}\bar{h}_{0110} - g_{0011}h_{1010} \\
&- \frac{2\mathrm{i}}{\omega_1+2\omega_2} g_{0002}\bar{h}_{0101} - \frac{2\mathrm{i}}{\omega_1-2\omega_2} g_{0020}h_{1001} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1-\omega_2}|g_{0110}|^2 - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1+\omega_2}|g_{0101}|^2,
\end{aligned} \tag{8.91}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{1110}(0) =& h_{1110} + \frac{\mathrm{i}}{\omega_1}(g_{1100}h_{1010} - \bar{g}_{1100}h_{0110}) \\
&+ \frac{\mathrm{i}}{\omega_2}(2h_{0020}g_{1100} - h_{0011}\bar{h}_{1100} - g_{1010}h_{1100} - \bar{g}_{1001}h_{1100}) \\
&+ \frac{2\mathrm{i}}{2\omega_1-\omega_2} g_{0110}h_{2000} - \frac{2\mathrm{i}}{2\omega_1+\omega_2} \bar{g}_{0101}h_{0200} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2\omega_2-\omega_1}|h_{1001}|^2 - \frac{\mathrm{i}}{\omega_1+2\omega_2}|h_{0101}|^2,
\end{aligned} \tag{8.92}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{0021}(0) =& h_{0021} + \frac{\mathrm{i}}{\omega_1}(g_{0011}h_{1010} - \bar{g}_{0011}h_{0110}) + \frac{\mathrm{i}}{\omega_2}h_{0011}h_{0020} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2\omega_2-\omega_1} g_{0020}h_{1001} - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_2+\omega_1} \bar{g}_{0002}h_{0101} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{\omega_2}|h_{0011}|^2 - \frac{2\mathrm{i}}{3\omega_2}|h_{0002}|^2,
\end{aligned} \tag{8.93}
$$

*其中所有 $g_{jklm}$ 和 $h_{jklm}$ 必须在 $\alpha = 0$ 计算.* □

注意, 上面公式中每一个的最后一行都是纯虚数. 引理可用标准的规范化技巧证明. 本章练习 15 中的提示解释如何应用计算代数系统之一对它们作必要的计算. 这里没有给出五阶共振项系数的明显公式, 是由于它们太长 (见附录 B 中的参考文献). 正如我们将看到, 所给公式已经足够去区别 Hopf-Hopf 分支的 “简单” 情形和 “困难” 情形.

引入新时间和变量变换, 其中包括三次 “共振项”, 就可进一步简化规范形 (8.89).

**引理 8.14** 假设

(HH.1) Re $G_{2100}(0) \neq 0$;

(HH.2) Re $G_{1011}(0) \neq 0$;

(HH.3) Re $H_{1110}(0) \neq 0$;

(HH.4) Re $H_{0021}(0) \neq 0$.

则系统

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \lambda_1(\alpha)w_1 + G_{2100}(\alpha)w_1|w_1|^2 + G_{1011}(\alpha)w_1|w_2|^2 \\ \qquad +G_{3200}(\alpha)w_1|w_1|^4 + G_{2111}(\alpha)w_1|w_1|^2|w_2|^2 + G_{1022}(\alpha)w_1|w_2|^4 \\ \qquad +O(||(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)||^6), \\ \dot{w}_2 = \lambda_2(\alpha)w_2 + H_{1110}(\alpha)w_2|w_1|^2 + H_{0021}(\alpha)w_2|w_2|^2 \\ \qquad +H_{2210}(\alpha)w_2|w_1|^4 + H_{1121}(\alpha)w_2|w_1|^2|w_2|^2 + H_{0032}(\alpha)w_2|w_2|^4 \\ \qquad +O(||(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)||^6) \end{cases} \tag{8.94}$$

在原点附近局部光滑轨道等价于系统

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \lambda_1(\alpha)v_1 + P_{11}(\alpha)v_1|v_1|^2 + P_{12}(\alpha)v_1|v_2|^2 \\ \qquad +\mathrm{i}R_1(\alpha)v_1|v_1|^4 + S_1(\alpha)v_1|v_2|^4 \\ \qquad +O(||(v_1, \bar{v}_1, v_2, \bar{v}_2)||^6), \\ \dot{v}_2 = \lambda_2(\alpha)v_2 + P_{21}(\alpha)v_2|v_1|^2 + P_{22}(\alpha)v_2|v_2|^2 \\ \qquad +S_2(\alpha)v_2|v_1|^4 + \mathrm{i}R_2(\alpha)v_2|v_2|^4 \\ \qquad +O(||(v_1, \bar{v}_1, v_2, \bar{v}_2)||^6), \end{cases} \tag{8.95}$$

其中 $v_{1,2} \in \mathbb{C}^1$ 是新复变量, $P_{jk}(\alpha)$ 和 $S_k(\alpha)$ 是复值光滑函数, 以及 $R_k(\alpha)$ 是实值光滑函数.

**证明**　在 (8.94) 中引入新时间 $\tau$:

$$\mathrm{d}t = (1 + e_1|w|^2 + e_2|w_2|^2)\mathrm{d}\tau,$$

其中实函数 $e_1 = e_1(\alpha)$ 和 $e_2 = e_2(\alpha)$ 将以后确定. 所得系统与 (8.94) 有相同的共振项, 但是系数有些改变.

于是, 执行包括 “共振” 三次项的光滑可逆变换

$$\begin{cases} v_1 = w_1 + K_1 w_1|w_1|^2, \\ v_2 = w_2 + K_2 w_2|w_2|^2, \end{cases} \tag{8.96}$$

这里 $K_j = K_j(\alpha)$ 待定复值函数. 在新变量 $(v_1, v_2)$ 下系统取形式

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \lambda_1 v_1 + \sum\limits_{j+k+l+m \geqslant 3} \hat{G}_{jklm} v_1^k \bar{v}_1^l v_2^l \bar{v}_2^m, \\ \dot{v}_2 = \lambda_2 v_2 + \sum\limits_{j+k+l+m \geqslant 3} \hat{H}_{jklm} v_1^k \bar{v}_1^l v_2^l \bar{v}_2^m, \end{cases} \tag{8.97}$$

其中的 · 表示关于 $\tau$ 的导数, 且

$$\hat{G}_{2100} = G_{2100} + \lambda_1 e_1 + (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)K_1, \quad \hat{G}_{1011} = G_{1011} + \lambda_1 e_2,$$
$$\hat{H}_{1110} = H_{1110} + \lambda_2 e_1, \quad \hat{H}_{0021} = H_{0021} + \lambda_2 e_2 + (\lambda_2 + \bar{\lambda}_2)K_2,$$

以及

$$\begin{aligned}\hat{G}_{3200} =& G_{3200} + G_{2100}e_1 + (K_1\bar{\lambda}_1 - \bar{K}_1\lambda_1)e_1 \\ &+ K_1\bar{G}_{2100} - \bar{K}_1 G_{2100} - 2(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)K_1^2 - |K_1|^2\bar{\lambda}_1,\end{aligned} \tag{8.98}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{2111} =& G_{2111} + G_{1011}e_1 + G_{2100}e_2 + (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)e_2 K_1 \\ &+ 2K_1 \text{ Re } G_{1011},\end{aligned} \tag{8.99}$$

$$\hat{G}_{1022} = G_{1022} + G_{1011}e_2 - 2\lambda_1 e_2 \text{ Re } K_2 - 2G_{1011} \text{ Re } K_2,$$

$$\hat{H}_{2210} = H_{2210} + H_{1110}e_1 - 2\lambda_2 e_1 \text{ Re } K_1 - 2H_{1110} \text{ Re } K_1,$$

$$\hat{H}_{1121} = H_{1121} + H_{0021}e_1 + H_{1110}e_2 + (\lambda_2 + \bar{\lambda}_2)e_1 K_2 + 2K_2 \text{ Re } G_{1110}, \tag{8.100}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{0032} =& H_{0032} + H_{0021}e_2 + (K_2\bar{\lambda}_2 - \bar{K}_2\lambda_2)e_2 \\ &+ K_2\bar{H}_{0021} - \bar{K}_2 H_{0021} - 2(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2)K_2^2 - |K_2|^2\bar{\lambda}_2.\end{aligned} \tag{8.101}$$

注意, 变换 (8.96)带来四阶项, 它们在 Poincaré 规范形中没有出现. 这些项的消去会改变 (8.97) 中的五阶项. 但是, 由于 (8.96) 的特殊形式, 在去掉出现在 (8.97) 中四阶项时并不改变上面给出的五阶共振项的系数 (验证). 于是, 这些系数并不因为五阶非共振项的消去而改变. 故假设这样的消去工作在 (8.97) 已经做了, 因此它只包含直到五阶的共振项.

考虑到 (8.99) 和 (8.100), 可置

$$K_1 = -\frac{G_{2111} + G_{1011}e_1 + G_{2100}e_2}{(\lambda_2 + \bar{\lambda}_1)e_2 + 2 \text{ Re } G_{1011}}$$

和

$$K_2 = -\frac{H_{1121} + H_{0021}e_1 + H_{1110}e_2}{(\lambda_2 + \bar{\lambda}_2)e_1 + 2 \text{ Re } H_{1110}}.$$

使得 $\hat{G}_{2111} = 0$ 和 $\hat{H}_{1121} = 0$. 回忆 $K_{1,2}$ 是 $\alpha$ 的函数. 由于假设 (HH.2) 和 (HH.3) 这个设置对所有充分小 $\|\alpha\|$ 成立.

我们仍有两个自由系数 $e_1$ 和 $e_2$. 要求对所有充分小 $\|\alpha\|$, 以

$$\begin{cases} \text{Re } \hat{G}_{3200} = 0, \\ \text{Re } \hat{H}_{0032} = 0 \end{cases} \tag{8.102}$$

来固定它们. 我们期望对所有充分小的 $\|\alpha\|$, 存在满足 (8.102) 的光滑函数 $e_{1,2}(\alpha)$. 为看到这一点, 我们指出对 $\alpha=0$, 有 $2\ \text{Re}\ \lambda_{1,2}=\lambda_{1,2}+\bar{\lambda}_{1,2}=0$, 系统 (8.102) 按照 (8.98) 和 (8.101) 化为 $(e_1(0),e_2(0))$ 的线性系统, 即

$$\begin{cases} \text{Re}\ G_{2100}(0)e_1(0)=-\text{Re}\ G_{3200}(0), \\ \text{Re}\ \text{H}_{0021}(0)e_2(0)=-\text{Re}\ G_{0032}(0), \end{cases} \tag{8.103}$$

由于 (HH.1) 和 (HH.4), 行列式不等于零

$$\begin{vmatrix} G_{2100}(0) & 0 \\ 0 & H_{0021}(0) \end{vmatrix}=G_{2100}(0)H_{0021}(0)\neq 0.$$

系统 (8.103) 显然有唯一解

$$e_1(0)=-\frac{\text{Re}\ G_{3200}(0)}{\text{Re}\ G_{2100}(0)},\quad e_2(0)=-\frac{\text{Re}\ G_{0032}(0)}{\text{Re}\ G_{0021}(0)}$$

因此, 由隐函数定理对所有充分小 $\|\alpha\|$, (8.102) 有光滑依赖于 $\alpha$ 的唯一解 $(e_1(\alpha), e_2(\alpha))$, $e_{1,2}(\alpha)$.

因此, 对所有充分小 $\alpha$, $\hat{G}_{1022}=0$, $\hat{H}_{2210}=0$, $\text{Re}\ \hat{G}_{3200}=0$ 和 $\text{Re}\ \hat{H}_{0032}=0$, 故系统 (8.97) 有形式 (8.95), 其中 $P_{11}=\hat{G}_{2100}$, $P_{12}=\hat{G}_{1011}$, $P_{21}=\hat{H}_{1110}, P_{22}=\hat{H}_{0021}$, $S_1=\hat{G}_{1022}$, $S_2=\hat{H}_{2210}$, $R_1=\text{Im}\ \hat{G}_{3200}$ 以及 $R_2=\text{Im}\ \hat{H}_{0032}$. 容易验证

$$\text{Re}\ P_{11}(0)=\text{Re}\ G_{2100}(0),\quad \text{Re}\ P_{12}(0)=\text{Re}\ G_{1011}(0), \tag{8.104}$$

$$\text{Re}\ P_{21}(0)=\text{Re}\ H_{1110}(0),\quad \text{Re}\ P_{22}(0)=\text{Re}\ H_{0021}(0), \tag{8.105}$$

以及

$$\begin{aligned}\text{Re}\ S_1(0)=&\text{Re}\ G_{1022}(0)+\text{Re}\ G_{1011}(0)\left[\frac{\text{Re}\ H_{1121}(0)}{\text{Re}\ H_{1110}(0)}-2\frac{\text{Re}\ H_{0032}(0)}{\text{Re}\ H_{0021}(0)}\right.\\ &\left.-\frac{\text{Re}\ H_{3200}(0)\ \text{Re}\ H_{0021}(0)}{\text{Re}\ H_{2100}(0)\ \text{Re}\ H_{1110}(0)}\right],\end{aligned} \tag{8.106}$$

$$\begin{aligned}\text{Re}S_2(0)=&\text{Re}\ G_{2210}(0)+\text{Re}\ G_{1110}(0)\left[\frac{\text{Re}\ H_{2111}(0)}{\text{Re}\ H_{1011}(0)}-2\frac{\text{Re}\ G_{3200}(0)}{\text{Re}\ G_{2100}(0)}\right.\\ &\left.-\frac{\text{Re}\ G_{2100}(0)\ \text{Re}\ H_{0032}(0)}{\text{Re}\ G_{1011}(0)\ \text{Re}\ H_{0021}(0)}\right].\end{aligned} \tag{8.107}$$

这就证明了引理. □

设

$$v_1=\text{e}^{\text{i}\varphi_1},\quad v_2=\text{e}^{\text{i}\varphi_2}.$$

在极坐标 $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ 下, 系统 (8.95) 可写为

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu_1(\alpha) + p_{11}(\alpha)r_1^2 + p_{12}(\alpha)r_2^2 + s_1(\alpha)r_2^4) \\ \qquad +\Phi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \alpha), \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu_2(\alpha) + p_{21}(\alpha)r_1^2 + p_{22}(\alpha)r_2^2 + s_2(\alpha)r_1^4) \\ \qquad +\Phi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \alpha), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1(\alpha) + \Psi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \alpha), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2(\alpha) + \Psi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \alpha). \end{cases}$$

这里

$$p_{jk} = \text{Re } P_{jk}, \quad s_j = \text{Re } S_j, \quad j, k = 1, 2$$

是 $\alpha$ 的光滑函数; 实函数 $\Phi_k$ 和 $\Psi_k$ 是它们变量的光滑函数且是 $\varphi_j$ 的 $2\pi$ 周期函数, $\Phi_k = O((r_1^2 + r_2^2)^3)$, $\Psi_k(0, 0, \varphi_1, \varphi_2) = 0$, $k = 1, 2$.

如果映射 $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha))$ 在 $\alpha=0$ 正则, 即

$$\det \left( \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) \bigg|_{\alpha=0} \neq 0,$$

则可用 $(\mu_1, \mu_2)$ 对参数平面的原点小邻域参数化, 并考虑 $\omega_k, p_{jk}, s_k, \Phi_k$ 和 $\Psi_k$ 为 $\mu$ 的函数.

我们用下面的定理结束这一节.

**定理 8.8**　*考虑光滑系统*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^4, \ \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

*在 $\alpha = 0$, 它有平衡点 $x = 0$, 具特征值*

$$\lambda_k(\alpha) = \mu_k(\alpha) \pm \mathrm{i}\omega_k(\alpha), \quad k = 1, 2,$$

*满足*

$$\mu_1(0) = \mu_2(0) = 0, \quad \omega_{1,2}(0) > 0.$$

*设下面的非退化条件满足:*

(HH.0) $k\omega_1(0) \neq l\omega_2(0)$, $k, l > 0$, $k + l \leqslant 5$;

(HH.1) $p_{11}(0) = \text{Re } G_{2100}(0) \neq 0$;

(HH.2) $p_{12}(0) = \text{Re } G_{1011}(0) \neq 0$;

(HH.3) $p_{21}(0) = \text{Re } H_{1110}(0) \neq 0$;

(HH.4) $p_{22}(0) = \text{Re } H_{0021}(0) \neq 0$,

*其中 $G_{2100}(0)$, $G_{1011}(0)$, $H_{1110}(0)$ 和 $H_{0021}(0)$ 是由 (8.90)~(8.93) 给出, 以及*

(HH.5) 映射 $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 正则.
则在原点附近系统局部光滑轨道等价于系统

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu_1 + p_{11}(\mu)r_1^2 + p_{12}(\mu)r_2^2 + s_1(\mu)r_2^4) + \Phi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \mu), \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu_2 + p_{21}(\mu)r_1^2 + p_{22}(\mu)r_2^2 + s_2(\mu)r_1^4) + \Phi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \mu), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1(\mu) + \Psi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \mu), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2(\mu) + \Psi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \mu), \end{cases} \tag{8.108}$$

其中 $\Phi_k = O((r_1^2 + r_2^2)^3)$ 和 $\Psi_k = o(1)$ 是 $\varphi_k$ 的 $2\pi$ 周期函数, 系数 $p_{jk}(0)$ 和 $s_k(0)$, $j, k=1,2$ 可用公式(8.104)~(8.107) 计算, 只要共振系数 $G_{jklm}(0)$ 和 $H_{jklm}(0)$ 对 $j+k+l+m=3$ 和 5 已知. □

### 8.6.2 截断规范形的分支图

现在截断 (8.108) 的高阶项而考虑系统

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \end{cases} \tag{8.109}$$

这里, 为简单起见, $p_{jk}, s_k$ 和 $\omega_k$ 关于 $\mu$ 的依赖性没有标出. (8.109) 第一对方程与第二对无关. 最后两个方程刻画平面 $r_2 = 0$ 和 $r_1 = 0$ 分别以角速度 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的旋转. 因此, (8.109) 的分支图是由平面系统

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4) \end{cases} \tag{8.110}$$

确定. 这个系统通常称为(截断) 振幅系统. 只要研究 $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ 就足够了. 形式上, 系统在变换 $r_1 \mapsto -r_1$ 和 $r_2 \mapsto -r_2$ 下不变. 注意, (8.110) 的 $r_1 = r_2 = 0$ 的平衡点 $E_0$ 对应四维系统 (8.109) 在原点的平衡点. 在 (8.110) 的不变轴上可能的平衡点对应 (8.109)$r_1 = 0$ 或 $r_2 = 0$ 的环, (8.110) 的具 $r_{1,2} > 0$ 非平凡平衡点生成 (8.109) 的二维环面. 最后, 若振幅系统 (8.110) 产生极限环, 则 (8.109) 有三维环面. (8.109) 中所有这些不变集的稳定性可从 (8.110) 中对应的对象中清楚地观察到.

如果用振幅的平方 $\rho_{1,2}$:

$$\rho_k = r_k^2, \quad k = 1, 2$$

来研究振幅系统就可简化.

对 $\rho_{1,2}$ 方程, 有

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1(\mu_1 + p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + s_1\rho_2^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2(\mu_2 + p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + s_2\rho_1^2), \end{cases} \tag{8.111}$$

也称它为**振幅方程**. 现在方程右端的多项式的次数是 3.

(8.111) 存在两种本质不同的分支图, 它们依赖于 $p_{11}$ 和 $p_{22}$ 具相同符号还是不同符号. 对每一种情形, 还有不同的子情形.

(1) "简单" 情形: $p_{11}p_{22} > 0$

考虑情形

$$p_{11} < 0, \quad p_{22} < 0.$$

$p_{11}$ 和 $p_{22}$ 都是正的情况可改变时间方向化为这种情形. 在 (8.111) 中引入新相变量和时间尺度化:

$$\xi_1 = -p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t,$$

把系统化为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2(\mu_2 - \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \tag{8.112}$$

这里

$$\theta = \frac{p_{12}}{p_{22}}, \quad \delta = \frac{p_{21}}{p_{11}}, \quad \Theta = \frac{s_1}{p_{22}^2}, \quad \Delta = \frac{s_2}{p_{11}^2}. \tag{8.113}$$

由 (HH.1) 和 (HH.2) 知 $p_{11}p_{22} \neq 0$, 故尺度化非奇异. 只有值 $\theta(0), \delta(0), \Theta(0)$ 和 $\Delta(0)$ 对下面有关. 注意, 由于 (HH.2) 和 (HH.3), 分别有 $\theta \neq 0$ 和 $\delta \neq 0$.

系统 (8.112) 对所有 $\mu_{1,2}$ 有平衡点 $E_0 = (0,0)$. 从分支直线

$$H_1 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0\}$$

和

$$H_2 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = 0\}$$

在原点分别分支出两个平凡平衡点:

$$E_1 = (\mu_1, 0), \quad E_2 = (0, \mu_2).$$

对充分小的 $||\mu||$ 在相空间原点的小邻域内也存在非平凡平衡点, 即

$$E_3 = \left(-\frac{\mu_1 - \theta\mu_2}{\theta\delta - 1} + O(||\mu||^2), \ \frac{\delta\mu_1 - \mu_2}{\theta\delta - 1} + O(||\mu||^2)\right).$$

为使这个表达式有效, 需假设 $\theta\delta - 1 \neq 0$, 它等价于条件

(HH.6) $\det\begin{pmatrix} p_{11}(0) & p_{12}(0) \\ p_{21}(0) & p_{22}(0) \end{pmatrix} \neq 0.$

非平凡平衡点 $E_3$ 与平凡平衡点在分支曲线

$$T_1 = \{(\mu_1, \mu_2):\ \mu_1 = \theta\mu_2 + O(\mu_2^2),\ \mu_2 > 0\}$$

和

$$T_2 = \{(\mu_1, \mu_2):\ \mu_2 = \delta\mu_1 + O(\mu_1^2),\ \mu_1 > 0\}.$$

上从正象限中重合而消失. 这些是非平凡平衡点 $E_3$ 在 "简单" 情形仅有的分支. 此外, 可容易验证在这情形平面系统 (8.112) 不可能有周期轨道.

不失一般性, 可假设

$$\theta \geqslant \delta$$

(否则, 改变时间方向并交换 (8.112) 中的下标). 在所有这些假设下, (8.112) 存在五种拓扑不同的分支图, 它们对应于下面的情形:

I. $\theta > 0,\ \delta > 0,\ \theta\delta > 1$;

II. $\theta > 0,\ \delta > 0,\ \theta\delta < 1$;

III. $\theta > 0,\ \delta < 0$;

IV. $\theta < 0,\ \delta < 0,\ \theta\delta < 1$;

V. $\theta < 0,\ \delta < 0,\ \theta\delta > 1$.

每一种情形在 $(\theta, \delta)$ 半平面 $\theta \geqslant \delta$ 内指定一个区域 (见图 8.24). 对应于区域 I~V 的 $(\mu_1, \mu_2)$ 参数图如图 8.25 所示, 仅有 15 种可能的一般相图占据图 8.26. 注意相图 11~15 可从区域 2, 3, 6, 8 和 9 中的相图用反射 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$ 得到.

事实上, 在所有这些情形, 分支图的拓扑与三次项无关, 故在 (8.112) 中可仅令 $\Theta = \Delta = 0$.

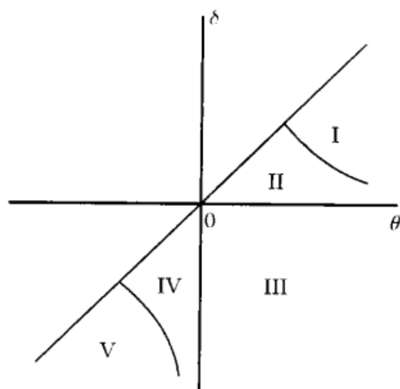



图 8.24 在 "简单" 情形 $(\theta, \delta)$ 平面内的五个区域

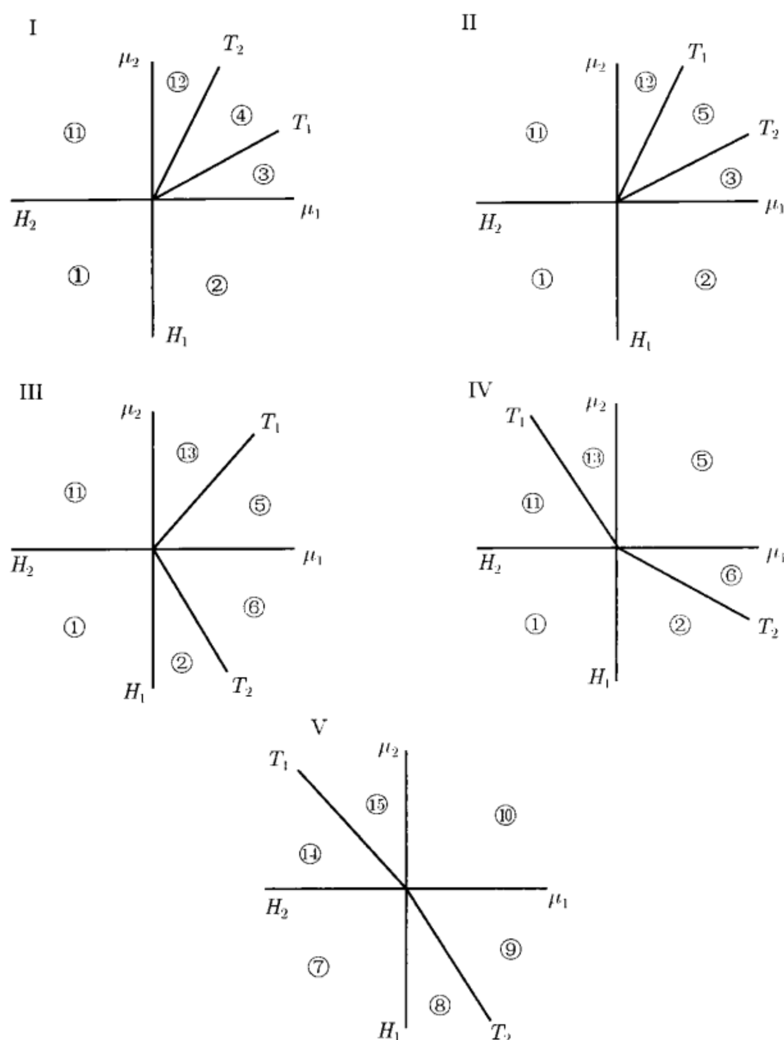



图 8.25　(8.112) 的参数图 (“简单” 情形)

**引理 8.15**　*系统 (8.112) 在原点附近局部拓扑等价于系统*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2(\mu_2 - \delta\xi_1 - \xi_2). \end{cases} \tag{8.114}$$

□

(2) “困难” 情形: $p_{11}p_{22} < 0$

与上一情形类似, 假设条件 (HH.1)~(HH.4) 和 (HH.6) 成立, 且仅考虑

$$p_{11} > 0, \quad p_{22} < 0.$$

在 (8.111) 中引入新相变量和时间尺度化:

$$\xi_1 = p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t,$$

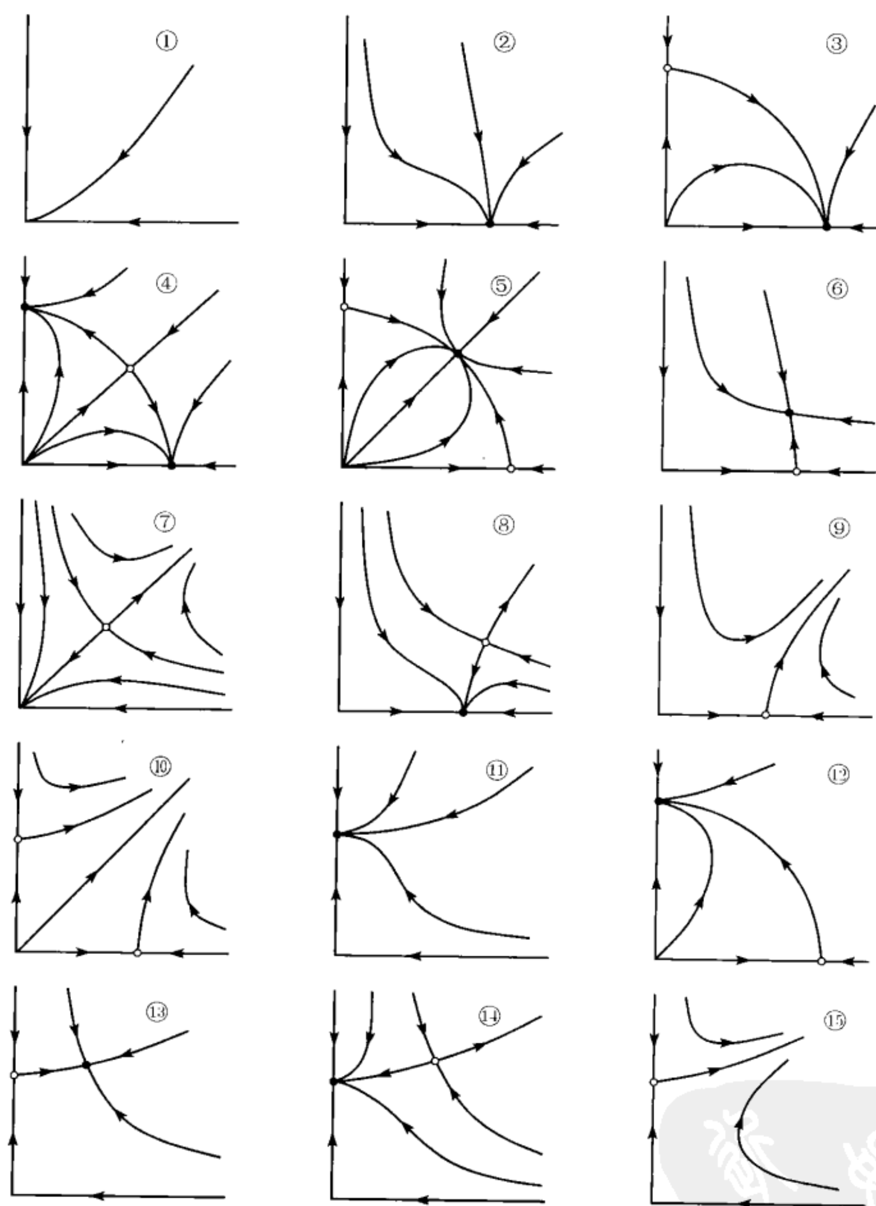



图 8.26 (8.112) 的一般相图

得系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\mu_1 + \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2(\mu_2 + \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \tag{8.115}$$

其中 $\theta, \delta, \Theta$ 和 $\Delta$ 如前由 (8.113) 给出. (8.115) 平凡和非平凡平衡点有表达式

$$E_1 = (-\mu_1, 0), \quad E_2 = (0, \mu_2)$$

和

$$E_3 = \left( \frac{\mu_1 - \theta\mu_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\mu\|^2),\ \frac{\delta\mu_1 - \mu_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\mu\|^2) \right),$$

只要它们的坐标非负. 对应出现平衡点 $E_{1,2}$ 的分支直线形式上与 “简单” 情形相同, 并与坐标轴重合. 非平凡平衡点 $E_3$ 与在曲线

$$T_1 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = \theta\mu_2 + O(\mu_2^2),\ \mu_2 > 0\}$$

和

$$T_2 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = \theta\mu_1 + O(\mu_1^2),\ \mu_1 > 0\}$$

上的平凡平衡点重合. 但是非平凡平衡点 $E_3$ 可以产生分支, 系统 (8.115) 因而可以有极限环. 平衡点 $E_3$ 在下面表示的曲线 $C$ 上发生 Hopf 分支:

$$C = \left\{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = -\frac{\delta - 1}{\theta - 1}\mu_1 + O(\mu_1^2),\ \mu_1 - \theta\mu_2 > 0,\ \delta\mu_1 - \mu_2 > 0\right\}.$$

显然, 在这种情形必须假设 $\delta \neq 1$ 和 $\theta \neq 1$, 以避免曲线 $C$ 与 $\mu_1$ 轴或 $\mu_2$ 轴相切, 即

(HH.7) $p_{11}(0) \neq p_{12}(0)$;

(HH.8) $p_{21}(0) \neq p_{22}(0)$.

最后一个非退化条件是第一个 Lyapunov 系数 $l_1$ 在原点附近沿着 Hopf 曲线 $C$ 不为零. 可以验证, 对充分小的 $\|\mu\|$,

$$\text{sign}\ l_1 = \text{sign} \left\{ \frac{\delta - 1}{\theta - 1} [\theta(-1)\Delta + \delta(\delta - 1)\Theta] \right\}.$$

因此, 假设 $\theta(-1)\Delta + \delta(\delta - 1)\Theta \neq 0$, 或者等价地,

(HH.9) $(p_{21}(p_{21} - p_{11})s_1 + p_{12}(p_{12} - p_{22})s_2)(0) \neq 0$.

假设 $l_1 < 0$. 相反情形可类似处理. 如果只考虑情形 $p_{11} > 0, p_{22} < 0, l_1 < 0$ 且限制注意半平面 $\theta \geqslant \delta$, 则 (8.115) 存在六种本质不同的分支图. 这些子情形是

I. $\theta > 1,\ \delta > 1$;

II. $\theta > 1,\ \delta < 1,\ \theta\delta > 1$;

III. $\theta > 0,\ \delta > 0,\ \theta\delta < 1$;

IV. $\theta > 0,\ \delta < 0$;

V. $\theta < 0,\ \delta < 0,\ \theta\delta < 1$;

VI. $\theta < 0,\ \delta < 0,\ \theta\delta > 1$.

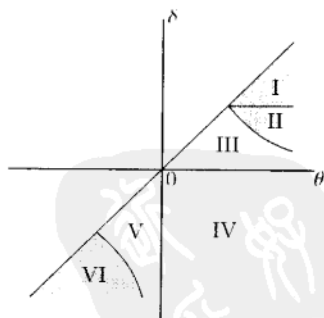



图 8.27　$(\theta, \delta)$ 平面上 “困难” 情形的六个子区域. 环在三个灰色的子区域中存在

对应于图 8.27 所示的区域 I~VI 的参数图描述在图 8.28 中, 出现的 21 个不同的一般相图如图 8.29 所示.

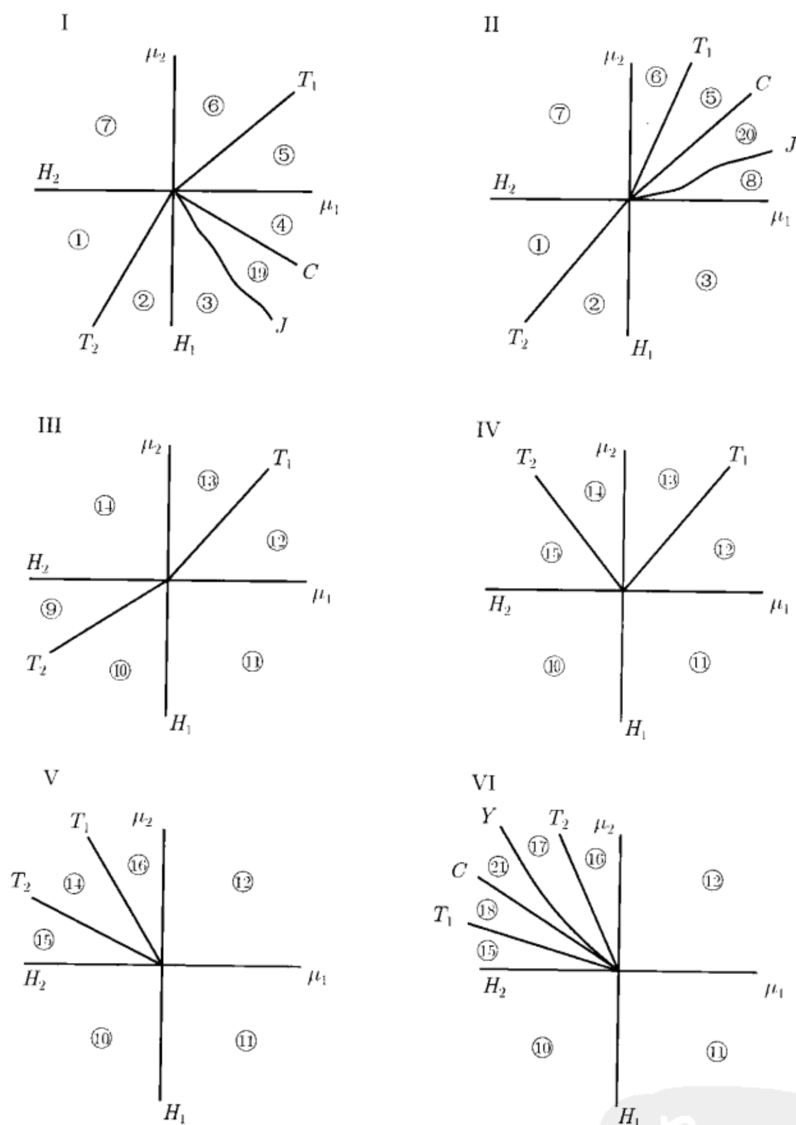



图 8.28　(8.115)(“困难” 情形) 的参数图

Hopf 分支以及因此存在环只可能在情形 I, II 和 VI 发生. 基于 Pontryagin 技巧的仔细分析和对系统 (8.115) 的 Abel 积分的非平凡估计可证明系统有不多于一个极限环(参看文献评注). 这个环是由在曲线 $C$ 上的 Hopf 分支产生. 它的最终命运取决于落入情形 I, II 还是 VI.

在情形 I, II 有类似于折-Hopf 分支的一种情形的环爆炸(见 8.5.2 节). 更确切地说, 存在一条依赖于相空间原点所考虑的邻域 $U_0$ 的分支曲线 $J$, 在这条曲线上环由 Hopf 分支产生, 在接触到 $U_0$ 的边界时 “消失”. 在情形 VI., 以更 “明显”

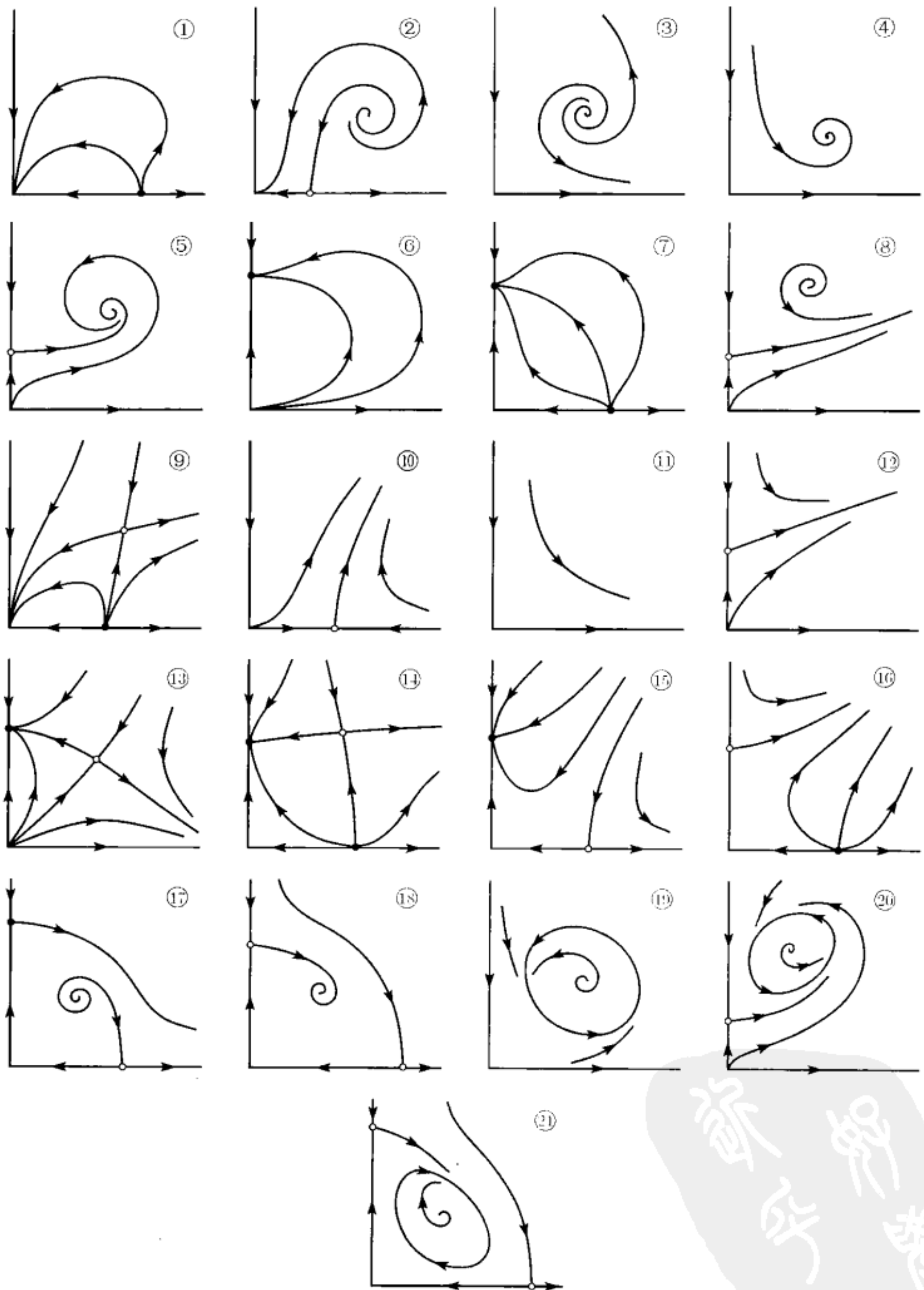



图 8.29　(8.115) 的一般相图

的方式消失, 即由于**异宿分支**而消失. 在此情形, 环与三个**鞍点**($E_0, E_1$ 和 $E_2$) 共存. 如果它们存在, 鞍点 $E_0, E_1$ 和 $E_0, E_2$ 属于不变坐标轴的轨道所连接. 对沿着

与 Hopf 分支曲线 $C$ 相切的曲线 (见练习 14(c))

$$Y = \left\{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = -\frac{\delta - 1}{\theta - 1}\mu_1 + \frac{(\theta - 1)^3\Delta\delta + (\delta - 1)^3\Theta\theta}{(2\theta\delta - \theta - \delta)(\theta - 1)^2}\mu_1^2 + O(\mu_1^3), \mu_1 < 0\right\}$$

的参数值, 鞍点 $E_1$ 和 $E_2$ 的两条属于第一象限的分界线重合. 由这些轨道所组成的异宿环 (见图 8.30), 由于 (HH.9) 和假设 $l_1 < 0$, 是内稳定的.

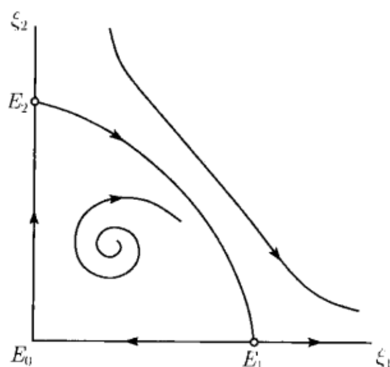



图 8.30　异宿 "三角形"

**注**　情形 III 和 IV 对 $\theta < 1$ 或是 $\theta > 1$ 的分支图存在着微妙的区别. 这个区别仅仅在 $\mu = 0$ 出现, 这时给出拓扑相异的临界相图. 所有的临界相图都画在图 8.31 中, 其中 IIIa 和 IVa 对应 $\theta > 1$. ◇

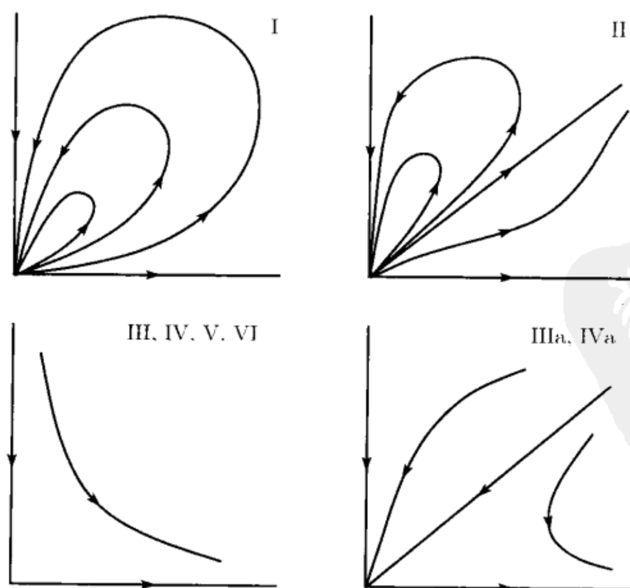



图 8.31　(8.115) 在 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 的临界相图

回忆对在四维截断规范形(8.110) 中的振幅系统 (8.111) 的平衡点和环的解释，可以建立这两个系统分支之间的关系. 其上出现 (8.111) 的平凡平衡点的曲线 $H_{1,2}$ 显然对应于 (8.110) 的 Hopf 分支曲线. 这是两个 "独立" 的 Hopf 分支, 起因于两对不同特征值通过虚轴. 穿过分支曲线 $T_1$(或者 $T_2$) 导致二维环面从环分枝. 因此, 曲线 $T_{1,2}$ 对应 (8.110) 的 Neimark-Sacker 分支. 在曲线 $C$ 上系统 (8.110) 具有我们还没有遇到过的分支, 即从二维环面分枝的三维环面. 曲线 $J$ 描述三维环面的爆炸, 而曲线 $Y$ 意味着出现环的三维稳定和不稳定不变流形和三维环面的异宿重合.

接下来的任务是讨论在四维规范形 (8.109) 中, 如果 "放回" 高阶项, 所得的分支图哪些得到保留.

### 8.6.3　高阶项的影响

对这个分支加入高阶项的影响比折-Hopf 分支更加生动. 事实上, 一般系统 (8.108) 从不拓扑等价于截断规范形 (8.109).

但是, 截断规范形捕捉到完全系统性态的某些信息. 就是说, 下面引理成立.

**引理 8.16**　*若条件* (HH.1)~(HH.4),

$$p_{jk}(0) \neq 0, \quad j,k = 1,2,$$

*以及* (HH.6)

$$(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})(0) \neq 0$$

*对系统* (8.108) *成立, 则对充分小的* $\|\mu\|$, *它有分支曲线* $\tilde{H}_k$ *和* $\tilde{T}_k$, $k = 1,2$, *在它们上面平衡点的非退化* Hopf *分支和极限环的非退化* Neimark-Sacker *分支发生, 它们同截断系统* (8.109) *对应的分支直线* $H_k$ *和* $T_k$ *相切.* □

从引理 8.15 和引理 8.16 得知, 具有 Hopf-Hopf 分支的一般四维系统在这个余维 2 点附近的参数图中也有对应的分支曲线. 穿过这些曲线导致在附近出现极限环和二维不变环面. 因此可以说 "Hopf-Hopf 交互作用导致环面".

但是, 完全系统 (8.108) 在环面上的轨道结构与截断系统 (8.109) 由于锁相一般是不同的. 事实上, (8.109) 的任何一个二维环面或者被稠密的拟周期轨道所充满 (如果 $\omega_1(\mu)$ 与 $\omega_2(\mu)$ 之比为无理数), 或者被周期轨道 (如果这个比为有理数) 所充满, (8.108) 中 "选择" 的高阶项, 对一般参数值二维环面上只有有限 (偶数) 个双曲极限环 (见第 7 章). 此外, 环面仅仅在分支曲线 $T_{1,2}$ 附近存在且保持光滑. 离开了这些曲线环面就失去光滑性而消亡. 注意, 引理 8.16 并不保证对应于截断系统中曲线 $C$ 的分支曲线的出现, 在它上面从二维环面分支出三维环面.

截断系统显示的其他退化性在加入一般的高阶项后并不幸存. 在参数平面上存在这样的区域, 在这个区域内在原点的平衡点是鞍点, 它有二维稳定和不稳定流形, 在坐标平面 $r_k = 0$ 之一内同时存在鞍点极限环, 以及二维稳定和三维不稳定不

变流形. 这个情况是退化的, 因为在这个区域内对所有参数值环的稳定流形与平衡点的不稳定流形重合. 这样的重合是非横截的并将在加入高阶项后消失. 这些项虽然只是稍微移动了一下鞍点和环的位置, 但破坏了坐标平面的不变性. 系统 (8.109) 在分支曲线 $Y$ 上的相图也是退化的, 它在高阶项的扰动下并不保持. 沿着这条曲线截断系统在坐标平面 $r_{1,2}=0$ 内有两个鞍点环, 它们有对应于连接系统 (8.111) 两个平凡鞍点的轨道的公共三维不变流形. 这个相交也不是横截的, 且在加入一般的高阶项就消失, 代之以形成更加复杂的异宿结构. 因此, 在一般的 Hopf-Hopf 分支附近存在包含 Smale 马蹄的 "奇怪" 动力学. 对应的参数图, 除了局部分支曲线 $H_k$ 和 $T_k$, 还有对应于大范围分支 (平衡点与环不变流形的异宿切触, 同宿轨道) 的分支集和相应的长周期极限环.

**注** (1) 类似于折-Hopf 情形, 平面系统 (8.110) 是二维系统的拓扑规范形, 它在由变换 $(x_1,x_2)\mapsto(-x_1,-x_2)$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 群表示的作用下是不变的. 有不变坐标轴 $x_{1,2}=0$, 以及在 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 有具两个零特征值的平衡点 $x=0$. 事实上, 任何一个这样的系统具有形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1G(x_1^2,x_2^2,\alpha), \\ \dot{x}_2 = x_2H(x_1^2,x_2^2,\alpha), \end{cases}$$

且在非退化条件 (HH.1)~(HH.4) 和横截性条件 (HH.5) 下经变换变成在原点附近的与

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu_1+p_{11}r_1^2+p_{12}r_2^2+s_1r_2^4+\Phi(r_1^2,r_2^2,\mu)), \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu_2+p_{21}r_1^2+p_{22}r_2^2+s_2r_1^4+\Psi(r_1^2,r_2^2,\mu)) \end{cases} \tag{8.116}$$

轨道等价的系统, 其中 $\Phi,\ \Psi=O((r_1^2+r_2^2)^3)$. 于是, 可以证明系统 (8.116) 局部拓扑等价于 (8.110), 只要条件 (HH.1)~(HH.6)(以及, 如有必要, (HH.7)~(HH.9)) 成立. 恒同于相图的同胚以及变到 (8.116) 的变换可与对称性交换选择.

(2) 仅仅保持 (8.110) 中的二次项不足以研究在 "困难" 情形 $p_{11}p_{22}<0$ 的分支. 事实上, 系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\mu_1+\xi_1-\theta\xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2(\mu_2+\delta\xi_1-\xi_2) \end{cases} \tag{8.117}$$

是由 (8.115) 中令 $\Theta=\Delta=0$ 得到的, 因此, 它沿着 "Hopf 曲线"

$$C_0=\left\{(\mu_1,\mu_2):\mu_2=-\frac{\delta-1}{\theta-1}\mu_1,\ \mu_1-\theta\mu_2>0,\ \delta\mu_1-\mu_2>0\right\}$$

是退化的, 但这违反了 (HH.9). 事实上, 对 $\xi_{1,2}>0$, 它是轨道等价于 Hamilton 系统, 非平凡平衡点 $E_3$ 被一族周期轨道所围. 对应于情形 I, II 以及 VI 的三种可能的相图描绘在图 8.32 中. (8.115) 中的三次项使得 Hopf 分支非退化, 只要它存在,

且在此情形 VI 异宿曲线 $Y$ 分裂. 读者在解决本章练习 14(c) 后将获得更详细的信息, 也可参看文献评注. ◇

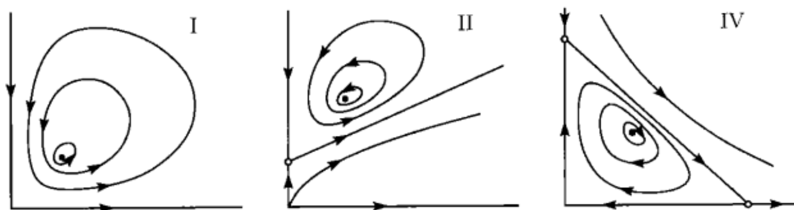



图 8.32　在曲线 $C_0$ 上 (8.117) 的相图

最后提及, Hopf-Hopf 的高维情形, 如通常, 利用中心流形定理把它化为已经考虑过的四维系统 (见下一节).

## 8.7　$n$ 维系统的临界规范形

为了应用这一章的余维 2 分支理论到特殊的模型, 我们需要在分支点验证非退化条件, 换句话说, 要计算在临界中心流形上规范形的直到某一阶的系数. 原则上, 这些系数可以先计算中心流形的 Taylor 展开, 然后计算对应的规范形系数来得到. 在平衡点的余维 1 分支, 这些系数的明确公式 (5.23) 和 (5.39) 已经在第 5 章得到过.

在这一节用另外的简化/规范化技巧推导所有余维 2 分支的临界系数. 按照这个方法, 中心流形的简化和规范化同时进行. 所得到的公式中仅包含 Jacobi 矩阵及其转置的临界特征向量, 以及系统在临界平衡点按原来的基的 Taylor 展开. 这使得它们对符号计算和数值计算两者同等适用.

### 8.7.1　方法

假定 (8.1) 在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$ 且把 $F(x) = f(x, 0)$ 表示为

$$F(x) = Ax + \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{6}C(x,x,) + \frac{1}{24}D(x,x,x,x) + \frac{1}{120}E(x,x,x,x,x) + \cdots, \tag{8.118}$$

其中 $A = f_x(0,0)$, 多重线性函数 $B$ 和 $C$ 由 (5.18) 和 (5.19) 给出过, 以及

$$D_i(x,y,z,v) = \sum_{j,k,l,m=1}^{n} \left.\frac{\partial^4 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m}\right|_{\xi=0} x_j y_k z_l v_m,$$

$$E_i(x,y,z,v,w) = \sum_{j,k,l,m,s=1}^{n} \left.\frac{\partial^5 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_s}\right|_{\xi=0} x_j y_k z_l v_m w_s,$$

对 $i=1,2,\cdots,n$.

进一步, 假设 (8.1) 的 Jacobi 矩阵 $A=f_x(0,0)$ 有 $n_c$ 个具零实部的特征值 (计算重次), 并以 $T^c$ 表示 $A$ 对应的广义临界特征空间. 在 $\alpha=0$ 把 (8.1) 写为

$$\dot{x}=F(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{8.119}$$

且将它限制在由 $w\in\mathbb{R}^{n_c}$ 参数化的 $n_c$ 维不变中心流形

$$x=H(w),\quad H:\mathbb{R}^{n_c}\to\mathbb{R}^n \tag{8.120}$$

上. 限制方程可以写为

$$\dot{w}=G(w),\quad G:\mathbb{R}^{n_c}\to\mathbb{R}^{n_c}. \tag{8.121}$$

将 (8.120) 和 (8.121) 代入 (8.119) 得同调方程

$$H_m(w)G(w)=F(H(w)), \tag{8.122}$$

这不过是使得中心流形 $W^c$ 是不变的条件. 现在把 (8.122) 中的函数 $G,H$ 展开成多重 Taylor 级数

$$G(w)=\sum_{|\nu|\geqslant 1}\frac{1}{\nu!}g_\nu w^\nu,\quad H(w)=\sum_{|\nu|\geqslant 1}\frac{1}{\nu!}h_\nu w^\nu,$$

并假设限制方程 (8.121) 是到某一阶的规范形. 这是一个至关重要的假设! 于是, 假设就着眼于如此光滑参数化的中心流形, 其中的限制有最简单 (即规范形) 形式①.

规范形 (8.121) 中的系数 $g_\nu$ 和 $H(w)$ 的 Taylor 展开式中的系数 $h_\nu$ 是未知的, 但可从 (8.122) 由低阶到高阶用递推方法得到②. 合并 (8.122) 中的 $w^\nu$ 项的系数得系数 $h_\nu$ 的线性系统

$$Lh_\nu=R_\nu, \tag{8.123}$$

其中矩阵 $L$ 由 Jacobi 矩阵 $A$ 和它的临界特征值确定, 右端 $R_\nu$ 依赖于次数小于或等于 $|\nu|$ 的 $G$ 和 $H$ 的系数, 以及关于 $F$ 的 Taylor 表达式 (8.118) 中次数小于或等于 $|\nu|$ 的项. 如我们将看到, 当 $R_\nu$ 仅包含已知量时, 系统 (8.123) 有解, 因为或者 $L$ 是非奇异, 或者 $R_\nu$ 满足 Fredholm 的可解性条件

$$\langle p,R_\nu\rangle=0,$$

① 可用光滑的坐标变换但不用时间重参数化将限制方程变为被应用的规范形, 因为 (8.121) 中的导数与 (8.119) 中的导数的意义是相同的.

② 显然, 有 $\sum_{|\nu|=1}h_\nu w^\nu\in T^c$.

其中 $p$ 是伴随矩阵 $\bar{L}^{\mathrm{T}}$ 的零–向量. 当 $R_\nu$ 依赖于规范形的未知系数 $g_\nu$ 时, $L$ 是奇异的且上面的可解性条件给出 $g_\nu$ 的表达式.

对所有余维 2 分支, 除了 Bogdanov-Takens 分支, $L(\bar{L}^{\mathrm{T}})$ 对应零特征值的不变子空间是 $\mathbb{C}^n$ 中的一维向量, 即存在唯一 (直至尺度化) 零–向量 $q$ 和 $p$:

$$L_q = 0, \quad \bar{L}^{\mathrm{T}} p = 0, \quad \langle p, q\rangle = 1,$$

且没有广义零–向量. 于是, (8.123) 满足 $\langle p, h_\nu\rangle = 0$ 的唯一解 $h_\nu$ 可用求解非奇异 $(n+1)$ 维的**加边系统**

$$\begin{pmatrix} L & q \\ \bar{p}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\nu \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\nu \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.124}$$

得到. 如同 5.4.1 节写为 $h_\nu = L^{\mathrm{INV}} R_\nu$.

$H(w)$ 的 Taylor 展开式同时定义了中心流形展开式、在上的规范化变换, 以及规范形自己. 由于从上一节知道哪些项出现在规范形中, 这里叙述的步骤是在分支参数值计算它们系数的有力工具. 这个方法在下面一节将应用到所有余维 2 的情形.

### 8.7.2　尖分支

在尖分支, 系统 (8.119) 有平衡点 $x = 0$, 具一个单零特征值 $\lambda_1 = 0$, 没有其他临界特征值. 设 $q, p \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$Aq = 0, \quad A^{\mathrm{T}} p = 0, \quad \langle p, q\rangle = 1.$$

任何点 $y \in T^c$ 可表示为

$$y \in wq, \quad w \in \mathbb{R}^1,$$

其中 $w = \langle p, y\rangle$. 同调方程 (8.122) 有形式

$$H_w \dot{w} = F(H(w)),$$

其中 (见 (8.211))

$$F(H) = AH + \frac{1}{2}B(H,H) + \frac{1}{6}C(H,H,H) + O(\|H\|^4),$$

$$H(w) = wq + \frac{1}{2}h_2 w^2 + \frac{1}{6}h_3 w^3 + O(w^4),$$

其中未知向量 $h_i \in \mathbb{R}^n$, 且

$$\dot{w} = bw^2 + cw^3 + O(w^4), \tag{8.125}$$

$b$ 和 $c$ 是未知系数. 把这些表达式代入同调方程, 得

$$\begin{aligned}&bw^2q+(cq+bh_2)w^3\\=&\frac{1}{2}w^2[Ah_2+B(q,q)]+\frac{1}{6}w^3[Ah_3+3B(q,h_2)+C(q,q,q)]+O(w^4).\end{aligned} \tag{8.126}$$

(8.126) 中 $w^2$ 项给出关于 $h_2$ 的方程

$$Ah_2=-B(q,q)+2bq, \tag{8.127}$$

其中矩阵 $A$ 显然奇异. 这个系统的可解性导致

$$\langle p,-B(q,q)+2b_0q\rangle=-\langle p,B(q,q)\rangle+2b\langle p,q\rangle=0,$$

按照第 5 章关于折分支的公式 (5.23), 可求得 $b$, 即

$$b=\frac{1}{2}\langle p,B(q,q)\rangle.$$

用 $b$ 的这个值, 线性系统 (8.127) 变成

$$Ah_2=-B(q,q)+\langle p,B(q,q)\rangle q,$$

它满足 $\langle p,h_2\rangle=0$ 的唯一解 $h_2=-A^{\mathrm{INV}}[B(q,q)-\langle p,B(q,q)\rangle q]$, 可由求解一个非奇异的 $(n+1)$ 维带边系统

$$\begin{pmatrix}A & q\\ p^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_2\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-B(q,q)+\langle p,B(q,q)\rangle q\\ 0\end{pmatrix}$$

得到.

合并在 (8.126) 中 $w^3$ 项得

$$cq+bh_2=\frac{1}{6}Ah_3+\frac{1}{2}B(q,h_2)+\frac{1}{6}C(q,q,q),$$

这等价于另一个奇异系统

$$Ah_3=cq+bh_2-\frac{1}{6}[C(q,q,q)+3B(q,h_2)].$$

它的可解性导致

$$c\langle p,q\rangle+b\langle p,h_2\rangle-\frac{1}{6}\langle p,C(q,q,q)+3B(q,h_2)\rangle=0.$$

由于 $\langle p, h_2\rangle = 0$, 于是得到下面关于系数 $c$ 的表达式:

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q,q,q) + 3B(q,h_2)\rangle.$$

现在回忆在尖分支 $b = 0$. 在这个条件下, 规范形 (8.125) 中的系数 $c$ 可简短地表示为

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q,q,q) + 3B(q, A^{\mathrm{INV}}B(q,q))\rangle. \tag{8.128}$$

这个表达式已经在第 5 章推导过, 见方程 (5.28).

### 8.7.3　Bautin 分支

在 Bautin 分支, 系统 (8.119) 的平衡点有一对单纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$, $\omega_0 > 0$, 再没有其他临界特征值. 如同 Hopf 情形, 引入两个复特征向量

$$Aq = \mathrm{i}\omega_0 q, \quad A^{\mathrm{T}}p = -\mathrm{i}\omega_0 p,$$

并按照

$$\langle p, q\rangle = 1$$

将它们标准化. 任一向量 $y \in T^c \subset \mathbb{R}^n$ 可表为

$$y = wq + \bar{w}\bar{q},$$

其中 $w = \langle p, y\rangle \in \mathbb{C}^1$. 同调方程 (8.122) 取形式

$$H_w \dot{w} + H_{\bar{w}}\dot{\bar{w}} = F(H(w,\bar{w})), \tag{8.129}$$

其中 $F$ 由 (8.118) 给出,

$$H(w,\bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{1\leqslant j+k\leqslant 5}\frac{1}{j!k!}h_{jk}w^j\bar{w}^k + O(\|w\|^6),$$

其中 $h_{jk} \in \mathbb{C}^n$, $h_{kj} = \bar{h}_{jk}$, 且

$$\dot{w} = \mathrm{i}\omega_0 w + c_1 w|w|^2 + c_2 w|w|^4 + O(|w|^6), \tag{8.130}$$

其中 $c_{1,2} \in \mathbb{C}^1$. 这是在 $\alpha = 0$ 时的方程 (8.19).

合并 (8.129) 中二次项的系数并求解出现的非奇异线性系统, 得

$$h_{20} = (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q,q), \quad h_{11} = -A^{-1}B(q,\bar{q}).$$

由 (8.129) 中 $w^3$ 项前面的系数得 $h_{30}$ 的表达式：

$$h_{30}=(3\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{-1}\left[C(q,q,q)+3B(q,h_{20})\right],$$

$w^2\bar{w}$ 项给出 $h_{21}$ 的奇异系统：

$$(\mathrm{i}\omega_0I_n-A)h_{21}=C(q,q,\bar{q})+B(\bar{q},h_{20})+2B(q,h_{11})-2c_1q. \tag{8.131}$$

这个系统的可解性等价于

$$\langle p,C(q,q,\bar{q})+B(\bar{q},h_{20})+2B(q,h_{11})-2cq\rangle=0,$$

所以规范形 (8.130) 中三次项系数可表示为

$$c_1=\frac{1}{2}\langle p,C(q,q,\bar{q})+B(\bar{q},(2\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{-1}B(q,q))-2B(q,A^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle$$

以及

$$l_1(0)=\frac{1}{\omega_0}\mathrm{Re}\ c_1,$$

这与第 5 章推导的第一个 Lyapunov 系数的表达式重合. 于是由 (8.131) 得

$$h_{21}=(\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{\mathrm{INV}}\left[C(q,q,\bar{q})+B(\bar{q},h_{20})+2B(q,h_{11})-2c_1q\right],$$

这里满足 $\langle p,h_{21}\rangle=0$ 的复向量 $h_{21}$ 可从求解 $(n+1)$ 维复加边系统

$$\begin{pmatrix}\mathrm{i}\omega_0I_n-A & q\\ \bar{p}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{21}\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C(q,q,\bar{q})+B(\bar{q},h_{20})+2B(q,h_{11})-2c_1q\\ 0\end{pmatrix}$$

获得.

对四次系数, 得到

$$\begin{aligned}h_{40}=&(4\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{-1}\left[D(q,q,q,q)+6C(q,q,h_{20})+4B(q,h_{30})+3B(h_{20}h_{20})\right],\\ h_{31}=&(2\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{-1}\left[D(q,q,q,\bar{q})+3C(q,q,h_{11})+3C(q,\bar{q},h_{20})\right.\\ &\left.+3B(h_{20},h_{11})+B(\bar{q},h_{30})+3B(q,h_{21})-6c_1h_{20}\right],\\ h_{22}=&-A^{-1}\left[D(q,q,\bar{q},\bar{q})+4C(q,\bar{q},h_{11})+C(\bar{q},\bar{q},h_{20})+C(q,q,\bar{h}_{20})\right.\\ &\left.+2B(h_{11},h_{11})+2B(q,\bar{h}_{21})+2B(\bar{q},h_{21})+B(\bar{h}_{20},h_{20})-4h_{11}(c_1+\bar{c}_1)\right].\end{aligned}$$

考虑到等式 $\langle p,h_{21}\rangle=0$, 可以验证关于 $h_{32}$ 的线性系统的可解性条件, 得第二个 Lyapunov 系数 (见引理 8.4) 的公式

$$l_2(0)=\frac{1}{\omega_0}\mathrm{Re}\ c_2,$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_2 = & \frac{1}{12}\langle p, E(q,q,q,\bar{q},\bar{q}) + D(q,q,q,\bar{h}_{20}) + 3D(q,\bar{q},\bar{q},h_{20}) + 6D(q,q,\bar{q},h_{11}) \\
& + C(\bar{q},\bar{q},h_{30}) + 3C(q,q,\bar{h}_{21}) + 6C(q,\bar{q},h_{21}) + 3C(q,\bar{h}_{20},h_{20}) \\
& + 6C(q,h_{11},h_{11}) + 6C(\bar{q},h_{20},h_{11}) \\
& + 2B(\bar{q},h_{31}) + 3B(q,h_{22}) + B(\bar{h}_{20},h_{30}) + 3B(\bar{h}_{21},h_{20}) + 6B(h_{11},h_{21})\rangle,
\end{aligned}
$$

这里所有 $h_{jk}$ 早已确定. 注意, $h_{40}$ 没有进入 $c_2$ 的表达式. 另外, 在 Bautin 分支, $l_1(0)=0$ 或者 $c_1+\bar{c}_1=0$, 故 $h_{22}$ 的最后一项为零.

### 8.7.4　Bogdanov-Takens 分支

在 Bogdanov-Takens 分支, 系统 (8.119) 有两个特征值 $\lambda_{1,2}=0$, 存在两个实线性无关的 (广义) 特征向量 $q_{0,1}\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$
Aq_0 = 0, \quad Aq_1 = q_0.
$$

此外, 存在转置矩阵 $A^{\mathrm{T}}$ 类似的向量 $p_{1,0}\in\mathbb{R}^n$:

$$
A^{\mathrm{T}}p_1 = 0, \quad A^{\mathrm{T}}p_0 = p_1.
$$

如同 8.4 节, 可以选择这些向量满足

$$
\langle p_0,q_0\rangle = \langle p_1,q_1\rangle = 1, \quad \langle p_0,q_1\rangle = \langle p_1,q_0\rangle = 0.
$$

任一向量 $y\in T^c$ 可唯一地表示为

$$
y = w_0q_0 + w_1q_1,
$$

其中 $w_0=\langle p_0,y\rangle$, $w_1=\langle p_1,y\rangle$. 同调方程 (8.122) 有形式

$$
H_{w_0}\dot{w}_0 + H_{w_1}\dot{w}_1 = F(H(w_0,w_1)), \tag{8.132}
$$

其中

$$
F(H) = AH + \frac{1}{2}B(H,H) + O(\|H\|^3),
$$

$$
H(w_0,w_1) = w_0q_0 + w_1q_1 + \frac{1}{2}h_{20}w_0^2 + h_{11}w_0w_1 + \frac{1}{2}h_{02}w_1^2 + O(\|w,w)\|^3),
$$

$h_{j,k}\in\mathbb{R}^n$ 为未知系数, $\dot{w}_0,\dot{w}_1$ 由临界规范形

$$
\begin{cases}
\dot{w}_0 = w_1, \\
\dot{w}_1 = aw_0^2 + bw_0w_1 + O(\|w\|^3)
\end{cases} \tag{8.133}
$$

定义, 其中 $a$ 和 $b$ 是未知系数. 这个系统等价于 $A(0)=a$ 和 $B(0)=b$ 的 (8.49).

把上面的表达式代入 (8.132) 并合并 $w_0^2$ 项, 得 $h_{20}$ 的奇异线性系统:

$$Ah_{20}=2aq_1-B(q_0,q_0). \tag{8.134}$$

这个系统的可解性条件是

$$\langle p_1,2aq_1-B(q_0,q_0)\rangle=2a\langle p_1,q_1\rangle-\langle p_1,B(q_0,q_0)\rangle=0,$$

由此得

$$a=\frac{1}{2}\langle p_1,B(q_0,q_0)\rangle. \tag{8.135}$$

对 (8.134) 两边关于 $p_0$ 取数量积得 $\langle p_0,Ah_{20}\rangle=2a\langle p_0,q_1\rangle-\langle p_0,B(q_0,q_0)\rangle$, 由此得

$$\langle p_1,h_{20}\rangle=-\langle p_0,B(q_0,q_0)\rangle. \tag{8.136}$$

(8.132) 中的 $w_0w_1$ 项给出线性系统

$$Ah_{11}=bq_1+h_{20}-B(q_0,q_1). \tag{8.137}$$

它的可解性意味着

$$\langle p_1,bq_1+h_{20}-B(q_0,q_1)\rangle=b\langle p_1,q_1\rangle+\langle p_1,h_{20}\rangle-\langle p_1,B(q_0,q_1)\rangle=0.$$

考虑到 (8.136), 得到

$$b=\langle p_0,B(q_0,q_0)\rangle+\langle p_1,B(q_0,q_1)\rangle. \tag{8.138}$$

由此, 规范形 (8.133) 中的系数 $a$ 和 $b$ 已被计算.

注意, 由 (8.135) 和 (8.138) 给出的 $a$ 和 $b$ 的奇异线性系统 (8.134) 和 (8.137) 的解不是唯一的. 例如, $q_0$ 的纯量倍数可加到 $h_{20}$. 这个自由可用来保证出现在 (8.132) 的 $h_{02}$ 的线性系统的右端

$$Ah_{02}=2h_{11}-B(q_1,q_1) \tag{8.139}$$

与 $p_1$ 正交. 事实上, 由 (8.137) 得

$$\langle p_1,h_{11}\rangle=\langle p_0,h_{20}\rangle-\langle p_0,B(q_1,q_1)\rangle.$$

利用这个等式, 得

$$\langle p_1,2h_{11}-B(q_1,q_1)\rangle=2\langle p_0,h_{20}\rangle-2\langle p_0,B(q_0,q_1)\rangle-\langle p_1,B(q_1,q_1)\rangle.$$

作代换 $h_{20}\mapsto h_{20}+\gamma q_0$ 并适当选取 $\gamma$ 使得这个方程的右端等于零. 于是得知 (8.139) 关于 $h_{02}$ 可解.

### 8.7.5 折-Hopf 分支

在折-Hopf 分支, 系统 (8.119) 有平衡点, 它的 Jacobi 矩阵 $A = f_x(0,0)$ 有一个单零特征值和一对单纯虚特征值:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

且没有其他临界特征值. 引入两个特征向量 $q_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $q_1 \in \mathbb{C}^n$,

$$Aq_0 = 0, \quad Aq_1 = i\omega_0 q_1,$$

以及两个伴随特征向量, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $p_1 \in \mathbb{C}^n$,

$$A^{\mathrm{T}} p_0 = 0, \quad A^{\mathrm{T}} p_1 = -i\omega_0 p_1.$$

把它们标准化使得

$$\langle p_0, q_0\rangle = \langle p_1, q_1\rangle = 1.$$

下面的正交性成立:

$$\langle p_1, q_0\rangle = \langle p_0, q_1\rangle = 0.$$

现在任一向量 $y \in \mathbb{R}^n$ 可表示为

$$y = w_0 q_0 + w_1 q_1 + \bar{w}_1 \bar{q}_1,$$

其中 $w_0 = \langle p_0, y\rangle \in \mathbb{R}^1$和$w_1 = \langle p_1, y\rangle \in \mathbb{C}^1$. 同调方程 (8.122) 可写为形式

$$H_{w_0}\dot{w}_0 + H_{w_1}\dot{w}_1 + H_{\bar{w}_1}\dot{\bar{w}}_1 = F(H(w_0, w_1, \bar{w}_1)), \tag{8.140}$$

其中

$$F(H) = AH + \frac{1}{2}B(H,H) + \frac{1}{6}C(H,H,H) + O(\|H\|^4),$$

$$\begin{aligned} H(w, w_1, \bar{w}_1) =& w_0 q_0 + w_1 q_1 + \bar{w}_1 \bar{q}_1 \\ &+ \sum_{2\leqslant j+k+l\leqslant 3} \frac{1}{j!k!l!} h_{jkl} w_0^j w_1^k \bar{w}_1^l + O(\|(w_0, w_1, \bar{w}_1)\|^4), \end{aligned}$$

$h_{jkl} \in \mathbb{C}^n$, $h_{jkl} = \bar{h}_{jkl}$ 以及 $(\dot{w}_0, \dot{w}_1)$ 是由规范形 (8.63) 在 $\alpha = 0$ 定义,

$$\begin{cases} \dot{w}_0 = G_{200} w_0^2 + G_{011}|w_1|^2 + G_{300} w_0^3 + G_{111} w_0 |w_1|^2 \\ \qquad + O(\|w_0, w_1, \bar{w}_1)\|^4), \\ \dot{w}_1 = i\omega_0 w_1 + H_{110} w_0 w_1 + H_{210} w_0^2 w_1 + H_{021} w_1 |w_1|^2 \\ \qquad + O(\|w_0, w_1, \bar{w}_1)\|^4), \end{cases} \tag{8.141}$$

这里用 $(w_0, w_1)$ 代替 $(v, w)$, 且所有的系数都是在它们的临界值取值.

合并 (8.140) 中的 $w_0^j w_1^k \bar{w}_1^l$ 项, 其中 $j+k+l=2$, 从 (8.141) 二次系数表达式的可解性条件得

$$G_{200}(0) = \frac{1}{2}\langle p_0, B(q_0, q_0)\rangle, \quad H_{110} = \langle p_1, B(q_0, q_1)\rangle, \quad G_{011} = \langle p_0, B(q_1, \bar{q}_1)\rangle,$$

以及下面关于系数 $h_{jkl}$, $j+k+l=2$ 的公式:

$$h_{200} = -A^{\mathrm{INV}}[B(q_0, q_0) - \langle p_0, B(q_0, q_0)\rangle q_0], \tag{8.142}$$

$$h_{020} = (2\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{-1} B(q_1, q_1), \tag{8.143}$$

$$h_{110} = (\mathrm{i}\omega_0 I_n - A)^{\mathrm{INV}}[B(q_0, q_1) - \langle p_1, B(q_0, q_1)\rangle q_1], \tag{8.144}$$

$$h_{011} = -A^{\mathrm{INV}}[B(q_1, \bar{q}_1) - \langle p_0, B(q_1, \bar{q}_1)\rangle q_0], \tag{8.145}$$

这里向量 $h_{200}$ 和 $h_{011}$ 可以用求解 $(n+1)$ 维实加边系统

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{200} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_0, q_0) + \langle p_0, B(p_0, p_0)\rangle p_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{011} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_1, \bar{q}_1) + \langle p_0, B(q_1, \bar{q}_1)\rangle q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

来计算. 向量 $h_{110}$ 可以用求解非奇异 $(n+1)$ 维复加边系统

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega_0 I_n - A & q_1 \\ \bar{p}_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{110} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(q_0, q_1) - \langle p_1, B(q_0, q_1)\rangle q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到. 最后, 把可解性条件应用到由 (8.140) 的共振项 $w_0^j w_1^k \bar{w}_1^l$ 得的系统, 其中 $j+k+l=3$, 得到

$$\begin{aligned}
G_{300} &= \frac{1}{6}\langle p_0, C(q_0, q_0, q_0) + 3B(q_0, h_{200})\rangle, \\
G_{111} &= \langle p_0, C(q_0, q_1, \bar{q}_1) + B(q_1, \bar{h}_{110}) + B(\bar{q}_1, h_{110}) + B(q_0, h_{011})\rangle, \\
H_{210} &= \frac{1}{2}\langle p_1, C(q_0, q_0, q_1) + 2B(q_0, h_{110}) + B(q_1, h_{200})\rangle, \\
H_{021} &= \frac{1}{2}\langle p_1, C(q_1, q_1, \bar{q}_1) + 2B(q_1, h_{011}) + B(\bar{q}_1, h_{020})\rangle,
\end{aligned}$$

其中 $h_{jkl}$ 由 (8.142)~(8.145) 定义. 因此, (8.141) 中的所有系数都得到了计算.

**例 8.4**(Lorenz-84 模型)　考虑大气环流的一个简化模型 (Lorenz, 1984)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} = bxy + xz - z, \end{cases} \tag{8.146}$$

其中 $(F, G)$ 是参数, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 4$. 可以证明 (见练习 12), 在

$$F_0 = \frac{3907}{2320} = 1.684051724\cdots, \quad G_0 = \frac{1297}{9280}\sqrt{145} = 1.682968552\cdots,$$

系统 (8.146) 的平衡点

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{9}{8},\ -\frac{1}{1160}\sqrt{145},\ \frac{9}{290}\sqrt{145}\right),$$

具折-Hopf 分支. 事实上, (8.146) 在临界平衡点的 Jacobi 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{145}}{580} & -\dfrac{9\sqrt{145}}{145} \\ -\dfrac{\sqrt{145}}{8} & \dfrac{1}{8} & -\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{4\sqrt{145}}{145} & \dfrac{9}{2} & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$$

有特征值

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{1160}\sqrt{27561455} = 4.525776271\cdots > 0.$$

$\mathbb{C}^3$ 中的向量

$$q_0 = \left(1,\ -\frac{1007}{188065}\sqrt{145},\ -\frac{5252}{188065}\sqrt{145}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$q_1 = \left(\frac{2}{145}\sqrt{145},\ 1,\ -\frac{1}{36} - \frac{\mathrm{i}}{5220}\sqrt{27561445}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$p_0 = \left(\frac{188065}{190079},\ -\frac{2594}{190079}\sqrt{145},\ 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$p_1 = \left(\frac{1007}{380158}\sqrt{145} - \frac{\mathrm{i}}{380158}\sqrt{145}\sqrt{27561455},\right.$$
$$\left.\frac{188065}{380158} + \frac{\mathrm{i}}{380158}\sqrt{27561455},\ -\frac{18\,\mathrm{i}}{190079}\sqrt{27561455}\right)^{\mathrm{T}},$$

满足

$$Aq_0 = A^{\mathrm{T}}p_0 = 0, \quad Aq_1 = \mathrm{i}\omega_0 q_1, \quad A^{\mathrm{T}}p_1 = -\mathrm{i}\omega_0 p_1$$

和标准化条件

$$\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1.$$

(8.146) 中没有三次项, 在 $b = 4$, 双线性函数 $B(p, q)$ 的分量由公式

$$B_i(p, q) = p^{\mathrm{T}} H^i q, \quad i = 1, 2, 3$$

给出, 其中 Hesse 矩阵

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

按照上面的步骤得到规范形系数值:

$$\begin{aligned}
G_{200} &= -\frac{62051}{190079}, \\
H_{110} &= \frac{252130}{190079} + \frac{141\ \mathrm{i}}{190079}\sqrt{145}\sqrt{190079}, \\
G_{011} &= -\frac{6915604}{1710711}, \\
G_{300} &= \frac{12801407360}{36130026241}, \\
G_{111} &= \frac{9729482240}{325170236169}, \\
H_{210} &= -\frac{18320144480}{36130026241} + \frac{479799208640\mathrm{i}}{6867559257863039}\sqrt{145}\sqrt{190079}, \\
H_{021} &= -\frac{2213399552}{325170236169} + \frac{25579201429264\mathrm{i}}{26886494494533797685}\sqrt{145}\sqrt{190079}.
\end{aligned}$$

这给出了 8.5 节中的 Gavrilov 规范形 (8.71) 系数的下面数值:

$$B(0) = -\frac{62051}{190079} = -0.32644848\cdots, \quad C(0) = -\frac{6915604}{1710711} = -4.04253202\cdots$$

和

$$E(0) = \frac{33652980958948512}{20391681953530129} = 1.65032885\cdots > 0,$$

由定理 8.6,

$$\theta(0) \equiv \frac{\mathrm{Re}\ H_{110}(0)}{2G_{200}} = -\frac{126065}{62051} = -2.03163527\cdots < 0.$$

因此, 出现情形 $s = \mathrm{sign}(b(0)c(0)) = 1$, $\theta < 0$ 时没有改变时间方向 (见 8.5 节). 也可验证关于参数 $(F, G)$ 的横截性条件. 因此, 当小参数变化时从临界平衡点分支出非平凡不变集. ◇

### 8.7.6 Hopf-Hopf 分支

在 Hopf-Hopf 分支, 系统 (8.119) 有平衡点, 它的 Jacobi 矩阵 $A = f_x(0,0)$ 有两对纯虚单特征值:

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}\omega_1, \quad \lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}\omega_2,$$

$\omega_1 > \omega_2 > 0$, 且没有其他临界特征值. 假定引理 8.13 中的条件 (HH.0) 成立:

$$k\omega_1 \neq l\omega_2, \quad k, l > 0, \ k + l \leqslant 5. \tag{8.147}$$

由于特征向量是单的, 存在两个对应于这些特征值的复特征向量 $q_{1,2} \in \mathbb{C}^n$,

$$Aq_1 = \mathrm{i}\omega_1 q_1, \quad Aq_2 = \mathrm{i}\omega_2 q_2.$$

引入两个伴随特征向量 $p_{1,2} \in \mathbb{C}^n$ 使得

$$A^{\mathrm{T}} p_1 = \mathrm{i}\omega_1 p_1, \quad A^{\mathrm{T}} p_2 = -\mathrm{i}\omega_2 p_2,$$

其中 T 表示转置. 这些向量可以用 $\mathbb{C}^n$ 中标准的数量积标准化,

$$\langle p_1, q_1 \rangle = \langle p_2, q_2 \rangle = 1.$$

以及满足正交性条件:

$$\langle p_2, q_1 \rangle = \langle p_1, q_2 \rangle = 0.$$

任一向量 $y \in \mathbb{R}^n$ 可表示为

$$y = w_1 q_1 + \bar{w}_1 \bar{q}_1 + w_2 q_2 + \bar{w}_2 \bar{q}_2, \quad w_i \in \mathbb{C}^1,$$

其中 $w_1 = \langle p_1, y \rangle$, $w_2 = \langle p_2, y \rangle$. 因此, 同调方程 (8.122) 可写为

$$H_{w_1} \dot{w}_1 + H_{\bar{w}_1} \dot{\bar{w}}_1 + H_{w_2} \dot{w}_2 + H_{\bar{w}_2} \bar{w}_2 = F(H(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)), \tag{8.148}$$

其中 $F$ 由 (8.118) 定义,

$$\begin{aligned} H(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2) =& w_1 q_1 + \bar{w}_1 \bar{q}_1 + w_2 q_2 + \bar{w}_2 \bar{q}_2 \\ &+ \sum_{j+k+l+m \geqslant 2} \frac{1}{j!k!l!m!} h_{jklm} w_1^j \bar{w}_1^k w_2^l \bar{w}_2^m, \end{aligned}$$

其中 $h_{jklm} \in \mathbb{C}^n$, $h_{jklm} = \bar{h}_{jklm}$, 以及 $(\dot{w}_1, \dot{w}_2)$ 由规范形 (8.89) 在 $\alpha = 0$ 给定:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \mathrm{i} w_1 w_1 + G_{2100} w_1 |w_1|^2 + G_{1011} w_1 |w_2|^2 \\ \qquad + G_{3200} w_1 |w_1|^4 + G_{2111} w_1 |w_1|^2 |w_2|^2 + G_{1022} w_1 |w_2|^4 \\ \qquad + O(\|(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)\|^6), \\ \dot{w}_2 = \mathrm{i} w_2 w_2 + H_{1110} w_2 |w_1|^2 + H_{0021} w_2 |w_2|^2 \\ \qquad + H_{2210} w_2 |w_1|^4 + H_{1121} w_2 |w_1|^2 |w_2|^2 + H_{0032} w_2 |w_2|^4 \\ \qquad + O(\|(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)\|^6), \end{cases} \tag{8.149}$$

这里所有的系数都在它们的临界值取值.

合并 (8.148) 中满足 $j+k+l+m=2$ 的 $w_1^j\bar{w}_1^k w_2^l \bar{w}_2^m$ 项的系数, 得到下面关于 $h_{jklm}$ 的表达式:

$$h_{1100} = -A^{-1}B(q_1,\bar{q}_1), \tag{8.150}$$

$$h_{2000} = (2\mathrm{i}\omega_1 I_n - A)^{-1}B(q_1,q_1), \tag{8.151}$$

$$h_{1010} = [\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)I_n - A]^{-1}B(q_1,q_2), \tag{8.152}$$

$$h_{1001} = [\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)I_n - A]^{-1}B(q_1,\bar{q}_2), \tag{8.153}$$

$$h_{0020} = (2\mathrm{i}\omega_1 I_n - A)^{-1}B(q_2,q_2), \tag{8.154}$$

$$h_{1100} = -A^{-1}B(q_2,\bar{q}_2). \tag{8.155}$$

所有包含在 (8.150)~(8.155) 中的矩阵都在通常意义下可逆, 这是由于在临界参数值有假设 (8.147).

合并 (8.148) 中满足 $j+k+l+m=3$ 的非共振项 $w_1^j\bar{w}_1^k w_2^l \bar{w}_2^m$ 前的系数, 得到下面关于 $h_{jklm}$ 的表达式:

$$\begin{aligned}
h_{3000} &= (3\mathrm{i}\omega_1 I_n - A)^{-1}[C(q_1,q_1,q_1)+3B(h_{2000},q_1)],\\
h_{2010} &= [\mathrm{i}(2\omega_1+\omega_2)I_n - A]^{-1}[C(q_1,q_1,q_2)+B(h_{2000},q_2)+2B(h_{1010},q_1)],\\
h_{2001} &= [\mathrm{i}(2\omega_1-\omega_2)I_n - A]^{-1}[C(q_1,q_1,\bar{q}_2)+B(h_{2000},\bar{q}_2)+2B(h_{1001},q_1)],\\
h_{1020} &= [\mathrm{i}(\omega_1+2\omega_2)I_n - A]^{-1}[C(q_1,q_2,q_2)+B(h_{0020},q_1)+2B(h_{1010},q_2)],\\
h_{1002} &= [\mathrm{i}(\omega_1-2\omega_2)I_n - A]^{-1}[C(q_1,\bar{q}_2,\bar{q}_2)+B(\bar{h}_{0020},q_1)+2B(h_{1001},\bar{q}_2)],\\
h_{0030} &= (3\mathrm{i}\omega_2 I_n - A)^{-1}[C(q_2,q_2,q_2)+3B(h_{0020},q_2)].
\end{aligned}$$

这些表达式中所有矩阵都可逆. 合并 (8.148) 中共振三次项的系数, 得规范形 (8.149) 中的共振三次系数:

$$\begin{aligned}
G_{2100} &= \frac{1}{2}\langle p_1, C(q_1,q_1,\bar{q}_1)+B(h_{2000},\bar{q}_1)+2B(h_{1100},q_1)\rangle,\\
G_{1011} &= \langle p_1, C(q_1,q_2,\bar{q}_2)+B(h_{1010},\bar{q}_2)+B(h_{1001},q_2)+B(h_{0011},q_1)\rangle,\\
H_{1110} &= \langle p_2, C(q_1,\bar{q}_1,q_2)+B(h_{1100},q_2)+B(h_{1010},\bar{q}_1)+B(\bar{h}_{1001},q_1)\rangle,\\
H_{0021} &= \frac{1}{2}\langle p_2, C(q_2,q_2,\bar{q}_2)+B(h_{0020},\bar{q}_2)+2B(h_{0011},q_2)\rangle.
\end{aligned}$$

类似地, 合并四次项和五次项可计算 (8.149) 中所有余下的系数. 所得公式太长可在别处找到 (见附录 2 中参考文献).

## 8.8 练　　习

1. (Bazykin 系统的尖点) 对 $\gamma = 1$, 计算系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \dfrac{x_1 x_2}{1+\alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \dfrac{x_1 x_2}{1+\alpha x_1} - \delta x_2^2 \end{cases}$$

的尖分支点 $C_{1,2}$ 的坐标 $(\alpha, \delta)$. 提示: 尖分支点是多项式

$$P(x_1) = \delta(1+\alpha x_1)^2(1-\varepsilon x_1) - (1-\alpha)x_1 + 1$$

的三重根, 这里 $x_1$ 是非平凡平衡点的第一个坐标.

2. (引理 8.2) 证明: 光滑系统

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x - x^3 + F(x, \alpha) \tag{E.1}$$

在 $(x, \alpha) = (0, 0)$ 附近局部拓扑等价于系统

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x - x^3, \tag{E.2}$$

这里, $x \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ 以及 $F(x, \alpha) = O(x^4)$. 提示: (a) 在空间 $(x, \alpha)$ 中推导对应于 (E.1) 的折分支曲线 $\tilde{\Gamma}$ 的两个方程的系统. 指出这条曲线在原点附近有定义并可被 $\eta$ 局部参数化 (见例 8.1).

(b) 计算在 $x = 0$ 附近代表曲线 $\tilde{\Gamma}$ 的函数 $\alpha_1 = A_1(x)$, $\alpha_2 = A_2(x)$ 的 Taylor 展开式中的主项. 证明: $\tilde{\Gamma}$ 在 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面上的投影 $\tilde{T}$ 在原点附近有两个分枝 $\tilde{T}_{1,2}$, 它们位于参数平面的半平面 (关于 $\alpha_1$ 轴) 的两边, 并终止在点 $\alpha = 0$, 且与此轴相切.

(c) 解释为什么 (E.1) 在原点附近没有其他分支曲线. 构造参数平面的局部同胚, 它将曲线 $\tilde{T}_{1,2}$ 映为截断系统 (E.2) 对应的曲线 $T_{1,2}$(见 8.2.2 节). 指出所得映射可微, 并在 $\alpha = 0$ 计算它的几个 Taylor 系数.

(d) 求证: 系统 (E.1) 在包含上半轴 $\{\alpha : \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0\}$ 的区域内在原点附近有三个平衡点, 而在包含下半轴 $\{\alpha : \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 < 0\}$ 的参数区域内只有一个平衡点. 比较 (E.1) 和 (E.2) 在对应的区域, 沿着折分枝以及在参数平面的原点的平衡点的数目和稳定性.

(e) 构造依赖于参数的局部同胚, 对所有充分小的 $\|\alpha\|$ 它将 (E.1) 的平衡点映为 (E.2) 的平衡点. 证明: 这个映射提供所研究的两个系统的拓扑等价性.

3. (捕食–被捕食系统的 Bautin 分支) 下面的系统是由 Bazykin 和 Khibnik (1981)(也见 Bazykin(1985)) 所作的 Volterra 方程的推广：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2(1-x)}{n+x} - xy, \\ \dot{y} = -\gamma y(m-x), \end{cases}$$

其中 $n, m$ 和 $\gamma$ 是正参数.

(a) 推导系统的 Hopf 分支曲线的方程并证明它与 $\gamma$ 无关.

(b) 用第 3 章的算法 (3.5 节) 计算沿着 Hopf 曲线的第一个 Lyapunov 系数的表达式, 并证明它在 Bautin 点当

$$(m, n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$$

时为零.

(c) 用 (8.23) 计算第二个 Lyapunov 系数, 并证明对所有的 $\gamma > 0$, Bautin 分支是非退化的.

(d) 画出系统的分支图 (在 $(m, n)$ 平面上的参数图和所有可能的相图). 提示：见 Bazykin (1985, p.42).

4. (激光模型中的 Bautin 分支) 证明：下面的带可控共鸣器的激光模型 (Bautin, Leontovich, 1976, p.320-329)：

$$\begin{cases} \dot{m} = Gm\left(n - \dfrac{\beta}{\rho m + 1} - 1\right), \\ \dot{n} = \alpha - (m+1)n \end{cases}$$

在 $(\alpha, \beta)$ 平面内的 Hopf 曲线上有 Bautin 分支点, 如果

$$\rho < 1$$

和

$$\rho - 1 + G\rho > 0.$$

其中 $m \geqslant 0,\ \rho > 0, G > 1$, 以及 $\alpha, \beta > 0$. 提示：Hopf 曲线由非平凡平衡点的 $m$ 坐标参数化. 见 Bautin 和 Leontovich (1976, p. 320-329).

5. (Hopf 分支曲线的正则性) 求证：(8.5) 在 $(x^0, \alpha^0)$ 的 Jacobi 矩阵有最大的秩 (等于 3), 如果在 $\alpha^0$ 平衡点 $x^0$ 有在第 3 章意义下的一般 Hopf 分支.

6. ($n = 3$ 的双交错积) 给定一个 $3 \times 3$ 矩阵 $A$, 构造另外一个 $3 \times 3$ 矩阵 $B \equiv 2A \odot I$, 它的行列式等于 $A$ 所有形式上不同特征值和的积：

$$\det B = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3).$$

提示：$B$ 的元素是 $A$ 的元素的某些线性组合 (答案见第 10 章附录 B).

7. (Bogdanov-Takens 点) (a) 利用计算规范形系数, 求证：平均强迫 van der Pol 振子 (Holmes, Rand, 1978)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - \alpha_2 \end{cases}$$

在 $(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 有非退化的 Bogdanov-Takens 分支. 提示：具两个零特征值的临界平衡点有坐标 $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) 求证：具有所谓 $\sigma$ 调整适应规律的典型参考适应控制系统 (Salam, Bai, 1988)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1^2 \end{cases}$$

在 $\alpha = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{81}\right)$ 有非退化的 Bogdanov-Takens 分支. 画出这个系统在 BT 点附近的相图.

8. (捕食–被捕食系统的 Bogdanov-Takens 分支) (a) 证明：由 Bazykin (1974)(参看例 8.3) 研究的下面的捕食–被捕食模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \dfrac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1}, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \dfrac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2 \end{cases}$$

在 $(\alpha, \delta)$ 平面内有 Hopf 分支和折分支曲线, 它们在 Bogdanov-Takens 点接触. 证明：至少对 $\gamma = 1$ 这个余维 2 分支是非退化的.

(b) 求证：由 Bazykin, Berezovskaya, Denisov 和 Kuznetsov (1981) 分析过的捕食–被捕食系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \dfrac{x_1 x_2}{(1 + \alpha_1 x_1)(1 + \alpha_2 x_2)}, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \dfrac{x_1 x_2}{(1 + \alpha_1 x_1)(1 + \alpha_2 x_2)} \end{cases}$$

在 $\alpha$ 平面上某个点按 $\gamma > 1$ 还是 $\gamma < 1$ 而有不同类型的非退化 Bagdanov-Takens 分支. 提示：引入新变量

$$y_k = \frac{x_k}{1 + \alpha_k x_k}, \quad k = 1, 2$$

或者方程两边乘以 $(1 + \alpha_1 x_1)(1 + \alpha_2 x_2)$ 得轨道等价的多项式系统.

能不能也分析 $\gamma = 1$ 的情形? 提示: 对 $\gamma = 1$ 系统沿着它的 Hopf 曲线 $\alpha = \beta$, 在变换 $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$, $t \mapsto -t$ 作用下不变. 因此, Hopf 分支是退化的且系统有一族闭轨围绕中心.

9. (余维 3 分支规范形) 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + b x_1^3 + d x_1 x_2 + e x_1^2 x_2 \end{cases}$$

当条件 (BT.2) 破坏时是退化的 Bogdanov-Takens 分支的规范形. 其中系数满足 $b \neq 0$, $d \neq 0$ 以及 $d^2 + 8b \neq 0$(Bazykin, Kuznetsov, Khibnik, 1985, 1989; Dumortier, Roussarie, Sotmayor, Zoladek, 1991). 考虑 "焦点情形"

$$d > 0, \quad e < 0, \quad b < -\frac{d^2}{8}.$$

(a) 求在 $\alpha = 0$ 时的规范形相图. 对 $\alpha \neq 0$ 系统有几个平衡点, 它们的可能类型是什么?

(b) 在参数空间 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 中推导折分支曲面和 Hopf 分支曲面的方程并画出它们的图像. 验证: 折分支曲面有一条尖点的直线. 指出在不同的参数区域内平衡点的个数和稳定性.

(c) 计算系统对应于 Bogdanov-Takens 分支的曲线. 验证: 折曲面和 Hopf 曲面沿着 Bogdanov 曲线相切. 猜测由 BT 曲线界定的同宿分支曲面是如何形成的.

(d) 在 Hopf 分支曲面上寻找一条直线, 沿着此线第一个 Lyapunov 系数为零. 在这条线上计算第二个 Lyapunov 系数, 并验证它在原点这个余维 3 点附近不为零. 猜测折分支曲面环的位置.

(e) 用两个半球面在平面 $(\alpha_1, \alpha_3)$ 上的投影, 画出由所得曲面与中心在 $\alpha$ 空间中原点的小球面的交. 求证: 在参数图中必存在有 "大" 同宿闭路分支.

(f) 解释为什么所得参数图很像例 8.3 中的 Bazykin 捕食–被捕食系统的参数图, 并求这个系统在参数空间中的这个余维 3 分支 ($\lambda_1 = \lambda_2 = b_{20} = 0$).

10. (重温 Bogdanov-Takens 分支) (a) Takens-Bogdanov 等价性. 验证: 坐标变换 (Dumortier, 1978)

$$y_1 = \frac{4a^2}{b}\left(x_1 + \frac{\alpha_2}{2a}\right), \quad y_2 = \frac{8a^3}{b^2}(x_2 + \alpha_2 x_1 + a x_1^2)$$

将具零–零分支的 Takens 规范形

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \alpha_2 x_1 + a x_1^2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 + b x_1^2 \end{cases}$$

化为轨道等价 (可能要在改变时间方向后) 的 Bogdanov 规范形

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 \pm y_1 y_2 + O(\|y\|^3) \end{cases}$$

之一, 这里 $ab \neq 0$, 而

$$\beta_1 = \frac{16a^4}{b^3}\left(\alpha_1 + \frac{b\alpha_2^2}{4a^2}\right), \quad \beta_2 = -\frac{4a}{b}\alpha_2.$$

(b) BT 点附近的 Lyapunov 系数. 沿着 Bogdanov 规范形 (8.51) 中的 Hopf 线 $H$ 计算 Lyapunov 系数 $l_1$, 并指出在原点附近它是负的.

(c) BT 点附近的鞍点量. 计算 (8.51) 鞍点的鞍点量 $\sigma_0 = \lambda_1 + \lambda_2$, 并指出沿着同宿分支曲线 $P$ 它是负的.

11. (Rossler 类型混沌系统中的折-Hopf 分支) 考虑属于 Rossler (1979) 的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cx + xz, \end{cases}$$

其中参数 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) 求证: 这个系统至多有两个平衡点 $O$ 与 $P$, 并求它们的坐标.

(b) 验证: 平衡点 $O$ 与 $P$ 在曲面

$$T = \{(a, b, c) : c = ab\}$$

上 “重合”, 且重合后的平衡点有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{2 - a^2} > 0$, 如果 $(a, b, c) \in T$ 且

$$b = 1, \quad a^2 < 2.$$

(c) 沿着折-Hopf 点的轨迹计算这个系统的 Poincaré 规范形 (8.63) 和 Gavrilov 规范形 (8.71), 并用 8.5.1 节的公式求对应的 $s$ 和 $\theta$. 验证 $s = 1$, $\theta < 0$, 并确定 Rossler 系统中出现哪种可能的 “典型” 分支图. 提示: 由于原点永远是系统的平衡点, 系统中的折-Hopf 分支关于参数是退化的. 因此, 它的分支曲线仅仅是由规范形的分支曲线所 “诱导”.

(d) 验证 $-2 < \theta < 0$, 因此, 如果存在鞍–焦点同宿轨道, 它满足 Shilnikov 条件, 从而在余维 2 分支附近存在 “奇怪” 动力学. 提示: 详细情况见 Gaspard (1993).

12. (Lorenz-84 模型) 考虑出现在大气研究中下面的系统 (Lorenz, 1984; Shilnikov, Nicolis, Nicolis, 1995)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} = bxy + xz - z, \end{cases}$$

其中 $(a, b, F, G)$ 是参数. 求证: 系统在

$$F^* = \frac{3a^2 + 3a^2b^2 + 12ab^2 + 12b^2 + 4a}{4(a + ab^2 + 2b^2)},$$
$$G^* = \frac{\sqrt{a}(a^2 + a^2b^2 + 4ab^2 + 4b^2)}{4\sqrt{a + ab^2 + 2b^2}}$$

产生折-Hopf 分支. 提示: 应用三维系统在折-Hopf 点, Jacobi 矩阵的迹和行列式都等于零这个事实.

13. (重温折-Hopf 分支) (a) 在截断振幅系统 (8.82) 中, 对 $s\theta < 0$, 沿着 Hopf 分支曲线计算第一个 Lyapunov 系数, 并验证 8.5.2 节给出的表达式.

(b) 考虑情形 $s = 1$, $\theta < 0$, 这时可能出现异宿环. 设 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 和 $\mu_1 < 0 < \mu_2$ 分别是 $\xi$ 轴上两个鞍点 $E_1$ 和 $E_2$ 的特征值. 求证异宿环, 如果它存在是内不稳定, 只要

$$\frac{\lambda_2\mu_2}{\lambda_1\mu_1} > 1,$$

并对截断系统 (8.82) 验证这个不等式.

(c) 求得系统 (8.82) 在 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 的临界相图. 提示: 见 Wiggins (1990, p. 331-337).

(d) 解释为什么截断系统 (8.82) 当 $s\theta > 0$ 时不可能有周期轨道, 并证明在这情形它在原点附近是局部拓扑等价于二次系统

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi). \end{cases}$$

14. (扰动 Hamilton 系统的余维 2 规范形; 先阅读附录 A) (a) 求证: $Q\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{7}$, 这里

$$Q(h) = \frac{I_2(h)}{I_1(h)}$$

在附录 A 中定义, 用它来处理 Bogdanov-Takens 分支. 提示: 对这个问题存在两种等价的方法:

(i) 验证同宿于 (A.6) 的鞍点的轨道由 $H(\zeta)=\dfrac{1}{6}$ 给出, 它交 $\zeta$ 轴于 $\zeta_1=-\dfrac{1}{2}$. 沿着这个轨道的上半部分将 $\zeta_2$ 表示为 $\zeta_1$ 的函数, 并在 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\zeta_1\leqslant 1$ 的范围内计算所得的积分.

(ii) (A.6) 的从水平轴出发的解对应的同宿轨道可明显地写为

$$\zeta_1(t)=1-\frac{6}{(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})^2},\quad \zeta_2(t)=6\frac{(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})}{(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})^3}.$$

因此, 积分 $I_1\left(\dfrac{1}{6}\right)$ 和 $I_2\left(\dfrac{1}{6}\right)$ 化为在 $-\infty<t<+\infty$ 的某些标准积分.

(b) 对满足 $s\theta<0$(“困难” 情形) 的折-Hopf 的振幅系统 (8.82)

$$\begin{cases} \dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s\rho^2, \\ \dot{\rho}=\rho(\beta_2+\theta\xi+\xi^2), \end{cases}$$

(i) 求证: 下面的奇异尺度化和非线性时间重参数化

$$\xi=\delta x,\quad \rho=\delta y,\quad \mathrm{d}t=\frac{y^q}{\delta}\mathrm{d}\tau,$$

把系统化为

$$\begin{cases} \dot{x}=y^q(-s+x^2+sy^2), \\ \dot{y}=y^q(\theta xy+\delta(\alpha y+x^2y)), \end{cases}$$

其中 $q$ 是某个实数. $\alpha$ 和 $\delta$ 用下面公式应该看作与原来的参数有关的新参数:

$$\beta_1=-s\delta^2,\quad \beta_2=\alpha\delta^2.$$

(ii) 证明: 对

$$q+1=-\frac{2}{\theta}$$

满足 $\delta=0$ 的重尺度化系统

$$\begin{cases} \dot{x}=y^q(-s+x^2+sy^2), \\ \dot{y}=y^q\theta xy \end{cases}$$

是 Hamilton 系统, Hamilton 函数是

$$H(x,y)=\frac{\theta}{2}y^{q+1}\left(s-x^2+\frac{sy^2}{\theta-1}\right),\quad 如果\ \theta\neq 1,$$

或者

$$H(x,y)=\frac{s-x^2}{2y^2}+s\ \mathrm{In}\ y,\quad 如果\ \theta=1$$

(由于 $s\theta<0,\ \theta=1$ 得 $s=-1$). 对满足 $s\theta<0$ 的 $s$ 和 $\theta$ 不同的组合画出 Hamilton 函数 $H$ 的等位线.

(iii) 取 $s=1$ 和 $\theta<0$. 按附录 A 中叙述的思想求证在这个情形, 如果

$$\alpha=-\frac{1}{3}K(0),$$

扰动 $(x,y)$ 系统中发生异宿连接, 其中函数 $K(h)$ 是对 $h\in\left[\frac{\theta^2}{2(\theta-1)},0\right]$ 定义的比

$$K(h)=\frac{I_3(h)}{I_1(h)},$$

其中

$$I_k=\int_{H(x,y)=h}y^qx^k\mathrm{d}y,\quad k=1,3.$$

计算作为 $\theta$ 的函数 $K(0)$. 从这个信息推导原来振幅系统在 $(\beta_1,\beta_2)$ 平面上的异宿曲线 $P$ 的近似表达式.

(iv) 证明 $K(h)$ 关于 $h$ 的单调性, 从而建立了截断系统极限环的唯一性. 提示: 见 Chow, Li 和 Wang (1989b, 1989a).

(c) 考虑 Hopf-Hopf 分支的 "困难" 情形的截断振幅系统 (8.115)

$$\begin{cases}\dot\xi_1=\xi_1(\mu_1+\xi_1-\theta\xi_2+\Theta\xi_2^2),\\ \dot\xi_2=\xi_2(\mu_2+\delta\xi_1-\xi_2+\Delta\xi_1^2),\end{cases}$$

$(\theta,\delta)$ 属于情形 I, II 或 VI 之一 (这时 Hopf 分支有可能, 见 8.6.2 节).

(i) 求证: 引入新参数 $\alpha>0$ 和 $\beta$ 将 Hopf 曲线

$$\mu_1=-\alpha,\quad \mu_2=\frac{\delta-1}{\theta-1}\alpha+\alpha\beta,$$

的邻域参数化, 并用奇异重尺度化

$$\xi_1=\alpha x,\quad \xi_2=\alpha y,\quad t=\frac{1}{\alpha}\tau$$

将规范形变换成系统

$$\begin{aligned}\dot x&=x(-1+x-\theta y+\alpha\Theta y^2),\\ \dot y&=y\left(\frac{\delta-1}{\theta-1}+\beta+\delta x-y+\alpha\Delta x^2\right).\end{aligned}$$

(ii) 验证对应于 $\alpha=\beta=0$ 的系统

$$\dot x=x(-1+x-\theta y),\quad \dot y=y\left(\frac{\delta-1}{\theta-1}+\delta x-y\right)$$

对 $x,y>0$ 是轨道等价于 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{q}x^py^q\left(-1+x+\frac{\theta-1}{\delta-1}y\right),$$

其中

$$p=\frac{1-\delta}{\theta\delta-1},\quad q=\frac{1-\theta}{\theta\delta-1}.$$

提示: 时间重参数化因子是 $\gamma(x,y)=x^{p-1}y^{q-1}$.

(iii) 画出 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial y},\\ \dot{y}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\end{cases}$$

对情形 I, II 和 VI 的相图. 验证在情形 VI$(p,q>0)$ 闭等位线 $H=$ 常数充满由异宿环 $H=0$ 所界定的三角形.

(iv) 考虑情形 VI. 按照附录 A 的方法, 求证: 当 $\alpha,\beta\neq 0$ 时, 时间重参数化的尺度化系统有异宿环, 如果

$$\beta=-R(0)\alpha+O(\alpha^2),$$

其中

$$R(h)=\frac{I_1(h)}{I_0(h)},$$

以及

$$I_1(h)=\int_{H\leqslant h}(p\Theta x^{p-1}y^{q-1}+q\Delta x^{p+1}y^{q-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_0(h)=\int_{H\leqslant h}qx^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

提示: 应用 Stokes 公式并考虑到 Hamilton 向量场的散度等于零.

(v) 用 $\theta,\delta,\Theta$ 和 $\Delta$ 计算 $R(0)$, 并推导异宿曲线 $Y$ 的二次近似. 验证 $Y$ 由 8.6.2 节给出的表达式.

(vi) 求证: 截断振幅系统 (8.115) 中的 Hopf 分支曲线 $H$ 和异宿曲线 $Y$ 在 $\mu_1=\mu_2=0$ 至少有二次切触.

15. (Hopf-Hopf 分支的 Poincaré 规范形) (a) 利用有效的计算代数系统之一推导 Hopf-Hopf 分支临界共振系数的公式 (8.90)~(8.93). 提示: 下面一系列的 MAPLE 命令求解这个问题:

```
> readlib(mtaylor);
```

```
> readlib(coeftayl);
```

这些命令引导执行 mtaylor 和 coeftayl, 它们分别从 MAPLE 库计算截断多元 Taylor 级数展开以及个别系数.

```
>    P: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
>                    g[j, k, l, m]*z^j*z1^k*u^l*u1^m,
>               j=0..3),k=0..3),l=0..3),m=0..3),
>    [z,z1,u,u1],4);
>    Q: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
>                  h[j,k,l,m]*z^j*z1^k*u^l*u1^m,
>               j=0..3),k=0..3),l=0..3),m=0..3),
>      [z,z1,u,u1],4);
>    P1: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
>                    g1[j,k,l,m]*z1^j*z^k*u1^*u1^m,
>                j=0..3),k=0..3),l=0..3),m=0..3),
>        [z,z1,u,u1],4);
>    Q1: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
>                    h1[j,k,l,m]*z1^j*z^k*u1^l*u1^m,
>                j=0..3),k=0..3),l=0..3),m=0..3),
>     [z,z1,u,u1],4);
> for jj from 0 to 1 do
>    for kk from 0 to 1 do
>       for ll from 0 to 1 do
>         for mm from 0 to 1 do
>           if jj+kk+ll+mm <2 then
>            g[jj,kk,ll,mm]: =0;h[jj,kk,ll,mm]: =0
>            g1[jj,kk,ll,mm]: =0;h1[jj,kk,ll,mm]: =0
>           fi;
>         od;
>      od;
>  od;
> od;
> g[1,0,0,0]: =I*omega;g1[1,0,0,0]: =-I*omega;
> h[1,0,0,0]: =I*omega;h1[1,0,0,0]: =-I*omega;
```

用这些确定在临界参数值 (8.88) 右端以及它们的共轭表达式; 用 z, z1, u, u1, 分别表示 $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, 用 omega 和 Omega 分别表示 $\omega_1$ 和 $\omega_2$.

```
> R: =I*omega*v+G[2,1,0,0]*v 2*v1+G[1,0,1,1]*v*w*w1;
> S: =I*omega*v+H[1,1,1,0]*v*v1*w+H[0,0,2,1]*w ^2*w1;
```

这些是规范化系统 (8.89)(直到包括 3 阶) 右端的说明, 其中 v, v1, w, w1, 分别代表 $w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2$.

```
> VV: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
                    V[j,k,l,m]*z^j*z1^k*u^l*u1^m,
               j=0..3) k=0..3),l=0..3), m=0..3),
   [z,z1,u,u1],4);
>WW: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
                    W[j,k,l,m]*z^j*z1^k*u^l*u1^m,
               j=0..3)k=0..3),l=0..3), m=0..3),
      [z,z1,u,u1],4);
> VV1: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
                    V1[j,k,l,m]*z1^j*z^k*u^l*u^m,
               j=0..3)k=0..3),l=0..3),m=0..3),
     [z,z1,u,u1],4);
> WW1: = mtaylor(sum(sum(sum(sum
>                    W1[j,k,l,m]*z1^j*z^k*u^l*u^m,
>              j=0..3) k=0..3),l=0..3), m=0..3),
>     [z,z1,u,u1],4);
> for j from 0 to 1 do
>   for k from 0 to 1 do
>      for l from 0 to 1 do
>         for m from 0 to 1 do
>              if j+k+l+m <2 then
>               V[j,k,l,m]: =0;V1[j,k,l,m]: =0
>               W[j,k,l,m]: =0;W1[j,k,l,m]: =0
>            fi;
>         od,
>      od;
>   od;
> od;
> V[1,0,0,0]: =1;V[2,1,0,0]: =0;V[1,0,1,1]: =0;
> W[0,0,1,0]: =1;W[1,1,1,0]: =0;W[0,0,2,1]: =0;
> V1[1,0,0,0]: =1;V1[2,1,0,0]: =0;V1[1,0,1,1]: =0;
```

```
> W1[0,0,1,0]: =1;W1[1,1,1,0]: =0;W1[0,0,2,1]: =0;
```

用这些命令将系统变换 (以及它的共轭) 成确定的规范形. 它的系数必须被求得.

```
> V_z: =diff(VV, z); V_z1=diff(VV, z1);
> V_u: =diff(VV, u); V_u1=diff(VV, u1);
> W_z: =diff(WW, z); W_z1=diff(WW, z1);
> W_u: =diff(WW, u); W_u1=diff(WW, u1);
```

规范化变换的偏导数被计算.

```
> D_1: =R-(V_z*P+V_z1*P1+V_u*Q+V_u1*Q1);
> D_2: =S-(V_z*P+W_z1*P1+W_u*Q+V_u1*Q1);
```

条件D_1=0和D_2=0等价于确定变换规范化的要求. 现在应该用z, z1, u和u1展开D_1和D_2. 这可用

```
> v: =VV; v1: =VV1;
> w: =WW; w1: =WW1;
```

来达到. 现在可以将D_1和D_2展开为z, z1, u, u1的 Taylor 级数

```
> DD_1: =mtaylor(D_1, [z,z1,u,u1], 4);
> DD_2: =mtaylor(D_2, [z,z1,u,u1], 4);
```

寻找变换的二次系数的工作都已经准备好了. 将DD_1和DD_2中对应的Taylor系数等于零, 并求解对V[j, k, l, m]和W[j, k, l, m]满足 j+k+l+m=2 所得的方程:

```
for j from 0 to 2 do
>   for k from 0 to 2 do
>      for l from 0 to 2 do
>         for m from 0 to 2 do
>              if j+k+l+m =2 then
>               V[j,k,l,m]: =solve(
   coeftayl(DD)_1,[z,z1,u,u1]=[0,0,0,0], [j,k,l,m])=0,
                V[j,k,l,m]);
>               W[j,k,l,m]: =solve(
   coeftayl(DD_2,[z,z1,u,u1]=[0,0,0,0],[j,k,l,m])=0,
               W[j,k,l,m]:
>          fi;
>       od,
>    od;
> od;
```

```
> od;
```

最后, 可求得共振项的系数:

```
> G[2, 1, 0, 0]: =solve(
> coeftayl(DD_1, [z,z1,u,u1]=[0,0,0,0], [2,1,0,0]=0,
  G[2,1,0,0];
> G[1,0,1,1]: =solve(
> coeftayl( DD_1, [z,z1,u,u1]=[0,0,0,0], [1,0,1,1]=0,
  G[1,0,1,1];
> H[0,0,2,1]: =solve(
> coeftayl(DD_2, [z,z1,u,u1]=[0,0,0,0], [0,0,2,1]=0,
  H[0,0,2,1];
> H[1,1,1,0]: =solve(
> coeftayl(DD_2, [z,z1,u,u1]=[0,0,0,0], [1,1,1,0]=0,
  H[1,1,1,0]);
```

问题得到解决.

(b) 扩大叙述的程序求五阶共振项系数.

## 8.9　附录 A: Bogdanov 规范形的极限环与同宿轨道

考虑 $s=-1$ 的 Bogdanov-Takens 分支规范形

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1 + \beta_2\xi_1 + \xi_1^2 - \xi_1\xi_2. \end{cases} \tag{A.1}$$

**定理 8.9**　*对应于系统 (A.1) 的鞍点同宿分支, 存在唯一光滑的从 $\beta=0$ 出发的曲线 $P$, 有局部表达式*

$$P = \left\{(\beta_1,\beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2),\ \beta_2 < 0\right\}.$$

*此外, 对小 $\|\beta\|$, 系统 (A.1) 对位于由 Hopf 分支曲线 $H$ 和同宿分支曲线 $P$ 所界定的区域内的参数值有唯一稳定双曲环, 且在这个区域的外面无环.*

**证明概要**　第一步 (平移坐标轴). 环和同宿轨道只能在 (A.1) 有两个平衡点的情况下才存在. 因此, 我们把注意力限制在折曲线 $T$(见 8.4.2 节) 左方的参数区域. 将系统的坐标原点移到 (A.1) 左边的 (反鞍点) 平衡点 $E_1$ 处:

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \eta_1^0, \\ \xi_2 = \eta_2, \end{cases}$$

其中

$$\eta_1^0=-\frac{\beta_2+\sqrt{\beta_2^2-4\beta_1}}{2}$$

是 $E_1$ 的 $\eta_1$ 坐标. 显然有

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\eta}_1=\eta_2,\\ \eta_2=\eta_1(\eta_1-\nu)-(\eta_1^0\eta_2+\eta_1\eta_2),\end{array}\right. \tag{A.2}$$

其中

$$\nu=\sqrt{\beta_2^2-4\beta_1}$$

是左边的平衡点 $E_1$ 和右边的平衡点 $E_2$ 之间的距离.

第二步 (放大). 执行与参数无关的奇异重尺度化使得两个平衡点之间的距离等于 1, 并引入新时间:

$$\eta_1=\frac{\zeta_1}{\nu},\quad \eta_2=\frac{\zeta_2}{\nu^{3/2}},\quad t=\frac{\tau}{\nu^{1/2}}. \tag{A.3}$$

这个重尺度化将 (8.55) 化为

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\zeta}_1=\zeta_2,\\ \dot{\zeta}_2=\zeta_1(\zeta_1-1)-(\gamma_1\zeta_2+\gamma_2\zeta_1\zeta_2),\end{array}\right. \tag{A.4}$$

这里的 · 表示关于新时间 $\tau$ 的导数以及

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1=\eta_1^0\nu^{-1/2},\\ \gamma_2=\nu^{1/2}.\end{array}\right. \tag{A.5}$$

只有 $\gamma_2$ 的非负值应该考虑. 显然, 在两个平衡点区域内当 $\beta\to 0$ 时 $\gamma\to 0$, 重尺度化 (A.3) 如 "显微镜" 把原点 $\eta=0$ 的邻域放大 (注意 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 两个方向的放大长度不同). 藉 (A.5) 的帮助系统 (A.4) 轨道等价于由 (A.2) 诱导的系统 (定义见第 2 章). 对 $\gamma\neq 0$, 研究 (A.4) 的极限环和同宿轨道得出 (A.2) 关于这个问题的完全信息.

第三步 (Hamilton 性质). 对小 $\|\gamma\|$, 系统 (A.4) 看作系统

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\zeta}_1=\zeta_2,\\ \dot{\zeta}_2=\zeta_1(\zeta_1-1)\end{array}\right. \tag{A.6}$$

的扰动系统. 这个系统是 Hamilton 系统

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\zeta}_1=\dfrac{\partial H(\zeta)}{\partial\zeta_2},\\ \dot{\zeta}_2=-\dfrac{\partial H(\zeta)}{\partial\zeta_1},\end{array}\right.$$

Hamilton(能量) 函数为

$$H(\zeta) = \frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{\zeta_2^2}{2} - \frac{\zeta_1^3}{3}. \tag{A.7}$$

Hamilton 函数沿着 (A.6) 的轨道是常数, 即 $\dot{H} = 0$, 因此这些轨道是 (A.7) 的 Hamilton(定向) 等位线 $H(\zeta) =$ 常数 (见图 8.33). 系统 (A.6) 有两个平衡点

$$S_0 = (0,0), \quad S_1 = (0,1),$$

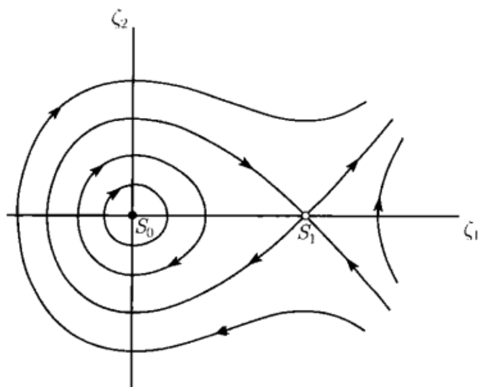



图 8.33　Hamilton 系统 (A.6) 的相图

它们对应于 (A.1) 的平衡点 $E_1$ 和 $E_2$. 平衡点 $S_0$ 是由闭轨所围绕的中心, 平衡点 $S_1$ 是 (中性) 鞍点. 在这些平衡点 Hamolton 函数值是

$$H(S_0) = 0, \quad H(S_1) = \frac{1}{6}.$$

鞍点分界线是由等位线 $H(\zeta) = \dfrac{1}{6}$ 刻画. 这两条分界线位于鞍点的左方, 形成了一条同宿轨道, 它界定围绕 $S_0$ 的闭轨族. 在水平轴上位于 $S_0$ 和 $S_1$ 之间的线段 $0 \leqslant \zeta_1 \leqslant 1$ 可被 $h \in \left[0, \dfrac{1}{6}\right]$ 参数化, 如果取 $h$ 为 Hamilton 函数 $H(\zeta_1, 0)$ 的值, 则它关于 $\zeta_1 \in [0,1]$ 单调.

第四步 (分裂函数的定义). 现在对小但不为零的 $\|\gamma\|$ 考虑系统 (A.4), 它不再是 Hamilton 系统. 注意对所有 $\gamma$, $S_0$ 和 $S_1$ 是 (A.4) 的平衡点. 由于系统 (A.6) 是高度结构不稳定, 对 $\gamma \neq 0$, (A.4) 的相图拓扑是完全不同于 (A.6) 的相图: 闭轨族消失且鞍点分界线通常也分裂.

利用 $\xi_1$ 轴上介于 $S_0$ 和 $S_1$ 之间的线段的参数化, 在这个线段内取点使 $h \in \left(0, \dfrac{1}{6}\right)$ 并考虑 (A.4) 通过这点的轨道 $\Gamma$(见图 8.34). 任何这样的轨道时间向前和向后都将与水平轴 (至少) 再一次相交. 分别记这些交点为 $Z_+$ 和 $Z_-$. 现在取在点

$Z_+$ 和 $Z_-$ 的 Hamilton 值之差 $\Delta(h,\gamma)$ 定义为轨道分裂函数:

$$\Delta(h,\gamma) = H(Z_-) - H(Z_+). \tag{A.8}$$

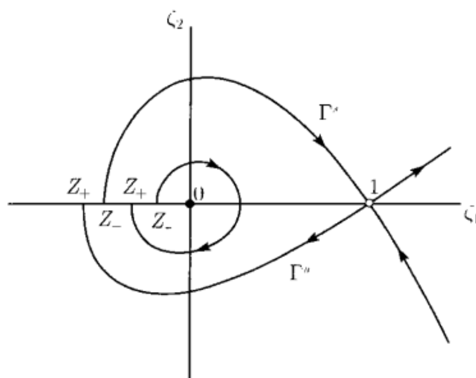



图 8.34　分裂函数的定义

用 $\Delta(0,\gamma)=0$ 以及对 $h=\dfrac{1}{6}$ 利用相同公式 (A.8), 将这个函数的定义扩充到这个线段的端点, 现在只考虑 $Z_+$ 和 $Z_-$ 作为鞍点 $S_1$ 的不稳定和稳定的分界线 $\Gamma^u$ 和 $\Gamma^s$ 与水平轴的交点 (见图 8.33). 因此, $\Delta\left(\dfrac{1}{6},\gamma\right)$ 是第 6 章定义的分界线分裂函数. 函数 $\Delta$ 在它的定义域内光滑. 在 Hamilton 情形, 由于 Hamilton 是常数运动, 对一切 $h\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$, $\gamma=0$, $\Delta(h,0)=0$. 具约束 $\gamma_2\geqslant 0$ 的方程

$$\Delta\left(\frac{1}{6},\gamma\right)=0$$

在 $(\gamma_1,\gamma_2)$ 平面上定义了一条从原点出发的曲线 $\mathcal{P}$, 沿着这条曲线系统 (A.4) 有同宿轨道. 类似地, 对 $h\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$, 方程

$$\Delta(h,\gamma)=0$$

在上半参数平面 $\gamma_2>0$ 给定了一条曲线 $\mathcal{L}_h$. 在此曲线上 (A.4) 有通过 $S_0$ 和 $S_1$ 之间对应于 $h$ 的点的环.

第五步 (分裂函数的近似). 对 $\gamma\neq 0$, Hamilton $H(\zeta)$ 沿着 (A.4) 的轨道的变化:

$$\dot{H}=\frac{\partial H}{\partial\zeta_1}\dot{\zeta}_1+\frac{\partial H}{\partial\zeta_2}\dot{\zeta}_2=-(\gamma_1\zeta_2^2+\gamma_2\zeta_1\zeta_2^2).$$

因此

$$\Delta(h,\gamma)=\int_{t_{Z_+}}^{t_{Z_-}}\dot{H}\ \mathrm{d}t=\gamma_1\int_\Gamma\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1+\gamma_2\int_\Gamma\zeta_1\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1, \tag{A.9}$$

其中 $\Gamma$ 的方向为时间增加方向. 显然, 对 $h=\frac{1}{6}$, 积分应理解为沿着两条分界线 $\Gamma^{u,s}$ 积分之和. 公式 (A.9) 是确切的, 但它包含有 (A.4) 的我们不明显知道的轨道 $\Gamma(\Gamma^{u,s})$. 但是, 对小的 $||\gamma||$, (A.4) 的轨道仅仅从 (A.6) 的闭轨 (或者分界线) 偏离一微小距离, 积分可沿着 $H(\zeta)=h$ 取, 而一致逼近:

$$\Delta(h,\gamma)=\gamma_1\int_{H(\zeta)=h}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1+\gamma_2\int_{H(\zeta)=h}\zeta_1\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1+o(||\gamma||).$$

用

$$I_1(h)=\int_{H(\zeta)=h}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1=\int_{H(\zeta)\leqslant h}\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1\geqslant 0 \tag{A.10}$$

和

$$I_2(h)=\int_{H(\zeta)=h}\zeta_1\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1 \tag{A.11}$$

记包含在最后一个方程中的积分. 这些积分是某些椭圆积分.

第六步 ((A.4) 的极限环的唯一性). 由隐函数定理, (第四步引入的) 曲线 $\mathcal{L}_h$ 和 $\mathcal{P}$ 对 $h\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$ 和 $h=\frac{1}{6}$ 分别存在且有表达式

$$\gamma_1=-\frac{I_2(h)}{I_1(h)}\gamma_2+o(|\gamma_2|),\quad \gamma_2\geqslant 0.$$

当 $h$ 从 $h=0$ 变化到 $h=\frac{1}{6}$ 时, 曲线 $\mathcal{L}_h$ 在 $(\gamma_1,\gamma_2)$ 平面从铅直半轴 $\{\gamma:\gamma_1=0,\ \gamma_2>0\}$(因为 $I_2(0)=0$) 移动到同宿曲线 $\mathcal{P}$. 如果这个移动关于 $h$ 单调, 那它将保证对铅直半轴和 $\mathcal{P}$ 之间的参数值, (A.4) 的极限环的唯一性. 对所有其他的参数值环的不存在性是明显的, 因为 (A.4) 的任何一条闭轨必须与 $S_0$ 和 $S_1$ 之间的线段相交. 因此, 对 $h\in\left[0,\frac{1}{6}\right]$ 函数

$$Q(h)=\frac{I_2(h)}{I_1(h)} \tag{A.12}$$

的单调性充分证明极限环的唯一性. 函数 $Q(h)$ 是光滑函数, $Q(0)=0$ 且 (见练习 14(a))

$$Q\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{7}.$$

同时, 最后一个方程导致下面的对 (A.4) 的同宿曲线 $\mathcal{P}$ 的刻画

$$\mathcal{P}=\left\{(\gamma_1,\gamma_2):\gamma_1=-\frac{1}{7}\gamma_2+o(|\gamma_2|),\ \gamma_2\geqslant 0\right\}. \tag{A.13}$$

函数 $Q(h)$ 的图像的数值计算如图 8.35 所示. 它显然是单调的. 这个事实可不用计算机证明, 即下面的引理成立.

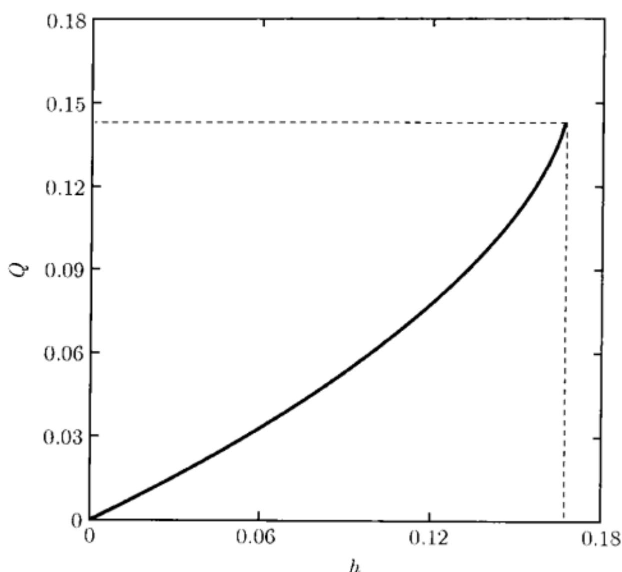



图 8.35 函数 $Q(h)$ 的图像

**引理 8.17** $Q'(h) > 0$, 对 $h \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$. □

**命题 8.1**(Picard-Fuchs 方程) 积分 $I_1(h)$ 和 $I_2(h)$ 满足微分方程组

$$\begin{cases} h\left(h-\frac{1}{6}\right)\dot{I}_1 = \left(\frac{5}{6}h-\frac{1}{6}\right)I_1 + \frac{7}{36}I_2, \\ h\left(h-\frac{1}{6}\right)\dot{I}_2 = -\frac{1}{6}hI_1 + \frac{7}{6}hI_2. \end{cases} \tag{A.14}$$

**证明** 取 (A.6) 的对应于值 $h \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$ 的闭轨方程 $H(\zeta) = h$(见 (A.7)):

$$\frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{\zeta_2^2}{2} - \frac{\zeta_1^3}{3} = h. \tag{A.15}$$

将 $\zeta_2$ 考虑为 $\zeta_1$ 和 $h$ 的函数, 关于 $h$ 微分 (A.15) 得

$$\zeta_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial h} = 1.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}h} = \int_{H(\zeta)=h} \frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_2} \tag{A.16}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}h} = \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1 \mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_2}. \tag{A.17}$$

另一方面, 关于 $\zeta_1$ 微分 (A.15) 得

$$\zeta_1 + \zeta_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \zeta_1} - \zeta_1^2 = 0.$$

将最后一个方程乘以 $\zeta_1^m \zeta_2^{-1}$ 并分部积分得下面等式, 其中实际用到的只是 $m = 0, 1$ 和 2:

$$\int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^{m+2} d\zeta_1}{\zeta_2} = \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^{m+1} d\zeta_1}{\zeta_2} - m \int_{H(\zeta)=h} \zeta_1^{m-1} \zeta_2 d\zeta_1. \tag{A.18}$$

应用积分 (A.10) 和 (A.11) 的定义以及对 $m = 1$ 和 0 的等式 (A.16)~(A.18), 得

$$\begin{aligned}
h\frac{dI_1}{dh} &= h \int_{H(\zeta)=h} \frac{d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{1}{2} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^2 d\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{1}{2} \int_{H(\zeta)=h} \zeta_2 d\zeta_1 - \frac{1}{3} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^3 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^2 d\zeta_1}{\zeta_2} - \frac{1}{3} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^3 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{6} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^2 d\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{1}{3} I_1 \\
&= \frac{5}{6} I_1 + \frac{1}{6} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{5}{6} I_1 + \frac{1}{6} \frac{dI_2}{dh}.
\end{aligned}$$

类似地, 但在 (A.18) 中 $m = 2, 1, 0$, 得下面的链:

$$\begin{aligned}
h\frac{dI_2}{dh} &= h \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{1}{2} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^3 d\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{1}{2} \int_{H(\zeta)=h} \zeta_1 \zeta_2 d\zeta_1 - \frac{1}{3} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^4 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{6} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^3 d\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{2}{3} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1 d\zeta_1}{\zeta_2} \\
&= \frac{7}{6} I_2 + \frac{1}{6} \int_{H(\zeta)=h} \frac{\zeta_1^2 d\zeta_1}{\zeta_2} - \frac{1}{6} \int_{H(\zeta)=h} \zeta_2 d\zeta_1 \\
&= \frac{7}{6} I_2 - \frac{1}{6} I_1 + \frac{1}{6} \frac{dI_2}{dh}.
\end{aligned}$$

考虑到最后的结果, 得 (A.14). □

**命题 8.2**(Riccati 方程)　由 (A.12) 定义的函数 $Q(h)$ 满足 Riccati 方程

$$h\left(h - \frac{1}{6}\right)\dot{Q} = -\frac{7}{36} Q^2 + \left(\frac{h}{3} + \frac{1}{6}\right) Q - \frac{h}{6}. \tag{A.19}$$

**证明**　事实上, 利用 (A.14),

$$
\begin{aligned}
h\left(h-\frac{1}{6}\right)\dot{Q} &= h\left(h-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\dot{I}_2}{I_1}-\frac{I_2\dot{I}_1}{I_1^2}\right)\\
&= -\frac{h}{6}\frac{I_1}{I_1}+\frac{7h}{6}\frac{I_2}{I_1}-\frac{I_2}{I_1}\left(\left(\frac{5h}{6}-\frac{1}{6}\right)\frac{I_1}{I_1}+\frac{7}{36}\frac{I_2}{I_1}\right)\\
&= -\frac{h}{6}+\frac{7h}{6}Q-Q\left(\frac{5h}{6}-\frac{1}{6}+\frac{7}{36}Q\right)\\
&= -\frac{7}{36}Q+\left(\frac{h}{3}+\frac{1}{6}\right)Q-\frac{h}{6}.
\end{aligned}
$$

□

将 $Q(h)=\alpha h+O(h^2)$ 代入 Riccati 方程 (A.19) 立即得 $\alpha=\frac{1}{2}$, 或者

$$\dot{Q}(0)=\frac{1}{2}>0.$$

下面的命题也是 (A.19) 的直接结论.

**命题 8.3**　对所有 $h\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, 有 $0\leqslant Q(h)\leqslant\frac{1}{7}$.

**证明**　函数 $Q(h)$ 对小 $h>0$ 是正的. 假设 $\bar{h}\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$ 是 $Q(h)$ 的图像与 $h$ 轴的第一个交点, 就是说, $Q(\bar{h})=0$, 且对一切 $h\in(0,\bar{h})$ 有 $Q(h)>0$. 于是

$$\bar{h}\left(\bar{h}-\frac{1}{6}\right)\dot{Q}(\bar{h})=-\frac{\bar{h}}{6}<0.$$

由此得 $\dot{Q}(\bar{h})>0$, 矛盾.

现在假设 $\bar{h}\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$ 是 $Q(h)$ 的图像与直线 $Q=\frac{1}{7}$ 的第一个交点, 这表明 $Q(\bar{h})=\frac{1}{7}$. 于是

$$\bar{h}\left(\bar{h}-\frac{1}{6}\right)\dot{Q}(\bar{h})=\frac{5}{42}\left(\frac{1}{6}-\bar{h}\right)>0,$$

这导致 $\dot{Q}(\bar{h})<0$, 矛盾, 命题得证. □

最后, 计算 $Q(h)$ 在点 $0<\bar{h}<\frac{1}{6}$ 的二阶导数, 这里假定 $\dot{Q}$ 为零, $\dot{Q}(\bar{h})=0$, 有

$$\bar{h}\left(\bar{h}-\frac{1}{6}\right)\ddot{Q}(\bar{h})\Big|_{\dot{Q}(h)=0}=\frac{1}{3}\left(Q-\frac{1}{2}\right)<0.$$

因此, 在使 $\dot{Q}(\bar{h})=0$ 的任何点 $\ddot{Q}(\bar{h})>0$ (即所有绝值都是绝小点). 这导致这样的点并不存在, 因为 $Q(0)=0$ 且 $Q\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{7}=\max_{0\leqslant h\leqslant\frac{1}{6}}Q(h)$. 因此, 对 $h\in\left[0,\frac{1}{6}\right]$ 有 $\dot{Q}(h)>0$, 引理 8.17 得证.

引理 8.17 提供了 (A.4) 环的唯一性.

**注**　事实上, 这个引理也给出了环的**双曲性**, 因为可以证明由 $Q'(h) > 0$, 得知对小 $\gamma_2 > 0$ 环的乘子的对数

$$\ln \mu = -\gamma_2 I_1(h) Q'(h) + o(\gamma_2) < 0,$$

因此极限环的乘子 $\mu$ 满足 $0 < \mu < 1$. ◇

第七步 (回到原来的参数). 为了将所得结果应用到原来的系统 (A.2)(从而对 (A.1)), 我们必须更详细地研究由 (A.5) 给定映射 $\gamma = \gamma(\beta)$. 这个映射定义在区域

$$\{\beta : 4\beta_1 \leqslant \beta_2^2\} \in \mathbb{R}^2$$

上, 它是由折曲线 $T$ 所界定并位于这曲线的左方. 此映射将这区域同胚映为上半平面

$$\{\gamma : \gamma_1 \geqslant 0\} \in \mathbb{R}^2.$$

由于这一映射光滑, 它的逆映射较容易研究. 由 (A.5) 有

$$-\frac{\beta_2}{2} - \frac{\gamma_2^2}{2} = \gamma_1\gamma_2, \quad \beta_2^2 - 4\beta_1 = \gamma_2^4.$$

由反函数定理, 这两个方程定义了一个光滑函数 $\beta(\gamma)$. 可以验证, 这个函数有表达式

$$\begin{cases} \beta_1 = \gamma_1\gamma_2^2(\gamma_1 + \gamma_2) + o(\|\gamma\|^4), \\ \beta_2 = -\gamma_2(2\gamma_1 + \gamma_2) + o(\|\gamma\|^2). \end{cases} \tag{A.20}$$

映射 (A.20) 映 $(\gamma_1, \gamma_2)$ 平面上对应于 $h = 0$ 的铅直半轴为 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面上的 Hopf 分支线 $H$(如我们预先期望的, 当 $h \to 0$, (A.4) 的环收缩到 $S_0$). 从定理 8.9 的叙述得知由 (A.13) 给出的同宿曲线 $\mathcal{P}$ 被 (A.20) 映为曲线

$$P = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2),\ \beta_2 < 0\right\}.$$

(A.2) 在由 $H$ 和 $P$ 所围区域内的环唯一且双曲. 这就完全给出了定理 8.9 证明概要. □

## 8.10　附录 B: 文献评注

双参数系统在三重平衡点 (**尖分支**) 附近的平衡点结构已经知道很长时间了 (见 Arnold 的综合性文章, 1984). 由于任何一个纯量系统可以写为梯度系统 $\dot{x} = -V_x(x, \alpha)$, 尖分支的拓扑规范形自然出现在 Thom(1972) 的 7 种基本突变的名单

中, 连同折奇异性 (codim 1) 和燕尾 (codim 3) 奇异性以及它们的通有开折也在其中.

在第一个 Lyapunov 系数 $l_1(0)$ 为零的点附近的一般双参数分支图首先是由 Bautin(1949) 得到. 因此, 称这种分支为Bautin 分支. Serebriakova(1959) 借助一般系统的实 Taylor 系数计算第二个 Lyapunov 系数 $l_2(0)$, 并推导了 Bautin 点附近环–折分支曲线的渐近公式. Hassard, Kazarinoff 和 Wan (1981) 就复 Taylor 系数 $g_{kl}(0)$ 和一些中间表达式叙述了 $c_2(0)$ 的表达式. 一个直接借助 $g_{kl}(0)$ 表达 $l_2(0)$ 的紧凑公式等价于 (8.32), 可在 Bautin 和 Shilnikov(1980) 的参考文献 (Schuko, 1968) 中找到. 基于奇点理论和 Poincaré 规范形的思想的 Bautin 分支的现代处理属于 Arnold(1972) 和 Takens (1973). Takens 也还研究了 codim>2 的 Hopf 分支的更高的退化性 (例如 $l_2(0) = 0$ 的情形). Bautin 的漂亮叙述和有关的分支可以在 (Shinikov et al., 2001, 11.5 节) 中找到.

具二重零特征值的平衡点附近的分支图的主要特性为 Andronov 学校的数学家们在 20 世纪 60 年代后期所得到, 并用来分析具体模型 (Bautin, Leontovich, 1976, p.183-186). 但是, 完整的图像包括极限环的唯一性是属于 Bogdanov(1976b)(他的结果被 Arnold (1972) 和 Takens(1974b) 宣布过). 他们的分析基于 Pontryagin(1934) 的技巧, 即把极限环定位在耗散的扰动 Hamilton 系统并对所得的椭圆积分作不平凡的估计. Dumortier 和 Rousseau (1990) 应用 Coppel 关于 Lienard 平面系统的一条定理来建立 Bogdanov-Takens 规范形的极限环的唯一性而避免了椭圆积分. 虽然显得简单, 但这个方法没有提供同宿分支曲线的局部近似. Annabi, Annabi 和 Dumortier (1992) 证明了共轭同胚连续依赖于参数. 我们对零–零分支的叙述 (8.4 节和附录 A) 接近于 Bogdanov 原来的文章. 但是, 附录 A 中引理 8.17 的证明是由 van Gils 提供给作者的, 它比 Bogdanov 原来的证明简单许多. 其他优秀著作的如 Arrowsmith 和 Place(1990) 把 Bogdanov-Takens 分支称为 "尖" 分支, 因为临界相图罕见的尖, 而尖分支自己这时却消失.

最后两个余维 2 分支的分析, 即折-Hopf 和 Hopf-Hopf 情形更近代. 对它们的研究是在 20 世纪 70 年代后期和 80 年代早期 (Gavrilov, 1978, 1980; Langford, 1979; Keener, 1981; Guckenheimer, 1981). 但是, 即使对截断振幅方程的分析也出现了困难, 在早期的文章以及 Guckenheimer 和 Holmes (1983) 第一版中所叙述的假设被后来的分析证明是错误的. 分析的最少平凡部分, 即证明极限环的唯一性是由 Zoladek(1984, 1987) 作出的. 他的证明后来被 Carr, Chow 和 Hale (1985), van Gils (1985), Cushman 和 Sanders(1985), Chow, Li 和 Wang (1989b, 1989a) 等作了相当大的简化. 对所有余维 2 的情形唯一性的详细证明在 Chow, Li 和 Wang 的书 (1994) 中有叙述. 截断规范形的非对称一般性扰动的研究还远远没有完成. 我们仅建议读者参看 Broer 和 Vegter (1984), Kirk (1991, 1993), 以及 Gaspard (1993), 那

里分析了鞍 - 焦点类型同宿轨道的 Shilnikov 问题.

我们对折-Hopf 分支的叙述基于 Gavrilov (1978) 的文章. Gavrilov 叙述的引理 8.10 没有说明非退化条件, 也没有规范形系数的明确公式. 对折 Hopf 情形的 Poincaré 规范形系数也由 Gamero Freire 和 Rodriguez-Luis (1993) 以及 Wang(1993) 推导过. 我们对 Hopf-Hopf 分支的叙述也是根据 Gavrilov (1980) 的一般方法. 但是, 我们同时推导了不同的规范形以及明显地叙述了有关的非退化条件. 注意, 我们用的 Hopf-Hopf 情形的规范形是不同的, 但与 Zoladek(1987) 研究的等价.

对 $n$ 维系统中所有平衡点的余维 2 分支规范形系数明确的计算公式, 已经被 Kuznetsov(1999) 用由 Coullet 和 Spiegel (1983) 提供的简化/规范化技巧推导. 其中有些系数较早由 Kurakin 和 Judovich (1986) 得到过, 他们在某些临界情形给出了 $n$ 维 ODEs 平衡点稳定性的明确准则. Hopf-Hopf 情形的五阶系数可在 Kuznetsov(1990) 中找到.

一般三参数平面系统的所有可能的余维 3 局部分支已被识别和研究. 有关的规范形由 Bazykin, Kuznetsov 和 Khibnik (1985, 1989) 叙述和讨论, 证明可在 Takens (1974b), Berezovskaya 和 Khibnik (1985), Dumortier, Roussarie 和 Sotomayor 等 (1987) 中找到. 这些余维 3 分支有下面的: (i) 燕尾分支; (ii) 退化 Bautin(Takens-Hopf) 分支; (iii) 具二重平衡点的退化 Bogdanov-Takens 分支, 以及 (iv) 具三重平衡点的退化 Bogdanov-Takens 分支 (见练习 9).



# 第 9 章　离散–时间动力系统不动点的双参数分支

这一章研究双参数映射不动点的一般分支. 首先推导一列这类分支. 如同上一章的最后两个分支, 对这些分支的大多数描述基本上是不完全的. 除了两种情形, 所有情形只有近似规范形可被构造. 其中有些规范形将借助相应的平面连续–时间系统来叙述, 它们的发展算子 $\varphi^1$ 近似问题中的映射 (或者映射适当的迭代). 我们在最小维数叙述近似规范形的分支图并讨论它们与原来系统之间的关系. 在一般的 $n$ 维情形, 这些结果应该应用到映射在中心流形上的限制. 在大多数余维 2 情形给出了限制映射的临界规范形系数明确的计算公式.

## 9.1　不动点的余维 2 分支一览

考虑双参数离散–时间动力系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \tag{9.1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, 以及 $f$ 关于 $(x, \alpha)$ 充分光滑. 假设在 $\alpha = \alpha^0$ 系统 (9.1) 有不动点 $x = x^0$, 在此点折分支、翻转分支, 或者 Neimark-Sacker 分支的条件满足. 于是, 如同连续–时间情形, 一般地, 在 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面存在分支曲线 $\mathcal{B}$, 沿着它系统的不动点具有有关的分支. 更确切地说, 不动点方程

$$f(x, \alpha) - x = 0$$

以及在 $(x, \alpha)$ 取值的 Jacobi 矩阵 $f_x$ 的特征值 (乘子) 的分支条件①

$$\psi(x, \alpha) = 0$$

在 $(n+2)$ 维空间 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中定义了一条以 $(x, \alpha)$ 为坐标的曲线 $\Gamma$ (见图 9.1). 每一点 $(x^0, \alpha^0) \in \Gamma$ 对应于系统 (9.1) 对参数值 $\alpha^0$ 满足有关分支条件的不动点 $x^0$. 标准投影

$$\pi : (x, \alpha) \mapsto \alpha$$

将 $\Gamma$ 映为参数平面上的分支曲线 $\mathcal{B} = \pi\Gamma$.

① 事实上, 函数 $\psi$ 对所有三个余维 1 分支可直接用 Jacobi 矩阵本身表示.

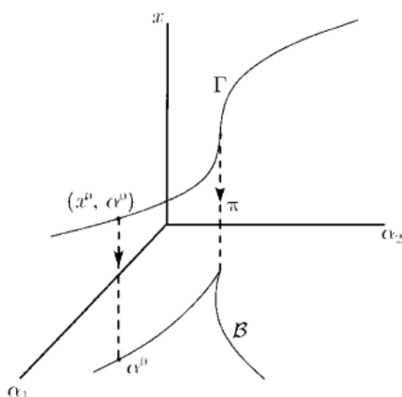



图 9.1　分支曲线 $\Gamma$ 及其投影 $\mathcal{B}$

**例 9.1**(折分支曲线和翻转分支曲线)　假设在 $\alpha=\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0)$, 系统 (9.1) 有乘子 $\mu=1$ 的不动点 $x=x^0$. 如例 4.1, 考虑非线性方程组

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det(f_x(x,\alpha)-I_n)=0, \end{cases} \tag{9.2}$$

这是一个含 $n+2$ 个变量 $(x,\alpha_1,\alpha_2)$、$n+1$ 个方程的方程组. 一般地, 它定义了通过点 $(x^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)$ 的一维光滑流形 (曲线) $\Gamma\subset\mathbb{R}^{n+2}$. 这里 "一般地" 指 (9.2) 的 Jacobi 矩阵的秩是最大 (即等于 $n+1$). 例如, 若在 $\alpha^0$ 关于 $\alpha_1$ 或 $\alpha_2$ 的折分支一般性条件满足 (见第 4 章), 则这个条件就满足.

每一点 $(x,\alpha)\in\Gamma$ 系统 (9.1) 确定了对参数 $\alpha$ 乘子为 1 的不动点. 标准投影映 $\Gamma$ 到参数平面上一条曲线 $\mathcal{B}=\pi\Gamma$. 在此曲线上折分支发生.

类似的构造可对翻转分支进行. 这时系统 (9.2) 应该被系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det(f_x(x,\alpha)+I_n)=0 \end{cases} \tag{9.3}$$

代替. 系统 (9.3) 也是 $(n+2)$ 维空间中含 $(n+1)$ 个方程的方程组, 在最大秩的条件下定义了曲线 $\Gamma\in\mathbb{R}^{n+2}$. 每一点 $(x,\alpha)\in\Gamma$ 对应于系统 (9.1) 对参数 $\alpha$ 乘子为 $\mu=-1$ 的不动点. 标准投影映此曲线到参数平面 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 上的翻转分支曲线. ◇

**例 9.2**(平面映射的 Neimark-Sacker 分支曲线)　考虑平面系统

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2, \tag{9.4}$$

在 $\alpha=\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0)^{\mathrm{T}}$ 系统有不动点 $x^0=(x_1^0,x_2^0)^{\mathrm{T}}$, 它有一对 (非实) 乘子在单位圆上: $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0}, 0<\theta_0<\pi$. 现在考虑 $\mathbb{R}^4$ 中以 $(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2)$ 为坐标的下面三

个纯量方程的方程组：

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det f_x(x,\alpha)-1=0 \end{cases} \tag{9.5}$$

(注意与 (9.2) 的差别, 这个结构已经在例 4.1 用过). 显然, $(x^0,\alpha^0)$ 满足 (9.5), 因为 Jacobi 的行列式等于乘子的积：$\det f_x=\mu_1\mu_2=1$. 可以证明, 若不动点 $x^0$ 在 $\alpha^0$ 有第 4 章意义下的一般 Neimark-Sacker 分支, 则 (9.5) 的 Jacobi 矩阵在 $(x^0,\alpha^0)$ 有最大秩 (等于 3). 因此, 系统 (9.5) 在 $\mathbb{R}^4$ 中定义了一条通过 $(x^0,\alpha^0)$ 的曲线 $\Gamma$. 在这条曲线上的每一点给定 (9.4) 的具 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm i\theta_0}$ 的不动点, 只要乘子保持非实数. $\Gamma$ 在 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 平面上的标准投影给出了 Neimark-Sacker 分支边界 $\mathcal{B}=\pi\Gamma$.

注意, (9.5) 中的第二个方程对具实乘子

$$\mu_1=\tau,\quad \mu_2=\frac{1}{\tau}$$

的不动点也可满足, 显然, 对此有 $\mu_1\mu_2=1$. 如果 $\tau\neq 1$, 不动点称为**中性鞍点**. 上面的构造允许推广到高维 (见第 10 章). ◇

令参数 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 同时变化去追踪分支曲线 $\Gamma$ (或者 $\mathcal{B}$). 于是下面的情况可能在某个参数值发生:

(i) 额外的乘子趋于单位圆, 于是改变了中心流形 $W^c$ 的维数;

(ii) 余维 1 分支的某些非退化条件可能被破坏.

我们可以期望在附近的参数值出现系统新的相图, 这意味着余维 2 分支必须出现. 回忆余维 1 分支的非退化条件 (详见第 4 章).

首先, 取折分支曲线 $\mathcal{B}_T$. 这条曲线上的典型点对应于具单乘子 $\mu_1=1$ 的不动点, 且不再有其他乘子在单位圆上. (9.1) 在中心流形 $W^c$ 上的限制在这种情形是一维的, 并具形式

$$\xi\mapsto\xi+b\xi^2+O(\xi^3). \tag{9.6}$$

由定义, 系数 $b$ 在非退化折分支点不为零.

若跟着翻转分支曲线 $\mathcal{B}_F$, 则其上的典型点对应具单乘子 $\mu_1=-1$ 的不动点, 且不再有其他乘子在单位圆上. (9.1) 在一维中心流形 $W^c$ 上的限制在非退化的翻转点上有 (在适当坐标系下) 形式

$$\xi\mapsto-\xi+c\xi^2+O(\xi^4), \tag{9.7}$$

其中 $c\neq 0$.

最后, 当追踪 Neimark-Sacker 分支曲线 $\mathcal{B}_{\rm NS}$ 时, 典型地, 有具单对非实复共轭乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm i\theta_0}$ 的不动点, 它们是唯一在单位圆上的乘子. 这时, 中心流形 $W^c$ 是

二维的, 系统在这个流形上的限制用复记号可写为

$$z \mapsto z e^{i\theta_0}(1 + d_1|z|^2) + O(|z|^4), \tag{9.8}$$

这里 $d_1 \in \mathbb{C}^1$. 包含的非退化条件是下面两种类型:

(i) 不存在 "强共振":

$$e^{iq\theta_0} \neq 1, \quad q = 1, 2, 3, 4;$$

(ii) "三次非退化性":

$$d = \operatorname{Re} d_1 \neq 0.$$

当沿着余维 1 曲线 (见方程 (9.6)~(9.8)) 移动时, 一般双参数离散–时间系统可能会遇到下面 11 种类型的退化点:

(1) $\mu_1 = 1, b = 0$ (尖分支);

(2) $\mu_1 = -1, c = 0$ (广义翻转分支);

(3) $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, d = 0$ (Chencier 分支);

(4) $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (1:1 共振);

(5) $\mu_1 = \mu_2 = -1$ (1:2 共振);

(6) $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \theta_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ (1:3 共振);

(7) $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}, \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (1:4 共振);

(8) $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$ (折–翻转分支);

(9) $\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = e^{\pm i\theta_0}$;

(10) $\mu_1 = -1, \mu_{2,3} = e^{\pm i\theta_0}$;

(11) $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \mu_{3,4} = e^{\pm i\theta_1}$.

留给读者去解释可能会遇到下面哪些余维 1 曲线. 所列出的分支都由两个独立条件刻画 (即有余维 2). 在一般离散–时间系统中没有其他的余维 2 分支. 这一章余下部分包含有情形 (1)~(8) 在最低可能的相维 ($n = 1$ 对 (1), (2), $n = 2$ 对 (3)~(8)) 下的结果. 注意, 如果映射 (9.1) 是与三维自治 ODEs 系统极限环相应的 Poincaré 映射或者时间–周期平面 ODEs 系统的周期回复映射, 那么只有 (1)~(7) 的情形才有可能. 在这些情形, 只有两个乘子 $\mu_{1,2}$ 它们的乘积永远是正的, $\mu_1\mu_2 > 0$. 虽然关于情形 (9)~(11) 已经知道某些结果, 但在这里我们不叙述它们.

处理分支的方法类似于连续–时间情形的余维 2 分支, 将通过在最低相维空间中研究截断规范形并讨论它们与原来映射之间的关系. 在情形 (4)~(8) 用下面的方法是方便的, 将截断规范形适当的迭代的近似映射看作某个平面自治微分方程的流 $\varphi^t$ 作用下的单位时间移位 $\varphi^1$. 虽然这个近似映射包含任何一个一般系统在对应分

支附近性态的重要信息, 但我们既不用这个近似映射也不用截断规范形提供的拓扑规范形, 因为考虑到任意高阶项会导致拓扑不等价分支图.

类似于连续–时间情形, 可将所得结果借助离散–时间形式的中心流形定理和 Shoshitaishvili 定理 (见第 5 章) 的帮助应用到高维系统中去. 对给定的映射 (9.1), 为了确定分支的性态, 必须计算对应的临界规范形系数. 9.7 节对大多数余维 2 分支用 8.7 节用过的简化/规范化技巧的不同结合来推导这种系数.

## 9.2 尖 分 支

假设光滑纯量映射

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^2 \tag{9.9}$$

在 $\alpha = 0$ 有不动点, 在此点尖分支条件满足. 下面的引理可如同 8.2 节用依赖于参数的坐标平移和尺度化以及引入新参数来证明.

**引理 9.1** 设一维系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x = 0$, 在此点尖分支条件满足

$$\mu = f_x(0,0) = 1, \quad b = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0) = 0.$$

假设下面的一般性条件满足:

(C.1) $f_{xxx}(0,0) \neq 0$;

(C.2) $(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(0,0) \neq 0$.

则存在坐标和参数的光滑可逆变换将系统变成

$$\eta \mapsto \eta + \beta_1 + \beta_2 \eta + s\eta^3 + O(\eta^4), \tag{9.10}$$

其中 $s = \text{sign} f_{xxxx}(0,0) = \pm 1$. □

证明留给读者.

考虑对应于 $s = -1$ 的截断规范形:

$$\eta \mapsto \eta + \beta_1 + \beta_2 \eta - \eta^3. \tag{9.11}$$

它的不动点方程

$$\beta_1 + \beta_2 \eta - \eta^3 = 0 \tag{9.12}$$

与连续-时间情形尖分支规范形平衡点方程重合. 折分支 (不动点 "重合" 并消失) 在 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面的半立方抛物线 $T$ 上发生 (见图 9.2):

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 = 0\}.$$

曲线 $T$ 有两个分枝: $T_1$ 和 $T_2$, 它们在尖点 $(0, 0)$ 相切. 如同连续-时间情形所得的楔形把参数平面分成两个区域. 在区域 1, 即在楔形内部, (9.11) 有三个不动点, 两个稳定一个不稳定; 在楔形外部, 即在区域 2, 只有单个不动点, 它是稳定的. 如果离开原点穿过 $T_1$ 或者 $T_2$, 非退化的折分支 (关于参数 $\beta_1$) 发生. 如果从区域 1 内部趋于这个尖点, 三个不动点合并在一起形成 (9.12) 的三重根.

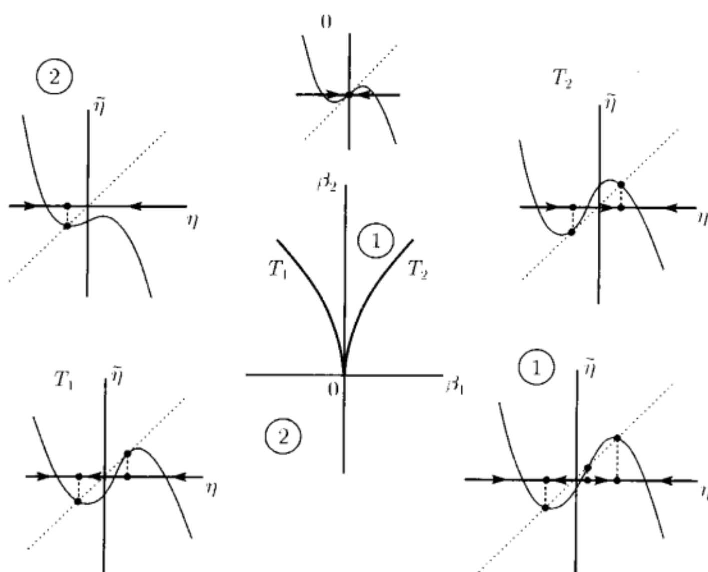



图 9.2　规范形 (9.11) 的分支图

情形 $s = 1$ 可类似处理. 在这种情形, 典型地, 截断映射有一个不稳定不动点, 或者一个稳定不动点和两个不稳定不动点, 这两个不动点可通过折分支成双地重合并消失.

具有 $O(\eta^4)$ 项的系统 (9.10) 被截断后给出了尖分支的拓扑规范形.

**引理 9.2**　映射

$$\eta \mapsto G_\beta(\eta) = \eta + \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$

在原点附近局部拓扑等价于映射

$$\eta \mapsto g_\beta(\eta) = \eta + \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3. \qquad \square$$

引理 9.2 意味着存在参数平面的局部同胚 $\varphi$ (见第 2 章), 以及一维相空间①的依赖于参数的同胚 $h_\beta$, 使得在 $(\eta,\beta)=(0,0)$ 的某个邻域内

$$G_{\varphi(\beta)}(\eta)=(h_\beta^{-1}\circ g_\beta\circ h_\beta)(\eta).$$

容易用隐函数定理证明, $G_\beta$ 与 $g_\beta$ 在对应的 (微分同胚) 参数区域内有相同个数的不动点. 拓扑等价性 (即构造 $\varphi$ 和 $h_\beta$) 的完全证明是困难的, 在这里略去. 综上所述, 可以叙述下面的定理.

**定理 9.1**(尖分支的拓扑规范形)　*任何一个在 $\alpha=0$ 有不动点 $x=0$, 具尖分支的一般双参数纯量映射*

$$x\mapsto f(x,\alpha)$$

*局部拓扑等价于在原点附近的下面规范形之一:*

$$\eta\mapsto\eta+\beta_1+\beta_2\eta\pm\eta^3.$$ □

当然, "一般" 是指 "满足条件 (C.1) 和 (C.2)".

## 9.3　广义翻转分支

考虑光滑纯量映射

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^1,\alpha\in\mathbb{R}^2,\tag{9.13}$$

在 $\alpha=0$ 有不动点 $x=0$, 具乘子 $\mu=f_x(0,0)=-1$ 如同 4.5 节, 可以假设对所有充分小 $\|\alpha\|$, $x=0$ 是不动点, 且可写为

$$f(x,\alpha)=\mu(\alpha)x+a(\alpha)x^2+b(\alpha)x^3+e(\alpha)x^4+g(\alpha)x^5+O(x^6),$$

其中 $\mu(0)=-1$, 且其中包含的所有函数都对 $\alpha$ 光滑. 利用光滑的坐标变换

$$x=y+\delta(\alpha)y^2+\theta(\alpha)y^4,\tag{9.14}$$

可将 (9.13) 变为

$$y\mapsto\mu(\alpha)y+c(\alpha)y^3+d(\alpha)y^5+O(y^6),$$

其中 $\delta$ 和 $\theta$ 是适当选取的光滑函数, $c$ 和 $d$ 为光滑函数. 函数 $\delta(\delta)$ 和 $\theta(\alpha)$ 的确切选取是为了消去映射的二次项和四次项. 如同第 4 章, 令

$$\delta(\alpha)=\frac{a(\alpha)}{\mu^2(\alpha)-\mu(\alpha)}$$

① 回忆同胚 $h_\beta$ 没有假设连续依赖于参数 $\beta$.

以消去二次项, 从而得到 $c$ 的下面表达式

$$c(\alpha)=b(\alpha)+\frac{2a^2(\alpha)}{\mu^2(\alpha)-\mu(\alpha)}. \tag{9.15}$$

如果

$$c(0)=b(0)+a^2(0)=\frac{1}{4}\left[f_{xx}(0,0)\right]^2+\frac{1}{6}f_{xxx}(0,0)\neq 0,$$

那么由定义, 有非退化的翻转分支. 在广义翻转分支点, 同时有

$$\mu(0)=-1,\quad c(0)=0.$$

因此, 现在五次系数 $d$ 进入角色. 可以验证

$$d(0)=g(0)+3a(0)e(0)-2a^4(0)=\left(\frac{1}{120}f_{x^5}+\frac{1}{16}f_xf_{x^4}-\frac{1}{8}[f_x]^4\right)\bigg|_{(x,\alpha)=(0,0)},$$

只要 $c(0)=0$. 在这点引入新参数是有用的.

如果映射

$$(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(\mu(\alpha)+1,c(\alpha))$$

在 $\alpha=0$ 正则, 其中 $c$ 由 (9.15) 给出, 那么可以用

$$\begin{cases}\gamma_1=-(\mu(\alpha)+1),\\ \gamma_2=c(\alpha)\end{cases}$$

作为新参数, 并将 $\alpha$ 考虑为 $\gamma$ 的光滑函数. 若 $d(0)\neq 0$, 则坐标的非奇异尺度化以及新参数将所研究的映射化为形式

$$\eta\mapsto-(1+\beta_1)\eta+\beta_2\eta^3+s\eta^5+O(\eta^6),$$

其中 $s=\operatorname{sign}d(0)=\pm 1$. 由此可证下面的引理.

**引理 9.3**　假设一维系统

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^1,\ \alpha\in\mathbb{R}^2,$$

$f$ 光滑, 在 $\alpha=0$, 有不动点 $x=0$, 并设广义翻转分支条件满足:

$$\mu=f_x(0,0)=-1,\quad c=\frac{1}{4}[f_{xx}(0,0)]^2+\frac{1}{6}f_{xxx}(0,0)=0.$$

假设下面的一般性条件满足:

(GF.1) $D(0)=\left(\frac{1}{15}f_{x^5}+\frac{1}{2}f_xf_{x^4}-[f_x]^4\right)(0,0)\neq 0;$

(GF.2) 映射 $\alpha \mapsto (\mu(\alpha)+1, c(\alpha))^{\mathrm{T}}$ 在 $\alpha = 0$ 正则, 其中 $c(\alpha)$ 由 (9.15) 给出. 于是, 存在坐标和参数的光滑可逆变换将系统化为

$$\eta \mapsto -(1+\beta_1)\eta + \beta_2\eta^3 + s\eta^5 + O(\eta^6), \tag{9.16}$$

其中 $s = \mathrm{sign}\ D(0) = \pm 1$. □

没有 $O(\eta^6)$ 项的系统 (9.16) 称为广义翻转分支的截断规范形. 事实上, 它提供了分支的拓扑规范形.

考虑对应于 $s = 1$ 的规范形:

$$\eta \mapsto g_\beta(\eta) = -(1+\beta_1)\eta + \beta_2\eta^3 + \eta^5. \tag{9.17}$$

分析其二次迭代

$$g_\beta^2(\eta) = (1 + 2\beta_1 + \cdots)\eta - (2\beta_2 + \cdots)\eta^3 - (2 + \cdots)\eta^5 + \cdots,$$

得到分支图如图 9.3 所示. 在区域 1 内映射 (9.17) 在原点的充分小邻域内有单个稳定不动点 $\eta = 0$. 迭代围绕它 "蛙跳" 地趋于这一点.

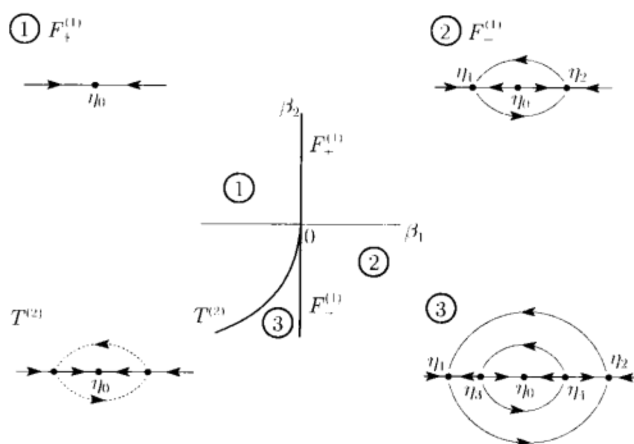



图 9.3 $s = 1$ 时的规范形 (9.16) 的分支图

穿过直线

$$F^{(1)} = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

的上半部分 $F_+^{(1)}$(对应于 $\beta_2 > 0$) 得翻转分支, 当原点的不动点变成不稳定时 (区域 2) 产生稳定周期 2 环 ($g_\beta^2$ 的两个不同不动点). 穿过下半翻转线 $F_-^{(1)}$, 平凡不动点恢复稳定性时, 产生一个不稳定周期 2 环. 在区域 3 两个不同的周期 2 环共存, 一个 "大" 的稳定, 另一个 "小" 的不稳定. 这两个周期 2 环在半抛物线

$$T^{(2)} = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 < 0\right\}$$

上由于 $g_\beta^2$ 的折分支而重合并消失, 因此剩下的是在原点的唯一稳定不动点. 综合起来, 在翻转曲线 $F^{(1)}$ 上的余维 2 点是另外余维 1 分支轨迹的原点, 即周期 2 环的折分支曲线 $T^{(2)}$ 的原点. 曲线 $T^{(2)}$ 在 $\beta=0$ 与 $F^{(1)}$ 相遇且具有二次切触.

下面的引理说明高阶项并不改变 (9.17) 所得的图像, 我们不给出证明.

**引理 9.4**　映射

$$\eta \mapsto -(1+\beta_1)\eta+\beta_2\eta^3\pm\eta^5+O(\eta^6)$$

*在原点附近是局部拓扑等价于映射*

$$\eta \mapsto -(1+\beta_1)\eta+\beta_2\eta^3\pm\eta^5. \qquad \square$$

现在叙述最后一个定理.

**定理 9.2**(广义翻转分支的拓扑规范形)　*任何一个在 $\alpha=0$ 有不动点 $x=0$、具广义翻转分支的一般双参数纯量映射*

$$x \mapsto f(x,\alpha)$$

*在原点附近局部拓扑等价于下面规范形之一:*

$$\eta \mapsto -(1+\beta_1)\eta+\beta_2\eta^3\pm\eta^5. \qquad \square$$

**注**　在广义翻转分支图与 Bautin (广义 Hopf) 分支图之间存在接近的相似性. 这并不是重合, 而是在翻转分支和 Hopf 分支之间存在深入的类似.

对定义通过焦点的截线上的 Poincaré 映射, 极限环是周期 2 轨道, 因此, 对流的 Hopf 分支导致如此定义的映射的翻转分支 (见图 9.4).　◇

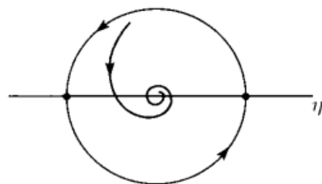



图 9.4　环对应于 Poincaré 映射的周期 2 轨道

## 9.4　Chenciner (广义 Neimark-Sacker) 分支

考虑离散–时间系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad \alpha\in\mathbb{R}^2, \tag{9.18}$$

右端函数 $f$ 光滑, 在 $\alpha=0$ 有不动点 $x=0$, 对此, Neimark-Sacker 分支条件成立. 即不动点的乘子是单的且位于单位圆 $|\mu|=1$ 上:

$$\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0}.$$

如同第 4 章, 对小的 $\|\alpha\|$, 应用复变量把系统 (9.18) 写为

$$z \mapsto \mu(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

其中 $\mu, \omega$ 和 $g$ 是它们变量的光滑函数,

$$\mu(\alpha) = r(\alpha)e^{i\theta(\alpha)},$$

$r(0) = 1, \theta(0) = \theta_0$, 且形式地,

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geqslant 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

其中 $g_{kl}(\alpha)$ 是某些光滑复值函数.

**引理 9.5**(Poincaré 规范形)　映射

$$z \mapsto \mu(\alpha)z + \sum_{2 \leqslant k+ \leqslant 5} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + O(|z|^6), \tag{9.19}$$

其中 $\mu(\alpha) = r(\alpha)e^{i\theta(\alpha)}, r(0) = 1$ 和 $\theta_0 = \theta(0)$, 使得

(CH.0) $e^{iq\theta_0} \neq 1,\ q = 1, 2, \cdots, 6$,

可以用可逆的光滑依赖于参数的复坐标变换

$$z = w + \sum_{2 \leqslant k+l \leqslant 5} \frac{1}{k!l!} h_{kl}(\alpha) w^k \bar{w}^l, \quad h_{21}(\alpha) = h_{32}(\alpha) = 0,$$

对所有充分小 $\|\alpha\|$, 化为映射

$$\begin{aligned} w \mapsto & \mu(\alpha)w + c_1(\alpha)w|w|^2 + c_2(\alpha)|w||w|^4 + O(|w|^6) \\ & = e^{i\theta(\alpha)}(r(\alpha) + d_1(\alpha))|w|^2 + d_2(\alpha)|w|^4)w + O(|w|^6). \end{aligned} \tag{9.20}$$

□

这个引理可用与引理 4.7 相同的方法证明. 由引理 4.7, 可以假设 (9.19) 中所有二次项和非共振三次项都已经消去, $g_{20} = g_{11} = g_{02} = g_{30} = g_{12} = g_{21} = 0$ 以及 $\frac{1}{2}g_{21} = c_1$. 然后, 适当选取 $h_{ij}, i + j = 4$, 可以 “去掉” (9.19) 中所有四次项, 而保持共振三次项的系数 $c_1(\alpha)$ 不接触, 但修改了五次及更高次项的系数. 最后, 可以移去所有五次项, 除了 (9.20) 显示的共振项.

系数 $c_1(\alpha)$ 和 $c_2(\alpha)$(以及 $d_1(\alpha)$ 和 $d_2(\alpha)$) 是光滑复值函数, $c_1(\alpha)$ 可以用公式 (4.25) 计算. 这里不给出 $c_2(\alpha)$ 的公式. 在 9.7.3 节对 $n$ 维映射 ($n \geqslant 2$), 在中心流形上的限制映射对 Chenciner 分支的临界规范形系数作了推导. 在非退化 Neimark-Sacker 分支点, $d = \mathrm{Re}\, d_1(0) = \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta_0}c_1(0)) \neq 0$.

假设在 $\alpha=0$, 同时有

$$\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0},\quad d=\operatorname{Re} d_1(0)=0,$$

这表明 Chenciner (广义 Neimark-Sacker) 分支发生. 在这一情形, 点 $\alpha=0$ 的邻域可用新参数参数化, 即

$$\begin{cases}\beta_1=r(\alpha)-1,\\ \beta_2=\operatorname{Re} d_1(\alpha),\end{cases}$$

只要

(CH.1) 映射 $(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(r(\alpha)-1,\operatorname{Re} d_1(\alpha))$ 在 $\alpha=0$ 正则.

$\beta_1$ 的零值对应于 Neimark-Sacker 分支条件, $\beta_2$ 同时为零给出 Chenciner 点. 给定 (CH.1), 就可用 $\beta$ 表示 $\alpha$, 从而得映射

$$w\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}(1+\beta_1+(\beta_2+\mathrm{i}D_1(\beta))|w|^2+(D_2(\beta)+\mathrm{i}E_2(\beta))|w|^4w+\Psi_\beta(w,\bar{w}),\tag{9.21}$$

其中 $\Psi_\beta=O(|w|^6)$; $D_1(\beta)=\operatorname{Im} d_1(\alpha(\beta)), D_2(\beta)=\operatorname{Re} d_2(\alpha(\beta))$ 和 $E_2(\beta)=\operatorname{Im} d_2(\alpha(\beta))$ 是 $\beta$ 的光滑实值函数, 其中 $\theta(\beta)$ 用来代替 $\theta(\alpha(\beta))$. 映射 (9.21) 是 Chenciner 分支的 "规范形". 截断 $O(|w|^6)$ 项得映射

$$w\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\beta)}(1+\beta_1+(\beta_2+\mathrm{i}D_1(\beta))|w|^2+(D_2(\beta)+\mathrm{i}E_2(\beta))|w|^4)w.\tag{9.22}$$

利用极坐标 $(\rho,\varphi), z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 得到截断映射 (9.22) 下面的表示:

$$\begin{cases}\rho\mapsto\rho(1+\beta_1+\beta_2\rho^2+L_2(\beta)\rho^4)+\rho^6R(\rho,\beta),\\ \varphi\mapsto\varphi+\theta(\beta)+\rho^2Q(\rho,\beta),\end{cases}\tag{9.23}$$

其中 $L_2(\beta)=\dfrac{1}{2(1+\beta_1)}D_1^2(\beta)+D_2(\beta)$, $R$ 和 $Q$ 是光滑函数. 显然, (9.23) 中第一个映射与 $\varphi$ 无关, 故可分开研究①. $\varphi$ 映射描述一旋转, 旋转角度与 $\rho$ 有关, 它近似等于 $\theta(\beta)$. $\rho$ 映射的任何一个不动点对应于截断规范形 (9.22) 的不变圆周.

对 (9.23) 中的 $\rho$ 映射, 仍需假定

(CH.2) $L_2(0)=\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}c_1(0))\right]^2+\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}c_2(0))\neq 0.$

这是对 Chenciner 分支的一个额外非退化条件.

假设 $L_2(0)<0$. 于是, 存在原点的邻域, 在这个邻域中 $\rho$ 映射至多有两个具有相反稳定性的不动点 (它们中 "外面" 的那个是稳定的). 这些点在对应于非退化 Neimark-Sacker 分支 (如果 $\beta_2\neq 0$) 的曲线

$$N=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_1=0\}$$

① 事实上, 9.3 节在处理广义翻转分支时已经研究过类似的映射 $g_\beta^2$.

上从平凡不动点 $\rho = 0$ 分枝. $N$ 对应于 $\beta_2 < 0$ 的那部分 $N_-$, 当从左边到右边穿过它时产生稳定不动点. 这是一个产生稳定不变圆周的超临界 Neimark-Sacker 分支. 在某个 $\beta_2 > 0$, 以相反方向穿过 $N$ 的上半部分 $N_+$ 时, 由超临界 Neimark-Sacker 分支产生不稳定不动点 (不变圆周). 这两个不动点在类似于半抛物线的分支曲线

$$T_c = \left\{(\beta_1\beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4L_2(0)}\beta_2^2 + O(\beta_2^2), \beta_2 > 0\right\}$$

上重合并消失. 对应于曲线 $T_c$ 上的参数值截断规范形 (9.22) 的两个不变圆周重合并消失. 刻画所得截断映射性态的分支图像如图 9.5 所示. 注意, 即使对截断规范形, 这个图像也只是捕获到不变圆周的存在性, 而没有得到在圆周上的轨道结构, 一般地, 随着参数的变化有无理数和有理数的旋转数 (见第 7 章).

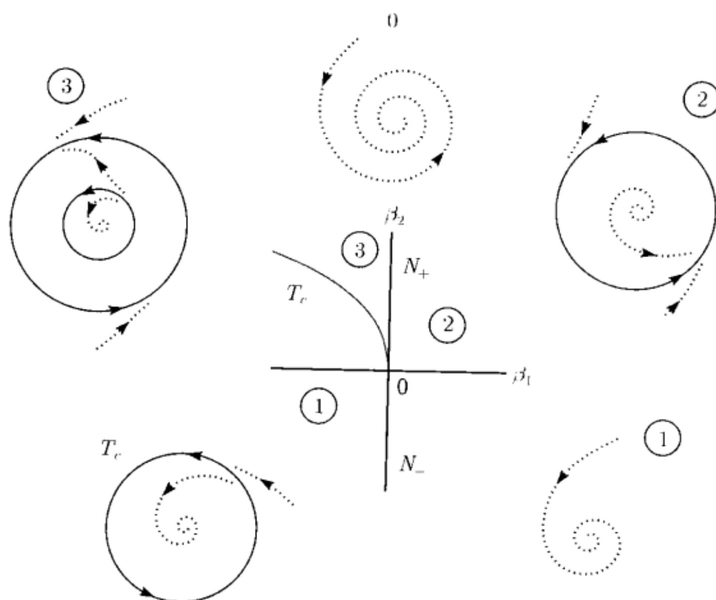



图 9.5　截断映射 (9.22) 对 $L_2(0) < 0$ 时的 Chenciner 分支

情形 $L_2(0) > 0$ 可类似处理, 唯一的不同是 “外面” 的圆周是不稳定的, “里面” 的是稳定的.

如果考虑具一般高阶项的整个映射 (9.21), 一个自然的问题是上面的图像有多少个得到保留. 一个简短的回答是加入了这些高阶项后得到的分支图是**拓扑不等价的**. Neimark-Sacker 分支曲线显然与这些项无关. 这个分支的非退化条件也与这些项无关, 只要 $\beta_2 \neq 0$, 由此对映射 (9.21) 仍成立. 因此, 由定理 4.6, 这个映射在直线 $N$ 附近存在具相应稳定性的小闭不变曲线. 此外, 如同截断映射, 这些曲线在直线 $N$ 附近光滑且在重合曲线 $T_c$ 的狭窄邻域之外存在.

在曲线 $T_c$ 附近情况变得更为复杂. 一般地, 不存在对应于闭不变曲线重合的单参数曲线. 此外, 这样的不变曲线并不是总是存在, 有可能会破坏, 故避免了重合. 可以证明, 存在包含 $T_c$ 的指数式狭窄区域的参数集, 对此映射 (9.21) 有唯一外稳定和内不稳定的闭不变曲线. 这个集的点是无穷多个参数区域的极限点, 参数区域内部有单个 (稳定或不稳定) 闭不变曲线, 以及映射 (9.21) 充分高次的迭代有鞍点和稳定 (或不稳定) 不动点 (见图 9.6). 鞍点的稳定和不稳定不变流形相交并形成同宿结构, 闭不变曲线的 "内部" 或 "外部" 失去它的光滑性而消失, 而没有它的对立部分可重合. 因此, 对 $T_c$ 附近的参数值, 映射存在无穷多个长–周期轨道的出现和消失. 更详细可参看这一章附录中所述的文献, 但完全的图像还不知道.

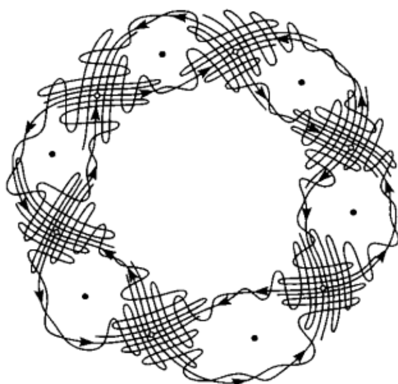


图 9.6　Chenciner 分支附近的异宿结构

# 9.5　强　共　振

### 9.5.1　流近似

当处理强共振时, 我们将沿着某个自治常微分方程系统的轨道的移位, 重复应用映射在它的不动点附近的近似. 这允许我们叙述发生在近似 ODEs 的同宿–异宿分支附近映射的闭不变曲线的*大范围分支*. 虽然映射的确切的分支结构和近似 ODEs 的是*不同的*, 但这种方法提供的信息很难由单独分析映射得到. 平面情形 $(n = 2)$ 对我们的目的已经足够了, 但我们还是在这里给出一般性的构造.

考虑有不动点 $x = 0$ 的映射

$$x \mapsto f(x) = Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9.24}$$

这里 $A$ 是 Jacobi 矩阵, $f^{(k)}$ 是光滑的 $k$ 次多项式向量值函数, $f^{(k)}(x) = O(\|x\|^k)$,

$$f_i^{(k)}(x) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k} b_{i,j_1j_2\cdots j_n}^{(k)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}.$$

与映射 (9.24) 一起考虑相同维数的有平衡点 $x=0$ 的微分方程系统

$$\dot{x}=F(x)=\Lambda x+F^{(2)}(x)+F^{(3)}(x)+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{9.25}$$

其中 $\Lambda$ 是矩阵, $F^{(k)}$ 与上面对应的 $f^{(k)}$ 有相同性质. 用 $\varphi^t(x)$ 记相应于 (9.25) 的流. 一个有趣的问题是有无可能构造一个系统 (9.25), 沿着它的轨道的单位时间移位 $\varphi^1$ 与映射 (9.24) (或者至少是它的近似) 重合.

**定义 9.1**　映射 (9.24) 称为系统 (9.25) 的直到 $k$ 阶近似, 如果它的 Taylor 展开式与 (9.25) 的沿着轨道的单位时间移位直到包括 $k$ 阶项重合,

$$f(x)=\varphi^1(x)+O(||x||^{k+1}).$$

系统 (9.25) 称为近似系统.

用构造 $\varphi^t(t)$ 在 $x=0$ 关于 $x$ 的 Taylor 展开式来解决这个近似问题. 这个表达式可以用 Picard 迭代来得到, 即令

$$x^{(1)}(t)=\mathrm{e}^{\Lambda t}x,$$

它是线性方程 $\dot{x}=\Lambda x$ 具初值 $x$ 的解, 并定义

$$x^{(k+1)}(t)=\mathrm{e}^{\Lambda t}x+\int_0^t\mathrm{e}^{\Lambda(t-\tau)}\left(F^{(2)}(x^{(k)}(\tau))+\cdots+F^{(k+1)}(x^{(k)}(\tau))\right)\mathrm{d}\tau. \tag{9.26}$$

可知, 对任何 $l\leqslant k$, $(k+1)$ 次迭代并不改变 $O(||x||^l)$ 项. 将 $t=1$ 代入 $x^{(k)}(t)$, 得到 $\varphi^1(t)$ 的直到包括 $k$ 阶项的 Taylor 展开式

$$\varphi^1(x)=\mathrm{e}^{\Lambda}x+g^{(2)}(x)+g^{(3)}(x)+\cdots+g^{(k)}(x)+O(||x||^{k+1}). \tag{9.27}$$

现在可以要求 (9.27) 和 (9.27) 对应的项相等:

$$\mathrm{e}^{\Lambda}=A, \tag{9.28}$$

以及

$$g^{(k)}(x)=f^{(k)}(x),\quad k=2,3,\cdots,$$

然后尝试求 $\Lambda$ 以及用 $f^{(k)}$ 的系数 (即 $b^{(k)}_{i,j_1j_2\cdots j_n}$) 求 $g^{(k)}$ 的系数 (最终是 $F^{(k)}$ 的系数). 这并不总是可能的. 容易看到, 即使是线性问题也会有困难. 例如, 取平面线性映射

$$f(x)=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

满足 (9.28) 的实矩阵 $\Lambda$ 并不存在. 事实上, 这样的矩阵必须是对角形的, 并且与 $A$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

具有相同特征向量, 因此应该有

$$e^{\lambda_1} = -1, \quad e^{\lambda_2} = 1.$$

第二个方程给出 $\lambda_2 = 0$, 第一个在实数范围内无解. 因此, 映射 $f$ 不能用流近似. 但是, 注意, 它的第二次迭代

$$f^2(x) = A^2 x, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

就允许近似. 事实上, $f^2(x) = x$ 是一个恒同映射, 就是说, 它是沿着 $\Lambda = 0$ 的平凡方程 $\dot{x} = 0$ 轨道的移位. 可以证明, 任何一个充分接近于恒同映射的映射可以用流的移位近似到任何阶.

后面将看到, 对某个固定的 $l$, 用微分方程系统近似到 $k < l$ 阶是可能的, 而到 $l$ 阶则不可能. 作为例子, 考虑平面映射

$$f(x) = R_3 x + f^{(2)}(x) + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

其中 $R_3$ 是刻画平面旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的矩阵. 这个映射的线性部分可用沿着线性系统的轨道的单位移位来表示, 而二次项 $f^{(2)}(x)$ 则不允许用流来近似 (见下面). 在此情形, $l = 2$. 但是, 注意, 三次迭代 $f^3$ 可用平面 ODEs 系统直到任何阶来近似, 因为它在原点附近接近于恒同映射.

值得指出的是, 即使映射允许用流近似到任何阶, 它也可能不是 ODEs 系统自己的单位时间移位. 这个层楼性质与近似级数的发散性以及对映射的小扰动出现同宿和异宿结构有着紧密联系. 例子在下面.

### 9.5.2　1:1 共振

考虑光滑平面映射

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{9.29}$$

假设 (9.29) 在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x = 0$, 具二重单位乘子 (1:1 共振), $\mu_{1,2} = 1$. 在 $\alpha = 0$ 将 (9.29) 写为

$$x \mapsto A_0 x + g(x), \tag{9.30}$$

其中 $A_0 = f_x(0,0)$, 以及 $g(x) = f(x,0) - A_0 x = O(\|x\|^2)$ 光滑. 假设存在两个实线性无关向量 $q_{0,1} \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$A_0 q_0 = q_0, \quad A_0 q_1 = q_1 + q_0. \tag{9.31}$$

向量 $q_0$ 是 $A_0$ 对应于特征值 1 的特征向量, $q_1$ 是 $A_0$ 对应于相同特征值的广义特征向量①. 此外, 存在转置矩阵 $A_0^{\mathrm{T}}$ 相似的伴随特征向量

$$A_0^{\mathrm{T}} p_1 = p_1, \quad A_0^{\mathrm{T}} p_0 = p_0 + p_1. \tag{9.32}$$

总可以选择满足 (9.31) 和 (9.32) 的四个向量, 使得

$$\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1,$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的标准数量积 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. 由 Fredholm 交替定理得

$$\langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_1, q_0 \rangle = 0.$$

若 $q_0$ 和 $q_1$ 已选定, 则任何向量 $x \in \mathbb{R}^2$ 可唯一表示为

$$x = y_1 q_0 + y_2 q_1,$$

其中新坐标 $(y_1, y_2)$ 由

$$\begin{cases} y_1 = \langle p_0, x \rangle, \\ y_2 = \langle p_1, x \rangle \end{cases} \tag{9.33}$$

给出. 在坐标系 $(y_1, y_2)$ 下, 映射 (9.30) 取形式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle p_0, g(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, g(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}. \tag{9.34}$$

应用相同的坐标 $(y_1, y_2)$, 对所有小 $\|\alpha\|$ 的 $\alpha$, 将原来的映射 (9.29) 写为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle p_0, f(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha) \rangle \\ \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha) \rangle \end{pmatrix}, \tag{9.35}$$

它在 $\alpha = 0$ 化为 (9.30). 如同第 8 章对 Bogdanov-Takens 分支的分析, 将 (9.35) 的右端在 $y = 0$ 展开为 $y$ 的 Taylor 级数

$$\begin{cases} y_1 \mapsto y_1 + y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha) y_1 + a_{01}(\alpha) y_2 \\ \qquad + \dfrac{1}{2} a_{20}(\alpha) y_1^2 + a_{11}(\alpha) y_1 y_2 + \dfrac{1}{2} a_{02}(\alpha) y_2^2 + R_1(y, \alpha), \\ y_2 \mapsto y_2 + b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha) y_1 + b_{01}(\alpha) y_2 \\ \qquad + \dfrac{1}{2} b_{20}(\alpha) y_1^2 + b_{11}(\alpha) y_1 y_2 + \dfrac{1}{2} b_{02}(\alpha) y_2^2 + R_2(y, \alpha), \end{cases} \tag{9.36}$$

① 注意, 这个情况比 $A_0$ 是半单更一般, 即有两个独立的特征向量 $A_0 q_0 = q_0, A_0 q_1 = q_1$.

其中 $a_{kl}(\alpha), b_{kl}(\alpha)$ 和 $R_{1,2}(y,\alpha) = O(\|y\|^3)$ 是它们变量的光滑函数. 显然,

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

函数 $a_{kl}(\alpha)$ 和 $b_{kl}(\alpha)$ 可以用 (9.29) 右端 $f(x,\alpha)$ 和向量 $q_{0,1}, p_{0,1}$ 表示. 例如,

$$\begin{aligned} a_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle p_0, f(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha)\rangle\bigg|_{y=0}, \\ b_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle p_1, f(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha)\rangle\bigg|_{y=0}, \\ b_{11}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\langle p_1, f(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha)\rangle\bigg|_{y=0}. \end{aligned}$$

下面的引理指出, 可以用光滑可逆且光滑依赖于参数的变换将 (9.36) 化为更简单的形式. 我们从一个线性代数的结果开始.

**引理 9.6** (Jordan 块的变形)　*对任何满足 $a_{10}(0) = a_{01}(\alpha) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0$ 的矩阵*

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda + a_{10}(\alpha) & 1 + a_{01}(\alpha) \\ b_{10}(\alpha) & \lambda + b_{01}(\alpha) \end{pmatrix},$$

*存在矩阵 $P(\alpha), P(0) = I$ 使得*

$$P^{-1}(\alpha)A(\alpha)P(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \varepsilon_1(\alpha) & \lambda + \varepsilon_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

*其中 $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$.*

**证明**　矩阵

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + a_{01}(\alpha) & 0 \\ -a_{10}(\alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

就可承担这项工作, 这里

$$\varepsilon_1(\alpha) = b_{01}(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{10}(\alpha) - a_{10}(\alpha)b_{01}(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha) = a_{10}(\alpha) + b_{01}(\alpha).$$

矩阵 $P(\alpha)$ 如 $L(\alpha)$ 关于 $\alpha$ 光滑. □

非奇异线性坐标变换

$$y = P(\alpha)u,$$

其中 $P$ 由上面给出, $\lambda = 1$, 对充分小 $\|\alpha\|$, 将映射 (9.36) 映为

$$\begin{cases} u_1 \mapsto u_1 + u_2 + g_{00}(\alpha) \\ \qquad + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)u_1^2 + g_{11}(\alpha)u_1u_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)u_2^2 + S_1(u,\alpha), \\ u_2 \mapsto u_2 + h_{00}(\alpha) + \varepsilon_1(\alpha)u_1 + \varepsilon_2(\alpha)u_2 \\ \qquad + \frac{1}{2}h_{20}(\alpha)u_1^2 + h_{11}(\alpha)u_1u_2 + \frac{1}{2}h_{02}(\alpha)u_2^2 + S_2(u,\alpha), \end{cases} \tag{9.37}$$

这里 $S_{1,2}(u,\alpha) = O(\|u\|^3)$ 以及所有引入的函数都是光滑的. 也有 $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$ 且

$$\begin{pmatrix} g_{00}(\alpha) \\ h_{00}(\alpha) \end{pmatrix} = B^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} a_{00}(\alpha) \\ b_{00}(\alpha) \end{pmatrix},$$

因此 $g_{00}(0) = h_{00}(0) = 0$ 以及对 $k+l=2, g_{kl}(0) = a_{kl}(0), h_{kl}(0) = b_{kl}(0)$.

**引理 9.7** (1:1 共振规范形映射) 假设

$$b_{20}(0) \neq 0.$$

则存在光滑依赖于参数的光滑可逆的坐标变换, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 将 (9.37) 化为映射

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 + \nu_1(\alpha) + \nu_2(\alpha)\xi_2 + A(\alpha)\xi_1^2 + B(\alpha)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3), \tag{9.38}$$

其中光滑函数 $\nu_{1,2}(\alpha)$ 以及 $A(\alpha), B(\alpha)$ 满足

$$\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$$

和

$$A(0) = \frac{1}{2}b_{20}, \quad B(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0). \tag{9.39}$$

**证明** 首先, 考虑情形 $\alpha = 0$, (9.37) 这时化为

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 \mapsto u_1 + u_2 + \frac{1}{2}a_{20}u_1^2 + a_{11}u_1u_2 + \frac{1}{2}a_{02}u_2^2 + O(\|u\|^3), \\ \tilde{u}_2 \mapsto u_2 + \frac{1}{2}b_{20}u_1^2 + b_{11}u_1u_2 + \frac{1}{2}b_{02}u_2^2 + O(\|u\|^3), \end{cases} \tag{9.40}$$

这里所有的 $a_{ij}$ 和 $b_{ij}$ 都应该在 $\alpha = 0$ 计算. 引入多项式变换

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}G_{20}\xi_1^2 + G_{11}\xi_1\xi_2, \\ u_2 = \xi_2 + \frac{1}{2}H_{20}\xi_1^2 + H_{11}\xi_1\xi_2, \end{cases} \tag{9.41}$$

其中 $G_{20}, G_{11}, H_{20}$ 和 $H_{11}$ 都是未知系数. 选择这些系数使得 (9.40) 在 $\xi$ 坐标系下取形式

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = \xi_1 + \xi_2 + O(\|\xi\|^3), \\ \tilde{\xi}_2 = \xi_2 + A(0)\xi_1^2 + B(0)\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3). \end{cases} \tag{9.42}$$

将 (9.41) 代入 (9.40), 用 $\xi$ 的分量表示 $\tilde{u}$ 的分量, 同时, 将 (9.42) 代入与 (9.41) 等价的

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = \tilde{\xi}_1 + \dfrac{1}{2}G_{20}\tilde{\xi}_1^2 + G_{11}\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2, \\ \tilde{u}_2 = \tilde{\xi}_2 + \dfrac{1}{2}H_{20}\tilde{\xi}_1^2 + H_{11}\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2, \end{cases} \tag{9.43}$$

得到 $\tilde{u}$ 分量的另外表达式. 比较 $\tilde{u}_1$ 表达式中 $\xi_1^2, \xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2^2$ 项的系数以及 $\tilde{u}_2$ 中 $\xi_2^2$ 项的系数, 得到变换 (9.41) 系数的线性系统

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{20} \\ G_{11} \\ H_{20} \\ H_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ b_{02} \end{pmatrix}.$$

这个系统是非奇异的且有唯一解

$$G_{20} = \frac{1}{2}a_{20} + a_{11} + \frac{1}{2}b_{02}, \tag{9.44}$$

$$G_{11} = -\frac{1}{4}a_{20} - \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{02} - \frac{1}{4}b_{02}, \tag{9.45}$$

$$H_{20} = -a_{20}, \tag{9.46}$$

$$H_{11} = \frac{1}{2}a_{20} + \frac{1}{2}b_{02}. \tag{9.47}$$

考虑到 (9.46), 比较 $\tilde{u}_2$ 中剩下的两个二次项, 就得到关于 $A(0)$ 和 $B(0)$ 的表达式 (9.39). 注意我们还没有用到假设 $b_{20} \neq 0$.

为了证明引理对充分小 $\|\alpha\|$ 的所有 $\alpha$ 成立, 考虑依赖于参数的多项式变换

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \varepsilon_0(\alpha) + \dfrac{1}{2}G_{20}(\alpha)\xi_1^2 + G_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2, \\ u_2 = \xi_2 + \delta_0(\alpha) + \delta_1(\alpha)\xi_1 + \delta_2(\alpha)\xi_2 + \dfrac{1}{2}H_{20}(\alpha)\xi_1^2 + H_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2, \end{cases} \tag{9.48}$$

当 $\alpha = 0$ 时它就化为 (9.41). 要求 (9.37) 在 $\xi$ 坐标系下有 (9.38) 的形式, 得代数方程组

$$R_\alpha(\varepsilon_0, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \nu_1, \nu_2, G_{20}, G_{11}, H_{20}, H_{11}, A, B) = 0,$$

其中 $R_\alpha : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{12}$ 是由对应的 Taylor 系数相等而得到. 这个系统在 $\alpha = 0$ 的 Jacobi 矩阵 $J$, 当

$$\varepsilon_0 = \delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$$

且其他变量的值由 (9.44)~(9.47) 以及 (9.39) 给出时, 由假设, 有 $\det(J) = 8b_{20}(0) \neq 0$. 因此, 隐函数定理保证变换 (9.48) 和映射 (9.38) 的系数作为 $\alpha$ 的函数的局部存在和光滑. □

为了用 $(\nu_1, \nu_2)$ 作为新参数, 假设下面的横截性条件满足

(R1.0) $\det\left(\dfrac{\partial \nu}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \neq 0.$

于是, 反函数定理允许我们对小的 $\|\nu\|$ 视 $\alpha$ 为 $\nu$ 的光滑函数, 使得 $\alpha(0) = 0$. 当 $b_{20}(0) \neq 0$ 时, 条件 (R.1.0) 等价于映射

$$T : \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} G(u,\alpha) - u \\ \operatorname{tr} G_u(u,\alpha) - 2 \\ \det G_u(u,\alpha) - 1 \end{pmatrix}$$

在点 $(u,\alpha) = (0,0)$ 的正则性, 这里 $G$ 是由 (9.37) 定义的映射. 事实上, 可以直接计算, 证明在 $(u,\alpha) = (0,0)$ 有

$$\det\left(\frac{\partial \nu}{\partial \alpha}\right) = -\frac{1}{b_{20}(0)} \det\left(\frac{\partial T}{\partial(u,\alpha)}\right).$$

此外, 由于 (9.37) 以及原来映射 (9.29) 与非异线性变换有关, 可以验证映射

$$\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,\alpha) - x \\ \operatorname{tr} f_x(x,\alpha) - 2 \\ \det f_x(x,\alpha) - 1 \end{pmatrix}$$

在 $(x,\alpha) = (0,0)$ 的正则性.

用 $(\nu_1, \nu_2)$ 作为新参数, 可以将 (9.38) 写为形式

$$N_\nu : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 + \nu_1 + \nu_2\xi_2 + A_1(\nu)\xi_1^2 + B_1(\nu)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3), \qquad (9.49)$$

其中 $A_1(\nu) = A(\alpha(\nu))$ 和 $B_1(\nu) = B(\alpha(\nu))$ 是 $\nu$ 的光滑函数. 下面的任务是用流近似规范形 (9.49).

记 $a_0 = A_1(0) = A(0), b_0 = B_1(0) = B(0)$.

**引理 9.8**　对所有充分小 $\|\nu\|$, 映射 (9.49) 可以表示为形式

$$N_\nu(\xi) = \varphi_\nu^1(\xi) + O(\|\nu\|^2) + O(\|\xi\|^2\|\nu\|) + O(\|\xi\|^3),$$

这里 $\varphi_\nu^t$ 是光滑平面系统

$$\dot{\xi} = F(\xi,\nu), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \nu \in \mathbb{R}^2 \tag{9.50}$$

的流, 其中 $F(\xi,\nu) = F_0(\nu) + F_1(\xi,\nu) + F_2(\xi)$, 这里

$$F_0(\nu) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\nu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix},$$

$$F_1(\xi,\nu) = \begin{pmatrix} \xi_2 + \left(-\dfrac{1}{2}a_0 + \dfrac{1}{3}b_0\right)\nu_1\xi_1 + \left[\left(\dfrac{1}{5}a_0 - \dfrac{5}{12}b_0\right)\nu_1 - \dfrac{1}{2}\nu_2\right]\xi_2 \\ \left(\dfrac{2}{3}a_0 - \dfrac{1}{2}b_0\right)\nu_1\xi_1 + \left[\left(-\dfrac{1}{6}a_0 + \dfrac{1}{2}b_0\right)\nu_1 + \nu_2\right]\xi_2 \end{pmatrix}$$

和

$$F_2(\xi) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}a_0\xi_1^2 + \left(\dfrac{2}{3}a_0 - \dfrac{1}{2}b_0\right)\xi_1\xi_2 + \left(-\dfrac{1}{6}a_0 + \dfrac{1}{3}b_0\right)\xi_2^2 \\ a_0\xi_1^2 + (-a_0 + b_0)\xi_1\xi_2 + \left(\dfrac{1}{6}a_0 - \dfrac{1}{2}b_0\right)\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

**证明**　对 $\nu = 0$, 利用对 (9.50) 中 $F(\xi,0) = F_1(\xi,0) + F_2(\xi)$ 的明确构造来完成证明.

显然, 在 $\nu = 0$, (9.49) 的线性部分

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

是沿着线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

的轨道的单位时间移位, 这个系统是 Bodgdanov-Takens 临界规范形的线性部分, 因此, 引入

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设在 $\nu = 0$ 系统 (9.50) 可以写为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \dfrac{1}{2}A_{20}\xi_1^2 + A_{11}\xi_1\xi_2 + \dfrac{1}{2}A_{02}\xi_2^2, \\ \dot{\xi}_2 = \dfrac{1}{2}B_{20}\xi_1^2 + B_{11}\xi_1\xi_2 + \dfrac{1}{2}B_{02}\xi_2^2, \end{cases} \tag{9.51}$$

其中 $A_{kl}$ 和 $B_{kl}$, $k+l=2$ 是待定未知系数. 执行如 9.5.1 节的 Picard 两次迭代. 得

$$\xi^{(1)}(\tau)=\mathrm{e}^{A_0\tau}\xi=\begin{pmatrix}\xi_1+\tau\xi_2\\ \xi_2\end{pmatrix},$$

应用 (9.26) 得

$$\xi^{(2)}(1)=\begin{pmatrix}\xi_1+\xi_2+\frac{1}{2}a_{20}\xi_1^2+a_{11}\xi_1\xi_2+\frac{1}{2}a_{02}\xi_2^2\\ \xi_2+\frac{1}{2}b_{20}\xi_1^2+b_{11}\xi_1\xi_2+\frac{1}{2}\xi_{02}\xi_2^2\end{pmatrix},$$

其中

$$a_{20}=A_{20}+\frac{1}{2}B_{20},\quad a_{11}=A_{11}+\frac{1}{2}A_{20}+\frac{1}{6}B_{20}+\frac{1}{2}B_{11},$$

$$a_{02}=A_{02}+\frac{1}{3}A_{20}+A_{11}+\frac{1}{12}B_{20}+\frac{1}{3}B_{11}+\frac{1}{2}B_{02},$$

$$b_{20}=B_{20},\quad b_{11}=B_{11}+\frac{1}{2}B_{20},\quad b_{02}=B_{02}+\frac{1}{3}B_{20}+B_{11}.$$

这些等式应该解释为 (9.49) 的二次 Taylor 系数, 故

$$a_{20}=a_{11}=a_{02}=b_{02}=0,\quad b_{20}=2a_0,\quad b_{11}=b_0.$$

求解 $A_{20},A_{11},A_{02},B_{20},B_{11}$ 和 $B_{02}$ 的方程组, 得到

$$A_{20}=a_{20}-\frac{1}{2}b_{20}=-a_0,$$

$$A_{11}=a_{11}-\frac{1}{2}a_{20}+\frac{1}{3}b_{20}-\frac{1}{2}b_{11}=\frac{2}{3}a_0-\frac{1}{2}b_0,$$

$$A_{02}=a_{02}+\frac{1}{6}a_{20}-a_{11}-\frac{1}{6}b_{20}+\frac{2}{3}b_{11}-\frac{1}{2}b_{02}=-\frac{1}{3}a_0+\frac{2}{3}b_0,$$

$$B_{20}=b_{20}=2a_0,$$

$$B_{11}=b_{11}-\frac{1}{2}b_{20}=-a_0+b_0,$$

$$B_{02}=b_{02}+\frac{1}{6}b_{20}-b_{11}=\frac{1}{3}a_0-b_0.$$

这些公式明显地给定了系统 (9.51) 的二次部分, 它的时间 1 流近似 (直到包括二阶) 在 $\nu=0$ 的映射 (9.49).

对 $\nu\neq 0$, 小 $\|\nu\|$, 构造 $\varphi_\nu^t$ 作为流

$$X \mapsto \varphi^t(X) = \begin{pmatrix} \varphi_\nu^t(\xi) \\ \nu \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi \\ \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

的前面两个分量, 而它是由把参数视为常数变量的四维系统

$$\dot{X} = Y(X) \tag{9.52}$$

所产生, 这里 $Y(X) = JX + Y_2(X) + Y_3(X) + \cdots$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_k(X) = \begin{pmatrix} Z_k(X) \\ 0 \end{pmatrix},$$

每一个 $Z_k$ 是一个从 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 $k$ 次齐次多项式函数, 其系数是未知的. 这里的诀窍是需要保证 $X = 0$ 是 (9.52) 的平衡点, 由此可以在不动点 $X = 0$ 附近用 (9.52) 的流, 即

$$M(X) = \varphi^1(X) + O(\|X\|^3)$$

来近似映射

$$X \mapsto M(X) = \begin{pmatrix} N_\nu(\xi) \\ \nu \end{pmatrix}.$$

为了求向量场 $Y$ 的明显表达式, (9.52) 的两个 Picard 迭代就足够了. 令 $X^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{Jt}X$ 作为开始迭代, 于是, $M(X)$ 的线性部分与 $X^{(1)}(1) = \mathrm{e}^{J}X$ 重合 (验证).

由于知道 Picard 第二次迭代的结果 $X^{(2)}(t)$ 应该看出是什么形式, 直接令 $Y_2$ 的某些系数为零:

$$Y_2(X) = \begin{pmatrix} A_{1010}\xi_1\nu_1 + A_{0110}\xi_2\nu_1 + A_{1001}\xi_1\nu_2 + A_{0101}\xi_2\nu_2 \\ B_{1010}\xi_1\nu_1 + B_{0110}\xi_2\nu_1 + B_{1001}\xi_1\nu_2 + B_{0101}\xi_2\nu_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_{2000}\xi_1^2 + A_{1100}\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}A_{0200}\xi_2^2 \\ \frac{1}{2}B_{2000}\xi_1^2 + B_{1100}\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}B_{0200}\xi_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

则可利用计算

$$X^{(2)}(1) = \mathrm{e}^J X + \int_0^t \mathrm{e}^{J(1-\tau)} Y_2(X^{(1)}(\tau))\mathrm{d}\tau$$

以及与 $M(X)$ 进行比较来完成引理的证明. 注意, $A_{2000} = A_{20}, A_{1100} = A_{11}$ 和 $A_{0200} = A_{02}$ 以及 $B_{2000} = B_{20}, B_{1100} = B_{11}$ 和 $B_{0200} = B_{02}$, 其中 $A_{jk}$ 和 $B_{jk}$ 为上面所给. □

近似映射 $\varphi_\nu^1$ 的性态由 Bogdanov-Takens 理论所刻画 (见第 8 章). 任何一个一般系统 (9.50) 局部拓扑等价于下面规范形之一 (见第 8 章):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2, \end{cases} \tag{9.53}$$

其中 $s = \pm 1$. 定理 8.4 中的一般性条件包括关于参数的非退化条件 (BT.0)~(BT.2) 和横截性条件 (BT.3).

对系统 (9.50) 的条件 (BT.3) 容易验证. 事实上, 映射

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \nu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F(\xi,\nu) \\ \operatorname{tr} F_\xi(\xi,\nu) \\ \det(\xi,\nu) \end{pmatrix}$$

在 $\xi = \nu = 0$ 的 Jacobi 矩阵的行列式等于 $2a_0$. 因此, 应该假定 $2a_0 = B_{20} \neq 0$. 事实上, 由于最终要将所有结果应用到依赖于参数 $\alpha$ 的原来映射, 因此必须假设横截性条件 (R1.0) 也成立.

非退化条件 (BT.0) 自动成立, 在 $\nu = 0$ 对 (9.50) (或者等价地对系统 (9.51)) 的条件 (BT.1) 和 (BT.2) 可写为

$$A_{20} + B_{11} \neq 0, \quad B_{20} \neq 0.$$

在这些条件下,

$$s = \operatorname{sign}[B_{20}(A_{20} + B_{11})].$$

应用上面推导的公式, 可以将包含在非退化条件内的量表示为

$$A_{20} + B_{11} = B(0) - 2A(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0) - b_{20}(0), \quad B_{20} = 2A(0) = b_{20}(0).$$

因此, 下面的非退化条件应该加在映射 (9.36) 在 1:1 共振的 Taylor 系数中:

(R1.1) $a_{20}(0) + b_{11}(0) - b_{20}(0) \neq 0$;

(R1.2) $b_{20}(0) \neq 0$.

注意, 第二个条件与引理 9.7 的假设重合且同时保证 Bogdanov-Takens 分支的横截性. 因此, $s$ 的表达式化为

$$s = \mathrm{sign}[b_{20}(a_{20} + b_{11} - b_{20})](0) = \pm 1.$$

系统 (9.53) 对应 $s = -1$ 的分支图如图 8.8 所示. 从而, 如果注意到 $(\xi, \nu)$ 和 $(\eta, \beta)$ 之间的对应关系, 那个分支图就刻画了近似映射 $\varphi_\nu^1$ 的分支. 平衡点对应于不动点, 极限环应解释为闭不变曲线. 绕着 $\beta$ 平面的原点顺时针方向移动, 就会遇到映射 $\varphi_\nu^1$ 下面的分支. 当从区域 1 到区域 2 穿过曲线 $T_-$ 时出现一对不动点, 一个是鞍点, 一个是稳定点. 沿着曲线 $H$, 稳定不动点变成不稳定, 产生稳定闭不变曲线, 它对应于 Neimark-Sacker 分支. 闭曲线在区域 3 还存在并在 $P$ 由于同宿分支而破坏. 最后, 鞍点和不稳定点在 $T_+$ 由于折分支重合而消失. 注意所有这些都发生在近似映射上.

关于一般映射 (9.29) 的分支我们能说些什么? 分支图的某些特性即有关的**局部分支**会保留. 更确切地说, 存在对应于曲线 $T$ 和 $H$ 的分支曲线 $\tilde{T}$ 和 $\tilde{H}$, 在它们上面映射分别有折分支和 Neimark-Sacker 分支. 这些曲线在余维 2 点相切. 当参数值接近 $\tilde{H}$ 时从稳定不动点分支出闭不变曲线.

但是, 即使对原映射存在闭不变曲线, 在它上面的轨道结构一般也是不同于 $\varphi_\nu^1$ 的. 当参数在区域 3 内变化时, 对近似映射, 这条不变曲线上的所有轨道或是周期的, 或是稠密的, 而对原映射则出现锁相现象, 产生并破坏稳定和不稳定长周期轨道. 事实上, 无穷多个狭窄锁相 Arnold 舌的根在 Neimark-Sacker 曲线 $\tilde{H}$ 上. 这些舌由对应于稳定轨道和鞍点周期轨道之间的重合的折分支曲线所界定. 原映射的某些其他分支在近似流中并不出现. 这些分支对近似映射在同宿曲线 $P$ 附近发生. 对 $\varphi_\nu^1$ 在 $P$ 出现的鞍点稳定流形和不稳定流形的一致一般由它们的横截相交所代替, 这产生**同宿结构**, 而导致无穷多个鞍点环 (见第 2 章) 的存在性. 横截同宿结构存在于由对应**同宿切触** (见图 9.7) 的在 $P$ 两边的两条光滑分支曲线 $\tilde{P}_1$ 和 $\tilde{P}_2$ 所界定的指数形狭窄参数区域内. 折曲线界定的锁相舌聚集在 $\tilde{P}_{1,2}$ 上 (见图 9.8, 那里仅示意地画了一个). 完全的图像包括其他分支 (即翻转分支) 看来还不知道 (见附录中的文献).

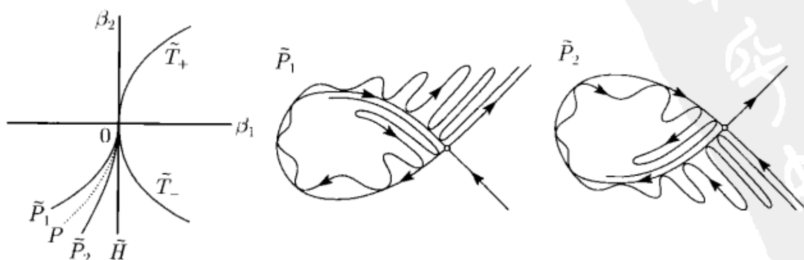



图 9.7　沿着曲线 $\tilde{P}_1$ 和 $\tilde{P}_2$ 的同宿切触

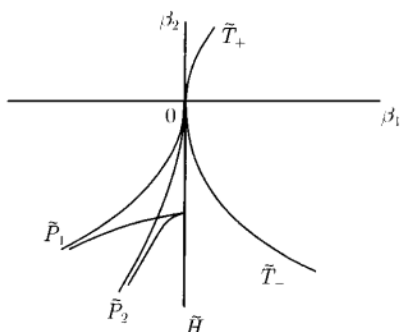



图 9.8　一条 Arnold 舌的根在共振 Neimark-Sacker 分支点上

### 9.5.3　1:2 共振

在这种情形, 有光滑平面映射

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

它在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x = 0$, 具乘子 $\mu_{1,2} = -1$ (1:2 共振). 由于 $\mu = 1$ 不是它的 Jacobi 矩阵的特征值, 可以假设对所有充分小 $\|\alpha\|$, $x = 0$ 是不动点, 且映射可写为

$$x \mapsto A(\alpha) + F(x, \alpha), \tag{9.54}$$

其中 $A(\alpha), F(x, \alpha) + O(\|x\|^2)$ 光滑. 设 $A_0 = A(0)$, 假设存在两个实线性无关向量 $q_{0,1} \in \mathbb{R}^2$:

$$A_0 q_0 = -q_0, \quad A_0 q_1 = -q_1 + q_0, \tag{9.55}$$

$q_0$ 是 $A_0$ 对应于特征值 $-1$ 的特征向量, $q_1$ 是 $A_0$ 对应于同一个特征值的广义特征向量. 此外, 存在转置矩阵 $A_0^{\mathrm{T}}$ 的相似的伴随特征向量 $p_{0,1} \in \mathbb{R}^2$:

$$A_0^{\mathrm{T}} p_1 = -p_1, \quad A_0^{\mathrm{T}} p_0 = -p_0 + p_1. \tag{9.56}$$

总可以选取满足 (9.55) 和 (9.56) 的四个向量使得

$$\langle q_0, p_0 \rangle = \langle q_1, p_1 \rangle = 1,$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的标准数量积 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. 由 Fredholm 交替定理得

$$\langle q_1, p_0 \rangle = \langle q_0, p_1 \rangle = 0.$$

若 $v_0$ 和 $v_1$ 已选定, 则任何一个向量 $x \in \mathbb{R}^2$ 可唯一表示为

$$x = y_1 q_0 + y_2 q_1,$$

其中, 新坐标 $(y_1, y_2)$ 可用

$$\begin{cases} y_1 = \langle p_0, x\rangle, \\ y_2 = \langle p_1, x\rangle \end{cases} \tag{9.57}$$

计算.

在坐标系 $(y_1, y_2)$ 下, 映射 (9.54) 取形式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 + a_{10}(\alpha) & 1 + a_{01}(\alpha) \\ b_{10}(\alpha) & -1 + b_{01}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(y,\alpha) \\ h(y,\alpha) \end{pmatrix}, \tag{9.58}$$

其中

$$g(y,\alpha) = \langle p_0, F(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha)\rangle, \quad h(y,\alpha) = \langle p_1, F(y_1 q_0 + y_2 q_1, \alpha)\rangle,$$

和

$$\begin{aligned} a_{10}(\alpha) &= \langle p_0, [A(\alpha) - A_0] q_0\rangle, \quad a_{01}(\alpha) = \langle p_0, [A(\alpha) - A_0] q_1\rangle, \\ b_{10}(\alpha) &= \langle p_1, [A(\alpha) - A_0] q_0\rangle, \quad b_{01}(\alpha) = \langle p_1, [A(\alpha) - A_0] q_1\rangle. \end{aligned}$$

显然

$$a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

非奇异线性坐标变换

$$y = P(\alpha) u,$$

$P$ 是引理 9.6 中所给, 其中 $\lambda = -1$, 对充分小 $\|\alpha\|$, 将映射 (9.58) 变成

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \nu_1(\alpha) & -1 + \nu_1(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + P^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} g(P(\alpha)u,\alpha) \\ h(P(\alpha)u,\alpha) \end{pmatrix}, \tag{9.59}$$

其中

$$\nu_1(\alpha) = b_{01}(\alpha) + a_{01}(\alpha) b_{10}(\alpha) - a_{10}(\alpha) b_{01}(\alpha), \quad \nu_2(\alpha) = a_{01}(\alpha) + b_{01}(\alpha).$$

假设

(R2.0) $\det \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0} \neq 0.$

在这个横截性假设下, 可以用 $\nu$ 去参数化 $\alpha = 0$ 的邻域:

$$\begin{cases} \beta_1 = \nu_1(\alpha), \\ \beta_2 = \nu_2(\alpha). \end{cases}$$

还可将 $\alpha$ 表示为 $\beta$ 的函数, 并将映射 (9.59) 写为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G(u,\beta) \\ H(u,\beta) \end{pmatrix}, \tag{9.60}$$

其中 $G, H = O(\|u\|^2)$. 注意, $G(u,0) = g(u,0), H(u,0) = h(u,0)$.

有了这些线性变换的准备, 现在可以作非线性坐标变换将映射 (9.60) 简化.

**引理 9.9** (1:2 共振规范形映射) *存在光滑依赖于参数的光滑可逆的坐标变换, 将 (9.60) 映为*

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C(\beta)\xi_1^3 + D(\beta)\xi_1^2\xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4), \tag{9.61}$$

*$C(\beta)$ 和 $D(\beta)$ 为光滑函数.*

**证明** 将 $G$ 和 $H$ 展开为 $u$ 的 Taylor 级数

$$G(u,\beta) = \sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} g_{jk}(\beta)u_1^j u_2^k + O(\|u\|^4),$$

$$H(u,\beta) = \sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} h_{jk}(\beta)u_1^j u_2^k + O(\|u\|^4).$$

尝试寻找满足

$$\varphi_{03}(\beta) = \psi_{03}(\beta) = 0$$

的变换

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \displaystyle\sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} \varphi_{jk}(\beta)\xi_1^j\xi_2^k, \\ u_2 = \xi_2 + \displaystyle\sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} \psi_{jk}(\beta)\xi_1^j\xi_2^k, \end{cases}$$

以消去所有二次项和除了出现在 (9.61) 中的三次项以外的三次项.

首先, 固定 $\alpha = 0$, 并求对应的 $\varphi_{jk}(0), \psi_{jk}(0)$. 这对计算 $C(0)$ 和 $D(0)$ 是足够的. 为了简化记号, 去掉 $\varphi_{jk}$ 和 $\psi_{jk}$ 的变量. 在坐标系 $(\xi_1, \xi_2)$ 下, 对 $\beta = 0$ 映射 (9.60) 有形式

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = -\xi_1 + \xi_2 + \displaystyle\sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} \gamma_{jk}\xi_1^j\xi_2^k + O(\|\xi\|^4), \\ \tilde{\xi}_2 = \xi_2 + \displaystyle\sum_{2\leqslant j+k\leqslant 3} \sigma_{jk}\xi_1^j\xi_2^k + O(\|\xi\|^4), \end{cases}$$

其中 $\gamma_{jk}$ 和 $\sigma_{jk}$ 是 $g_{jk}, h_{jk}$ 以及 $\varphi_{jk}, \psi_{jk}$ 的函数.

适当选取 $\varphi_{jk}, \psi_{jk}$ 满足 $j+k=2$, 可以消去映射 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ 中的所有二次项. 事实上, 所有这些项为零意味着

$$\gamma_{20} = \gamma_{11} = \gamma_{02} = \sigma_{20} = \sigma_{11} = \sigma_{02} = 0,$$

这等价于求解线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{20} \\ \varphi_{11} \\ \varphi_{02} \\ \psi_{20} \\ \psi_{11} \\ \psi_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{20} \\ g_{11} \\ g_{02} \\ h_{20} \\ h_{11} \\ h_{02} \end{pmatrix}.$$

这个方程组有唯一解, 因为它的行列式显然不等于零. 于是, 可以利用它的解

$$\varphi_{20} = \frac{1}{2} g_{20} + \frac{1}{4} h_{20}, \tag{9.62}$$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{2} g_{20} + \frac{1}{2} g_{11} + \frac{1}{2} h_{20} + \frac{1}{4} h_{11}, \tag{9.63}$$

$$\varphi_{02} = \frac{1}{4} g_{11} + \frac{1}{2} g_{02} + \frac{1}{8} h_{20} + \frac{1}{4} h_{11} + \frac{1}{4} h_{02}, \tag{9.64}$$

$$\psi_{02} = \frac{1}{2} h_{20}, \tag{9.65}$$

$$\psi_{11} = \frac{1}{2} h_{20} + \frac{1}{2} h_{11}, \tag{9.66}$$

$$\psi_{02} = \frac{1}{4} h_{11} + \frac{1}{2} h_{02}, \tag{9.67}$$

以消去在 $\beta = 0$ 时所有 $\xi$ 的二次项.

下一步就 “去掉” 三次项. 事实上, 可以去掉除了 (9.61) 中的项以外的所有三次项, 即零条件

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{03} = \gamma_{30} = \sigma_{12} = \sigma_{03} = 0$$

导致对 $\varphi_{jk}, \psi_{jk}$ 的如下形式的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{30} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{12} \\ \psi_{30} \\ \psi_{21} \\ \psi_{12} \end{pmatrix} = R[g, h],$$

其中 $R[g,h]$ 是 $g_{jk},h_{jk},j+k=2,3$ 的某个向量值函数. 这个方程组也可解, 因此给出了变换的三次系数. 这个方程组的明显解 (用 (9.62)~(9.67)) 导致 (9.61) 中系数下面的明显公式:

$$C(0)=h_{30}(0)+g_{20}(0)h_{20}(0)+\frac{1}{2}h_{20}^2(0)+\frac{1}{2}h_{20}(0)h_{11}(0) \tag{9.68}$$

以及

$$\begin{aligned}D(0)=&h_{21}(0)+3g_{30}(0)+\frac{1}{2}g_{20}(0)h_{11}(0)+\frac{5}{4}h_{20}(0)h_{11}(0)+h_{20}(0)h_{02}(0)+3g_{20}^2(0)\\&+\frac{5}{2}g_{20}(0)h_{20}(0)+\frac{5}{2}g_{11}(0)h_{20}(0)+h_{20}^2(0)+\frac{1}{2}h_{11}^2(0).\end{aligned} \tag{9.69}$$

对小的 $\|\beta\|\neq 0$ 不会造成什么困难, 因为上面的线性系统被附近的线性系统代替. 由于原来系统在 $\beta=0$ 正则, 这个新系统也唯一可解. 详细的证明留给读者. □

**注**　仅用 (9.62)~(9.67) 给出的系数的二次变换去计算 $D(0)$ 是不充分的, 因为这些量还依赖于 $\psi_{30}(0)$. ◇

用 $\xi\mapsto\Gamma_\beta(\xi)$ 记规范形映射 (9.61). 下面的任务是用流近似这个映射. 很显然这是不可能的. 因为在 $\beta=0$, 它的线性部分

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$$

有负特征值. 但是, 二次迭代

$$\xi\mapsto\Gamma_\beta^2(\xi)$$

可用流的单位时间移位来近似. 映射 $\Gamma_\beta^2$ 有形式

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1+\beta_1&-2+\beta_2\\-2\beta_1+\beta_1\beta_2&1+\beta_1-2\beta_2+\beta_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V(\xi,\beta)\\W(\xi,\beta)\end{pmatrix}, \tag{9.70}$$

其中

$$V(\xi,\beta)=C(\beta)\xi_1^3+D(\beta)\xi_1^2\xi_2$$

以及

$$\begin{aligned}W(\xi,\beta)=&(-2C(\beta)+\beta_1D(\beta)+\beta_2C(\beta))\xi_1^3\\&+(3C(\beta)-2D(\beta)-2\beta_1D(\beta)+\beta_2D(\beta))\xi_1^2\xi_2\\&+(-3C(\beta)+2D(\beta)+\beta_1D(\beta)-2\beta_2D(\beta))\xi_1\xi_2^2\\&+(C(\beta)-D(\beta)+\beta_2D(\beta))\xi_2^3+O(\|\xi\|^4).\end{aligned}$$

**引理 9.10**　对所有充分小 $\|\beta\|$, 映射 (9.70) 可以表示为形式

$$\Gamma_\beta^2(\xi) = \varphi_\beta^1(\xi) + O(\|\xi\|^4),$$

其中 $\varphi_\beta^t$ 是平面系统

$$\dot{\xi} = \Lambda_\beta \xi + U(\xi, \beta) \tag{9.71}$$

的流, 其中

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -2 - \dfrac{2}{3}\beta_1 - \beta_2 \\ -2\beta_1 & -\beta_1 - 2\beta_2 \end{pmatrix} + O(\|\beta\|^2),$$

以及 $U(\xi, \beta)$ 是 $\xi$ 的三次齐次多项式向量.

**证明**　从 $\beta = 0$ 开始. (9.70) 在 $\beta = 0$ 的线性部分

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

是沿着平面线性系统

$$\dot{\xi} = \Lambda_0 \xi$$

的轨道单位时间的移位, 其中

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设三次近似系统 $\dot{\xi} = \Lambda_0 \xi + U(\xi, 0)$ 有表达式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -2\xi_2 + A_{30}\xi_1^3 + A_{21}\xi_1^2\xi_2 + A_{12}\xi_1\xi_2^2 + A_{03}\xi_2^3, \\ \dot{\xi}_2 = B_{30}\xi_1^3 + B_{21}\xi_1^2\xi_2 + B_{12}\xi_1\xi_2^2 + B_{03}\xi_2^3. \end{cases} \tag{9.72}$$

对 (9.72) 执行 Picard 三次迭代 (9.26). 由于系统 (9.72) 没有二次项, 故有

$$\xi^{(1)}(\tau) = \xi^{(2)}(\tau) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 \tau}\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 - 2\tau\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

第三次迭代得

$$\xi^{(3)}(1) = \begin{pmatrix} \xi_1 - 2\xi_2 + a_{30}\xi_1^3 + a_{21}\xi_1^2\xi_2 + a_{12}\xi_1\xi_2^2 + a_{03}\xi_2^2 \\ \xi_2 + b_{30}\xi_1^3 + b_{21}\xi_1^2\xi_2 + b_{12}\xi_1\xi_2^2 + b_{03}\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{jk}, b_{jk}$ 由 $A_{jk}, B_{jk}$ 表达, 其表达式如下:

$$a_{30} = A_{30} - B_{30},$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -3A_{30} + A_{21} + 2B_{30} - B_{21}, \\
a_{12} &= 4A_{30} - 2A_{21} + A_{12} - 2B_{30} + \frac{4}{3}B_{21} - B_{12}, \\
a_{03} &= -2A_{30} + \frac{4}{3}A_{21} - A_{12} + A_{03} + \frac{4}{5}B_{30} - \frac{2}{3}B_{21} + \frac{2}{3}B_{12} - B_{03}, \\
b_{30} &= B_{30}, \\
b_{21} &= -3B_{30} + B_{21}, \\
b_{12} &= 4B_{30} - 2B_{21} + B_{12}, \\
b_{03} &= -2B_{30} + \frac{4}{3}B_{21} - B_{12} + B_{03}.
\end{aligned}$$

求解上面对 $A_{jk}, B_{jk}$ 的方程并应用 (9.70), 得到

$$\begin{aligned}
A_{30} =& a_{30} + b_{30} = -C(0), \\
A_{21} =& 3a_{30} + a_{21} + 4b_{30} + b_{21} = -2C(0) - D(0), \\
A_{12} =& 2a_{30} + 2a_{21} + a_{12} + 4b_{30} + \frac{8}{3}b_{21} + b_{12} = -C(0) - \frac{4}{3}D(0), \\
A_{03} =& \frac{2}{3}a_{21} + a_{12} + a_{03} + \frac{8}{15}b_{30} + \frac{4}{3}b_{21} + \frac{4}{3}b_{12} + b_{03} \\
=& -\frac{1}{15}C(0) - \frac{1}{3}D(0), \\
B_{30} =& b_{30} = -2C(0), \\
B_{21} =& 3b_{30} + b_{21} = -3C(0) - 2D(0), \\
B_{12} =& 2b_{30} + 2b_{21} + b_{12} = -C(0) - 2D(0), \\
B_{03} =& \frac{2}{3}b_{21} + b_{12} + b_{03} = -\frac{1}{3}D(0).
\end{aligned}$$

这就证明了引理, 并给出了在 $\beta = 0$ 近似系统 (9.71) 系数的明显公式.

对小的 $\|\beta\| \neq 0$, 用表达式

$$e^{\Lambda} = I_2 + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\Lambda^k,$$

前面三项可以验证引理叙述中给的 $\Lambda = \Lambda_\beta$ 的线性部分的公式. 于是, 如果令 $\beta = 0$, Picard 迭代产生 $a_{jk}(\beta), b_{jk}(\beta)$ 的表达式与上面得到的相同. □

映射 (9.71) 可进一步简化.

**引理 9.11** 如果进行可逆的光滑依赖于参数的变量变换, 系统 (9.71) 可简化为形式

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_1\eta_1^3 + D_1\eta_1^2\eta_2 \end{pmatrix} + O(\|\eta\|^4), \tag{9.73}$$

其中光滑函数 $\gamma_{1,2} = \gamma_{1,2}(\beta)$:

$$\begin{cases} \gamma_1(\beta) = 4\beta_1 + O(\|\beta\|^2), \\ \gamma_2(\beta) = -2\beta_1 - 2\beta_2 + O(\|\beta\|^2), \end{cases}$$

以及光滑函数 $C_1 = C_1(\beta), D_1 = D_1(\beta)$, 使得

$$C_1(0) = 4C(0), \quad D_1(0) = -2D(0) - 6C(0).$$

**证明**　对 $\beta = 0$, (9.72) 所要求的变换由

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \chi_{30}\xi_1^3 + \chi_{21}\xi_1^2\xi_2 + \chi_{12}\xi_1\xi_2^2, \\ \eta_2 = -2\xi_2 + \varphi_{30}\xi_1^3 + \varphi_{21}\xi_1^2\xi_2 + \varphi_{12}\xi_1\xi_2^2 \end{cases}$$

给出, 其中

$$\chi_{30} = \frac{1}{6}A_{21} + \frac{1}{12}B_{12}, \quad \chi_{21} = \frac{1}{4}A_{12} + \frac{1}{4}B_{03}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{2}A_{03},$$

以及

$$\varphi_{30} = A_{30}, \quad \varphi_{21} = -\frac{1}{2}B_{12}, \quad \varphi_{12} = -B_{03}.$$

作这个变换并用上面对 $B_{30}, B_{21}$ 和 $A_{30}$ 的公式, 如引理的叙述用系数 $C_1(0)$ 和 $D_1(0)$ 作为结束.

$\beta \neq 0$ 的情形留给读者. 注意, 映射 $\beta \mapsto \gamma$ 在 $\beta = 0$ 正则, 因此在参数平面原点附近 $(\gamma_1, \gamma_2)$ 可作为新参数. □

结合上面两条引理可叙述成下面的定理.

**定理 9.3** (1:2 共振流规范形)　对所有充分小 $\|\beta\|$, 光滑映射

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C(\beta)\xi_1^3 + D(\beta)\xi_1^2\xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4)$$

的第二次迭代可表示为

$$\xi \mapsto \varphi_\beta^1(\xi) + O(\|\xi\|^4),$$

其中 $\varphi_\beta^t$ 是平面系统的流, 该平面系统光滑等价于

$$\begin{pmatrix} \dot\eta_1 \\ \dot\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1(\beta) & \gamma_2(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_1(\beta)\eta_1^3 + D_1(\beta)\eta_1^2\eta_2 \end{pmatrix}, \tag{9.74}$$

其中

$$\begin{cases} \gamma_1(\beta) = 4\beta_1 + O(\|\beta\|^2), \\ \gamma_2(\beta) = -2\beta_1 - 2\beta_2 + O(\|\beta\|^2), \end{cases}$$

以及

$$C_1(0) = 4C(0), \quad D_1(0) = -2D(0) - 6C(0).$$ □

现在考虑近似系统 (9.74) 的分支, 假设下面的非退化条件满足

$$C_1(0) \neq 0, \quad D_1(0) \neq 0.$$

这些条件可用规范形映射的系数表示:

(R2.1) $C(0) \neq 0$;

(R2.2) $D(0) + 3C(0) \neq 0$,

且对给定映射可用 (9.68) 和 (9.69) 有效验证. 也可假设

$$D_1(0) < 0.$$

否则, 改变时间方向并作变换 $\eta_1 \mapsto -\eta_1$. 在这些假设下, 可在 (9.74) 中用变量、参数和时间的尺度化, 由此得系统

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 = \varepsilon_1\zeta_1 + \varepsilon_2\zeta_2 + s\zeta_1^3 - \zeta_1^2\zeta_2, \end{cases} \tag{9.75}$$

其中 $s = \text{sign}C(0) = \pm 1$.

(9.75) 对 $s = 1$ 和 $s = -1$ 的分支图分别如图 9.9 和图 9.10 所示. 近似系统一个重要特性是它通过旋转 $\pi$ 角度

$$\zeta \mapsto -\zeta$$

是不变的. 应用第 7 章的术语, 我们说它是 $\mathbb{Z}_2$ 对称. 这个系统永远有平衡点

$$E_0 = (0, 0).$$

其他两个可能的平衡点位于水平轴 $\zeta_2 = 0$ 上,

$$E_{1,2} = (\mp\sqrt{-s\varepsilon_1}, 0),$$

由于叉分支沿着直线

$$F^{(1)} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = 0\}$$

从平凡平衡点同时产生分支, 非平凡平衡点对 $\varepsilon_1 < 0$, 若 $s = 1$ 以及 $\varepsilon > 0$, 若 $s = -1$ 存在.

考虑情形 $s = 1$ (图 9.9). 在区域 1 存在单个平凡平衡点 $E_0$, 它是鞍点. 穿过 $F^{(1)}$ 的下面分枝导致叉分支产生一对对称鞍点 $E_{1,2}$, 这时平凡平衡点变成稳定结点. 这个结点在区域 2 变成焦点, 然后, 在穿过半直线

$$H^{(1)} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 < 0\}$$

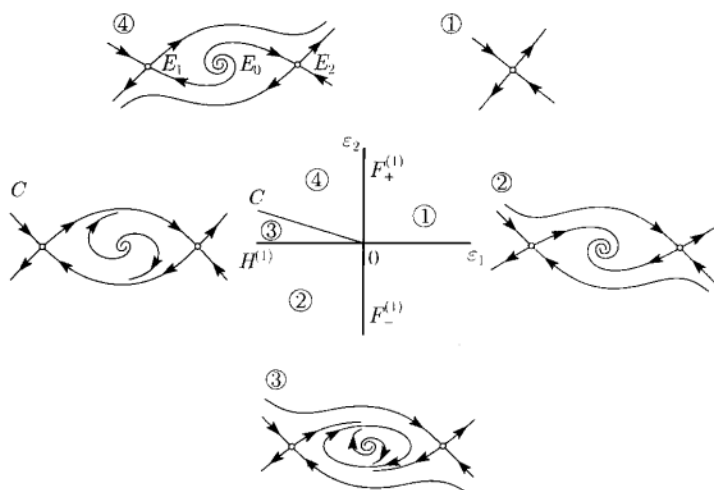



图 9.9　近似系统 (9.75) 对 $s = 1$ 的分支图

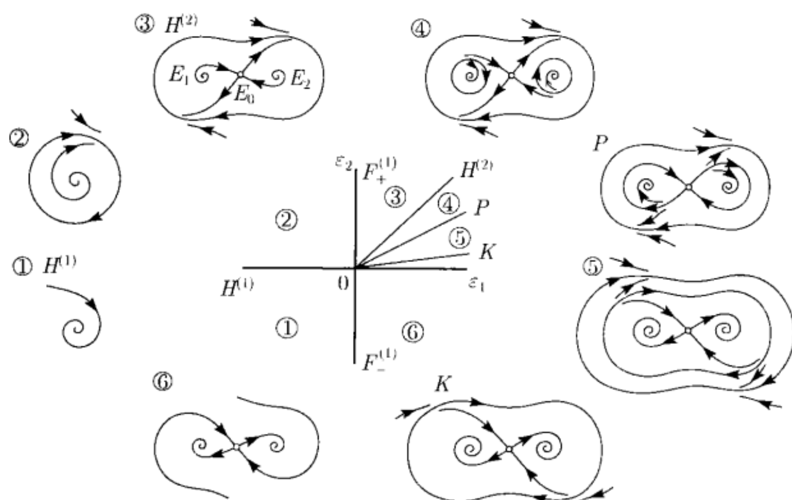



图 9.10　近似映射 (9.75) 对 $s = -1$ 的分支图

时由于非退化 Hopf 分支而失去它的稳定性. 在区域 3 有唯一稳定极限环存在①. 穿过曲线

$$C = \left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = -\frac{1}{5}\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \varepsilon_1 < 0\right\}$$

导致环通过异宿分支而消失 (见练习 5). 由于 $\mathbb{Z}_2$ 对称性, 当从上面穿过 $C$ 时连接鞍点 $E_1$ 和 $E_2$ 的异宿轨道同时出现并构成异宿环. 在区域 4 完全不稳定的平凡平衡点 $E_0$ 和鞍点 $E_{1,2}$ 同时存在. 这三个平衡点在叉分支直线 $F^{(1)}$ 的上面分支合并,

① 用第 7 章的术语, 这个环是 $S$ 环.

如同回到区域 1. 最困难的是证明在区域 3 中极限环的唯一性. 按照第 8 章附录 A 中对 Bogdanov-Takens 分支叙述的类似方法, 可以用奇异重尺度化、Hamilton 扰动的 Pontryagin 方法, 并估计椭圆积分来证明 (详细见练习 5).

$s=-1$ 情形的分支图比较复杂 (图 9.10). 在区域 1 存在单个平凡平衡点 $E_0$, 现在它是稳定点 (结点或焦点). 在上面给出的半直线 $H^{(1)}$ 上它产生非退化 Hopf 分支而分支出稳定极限环. 当从区域 2 到区域 3 穿过 $F^{(1)}$ 的上半轴时, 两个不稳定结点 (后来变成焦点) 从平凡平衡点分开. 在区域 3 三个平衡点 $E_0, E_1$ 和 $E_2$ 都位于仍存在的"大"极限环内部. 在半直线

$$H^{(2)}=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_2=\varepsilon_1,\varepsilon_1>0\}$$

上非平凡焦点 $E_{1,2}$ 同时产生 Hopf 分支. 这些分支导致出现两个围绕非平凡平衡点的"小"不稳定极限环 (对称成对). 平衡点自己都变成稳定. 因此, 在区域 4 有三个极限环: 一个"大"的和两个"小"的. 沿着曲线

$$P=\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_2=\frac{4}{5}\varepsilon_1+o(\varepsilon_1),\varepsilon_1>0\right\},$$

由于对称 8 字图像的同宿分支 (见练习 5), "小"环消失. 沿着这条曲线鞍点 $E_0$ 同时有两条同宿轨道. 这些轨道通过旋转 $\pi$ 由一个变成另一个. 8 字图像内外不稳定. 从区域 4 到区域 5 穿过曲线 $P$ 时不仅"小"环破坏, 而且额外出现一个不稳定的"大"极限环. 因此, 在区域 5 有两个"大"环: 外面的一个稳定, 里面的一个不稳定. 这两个"大"环沿着曲线

$$K=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_2=\kappa_0\varepsilon_1+o(\varepsilon_1),\varepsilon_1>0\}$$

重合并消失, 这里 $\kappa_0=0.752\cdots$. 这是环的折分支. 在折分支后这个系统没有极限环. 在区域 6 有三个平衡点, 一个平凡鞍点和两个稳定非平凡焦点/结点. 非平凡平衡点与平凡平衡点在直线 $F^{(2)}$ 的下面分枝上相重合, 如同回到了区域 1. 在结束对这一情形的分支图的叙述前, 我们指出, 这个分析的最困难部分是证明这个系统没有另外的极限环 (见文献评注和练习 5).

现在解释所得的结果, 首先借助于近似映射 $\varphi_\varepsilon^1$, 其次借助于 1:2 共振附近的原映射. 设 $\varphi_\varepsilon^1$ 是沿着规范形 (9.75) 轨道的单位移位. 对此映射平衡点变成不动点, 叉分支仍保持它的意义, Hopf 分支转换成 Neimark-Sacker 分支, 因为极限环变成相应稳定性的闭不变曲线. 现在回忆映射 $\varphi_\varepsilon^1$ 近似在 1:2 共振附近的原映射 $\Gamma_\beta$ 的第二次迭代 $\Gamma_\beta^2$. 对于映射 $\Gamma_\beta$, $\varphi_\varepsilon^1$ 的平凡不动点是在原点的不动点, 这时非平凡不动点对应于单个周期 2 轨道. 因此, 叉分支变成倍周期分支, 这是在二重乘子 $\mu_{1,2}=-1$ 附近自然期望的. 可以证明, 类似于曲线 $F^{(1)}, H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 的分支曲线在 $\Gamma_\beta$ 内对对应的 $s$ 存在.

反之, 对具有一般高阶项的原来映射, 类似于异宿曲线 $C$, 以及同宿曲线、环折曲线 $P$ 和 $K$ 的曲线是不存在的. 如同对 Chenciner 分支和 1:1 共振, 复杂的分支集在附近存在. 鞍点不变流形和闭不变曲线的"瞬间相碰"被含有同宿结构的分支无穷系列所代替 (图 9.11 (a), (b)). 这种结构导致长周期环的存在性, 它们由于穿过对应的分支集时因无穷多个折分支而出现并消失, 也存在翻转分支的无穷瀑布. 完全的分支图像并不知道.

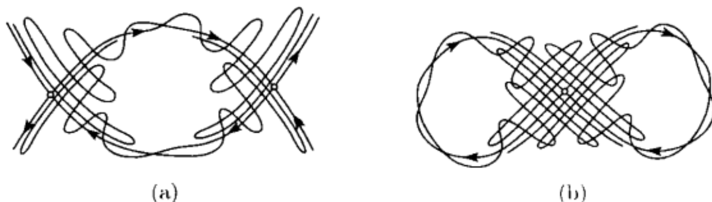



图 9.11　1:2 共振附近的同宿结构: (a) $s=1$; (b) $s=-1$

**注**　若在一类光滑的平面 $\mathbb{Z}_2$ 对称系统, 即在旋转 $x\mapsto \mathcal{I}x=-x$ 下不变的系统中考虑, 则系统 (9.74) 有其基本意义. 任何这样的系统有形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1G_1(x_1^2,x_2^2,\alpha)+x_2G_2(x_1^2,x_2^2,\alpha), \\ \dot{x}_2 = x_1H_1(x_1^2,x_2^2,\alpha)+x_2H_2(x_1^2,x_2^2,\alpha). \end{cases} \tag{9.76}$$

假设原点 $x=0$ 是平衡点, 有二重零特征值 $\lambda_{1,2}=0$, Jacobi 矩阵至少有一个非零元素. 类似于引理 9.11, 可以证明任何一个系统 (9.76) 是光滑轨道等价于系统

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2+\eta_1\Psi_1(\eta_1^2,\eta_2^2,\beta)+\eta_2\Psi_2(\eta_1^2,\eta_2^2,\beta), \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2+C_1(\beta)\eta_1^3+D_1(\beta)\eta_1^2\eta_2 \\ \qquad +\eta_1\Phi_1(\eta_1^2,\eta_2^2,\beta)+\eta_2\Phi_2(\eta_1^2,\eta_2^2,\beta), \end{cases} \tag{9.77}$$

其中 $\Psi_k,\Phi_k=O(\|\eta\|^3), k=1,2$. 已经证明, 在条件 (R2.0)~(R2.2) 下系统 (9.77) 局部拓扑等价于系统 (9.74). 此外, 使相图恒同的同胚 $h_\beta$ 可选择与 $\mathcal{I}$ 交换:

$$h_\beta\circ\mathcal{I}=\mathcal{I}\circ h_\beta. \qquad \diamond$$

### 9.5.4　1:3 共振

现在考虑平面光滑映射

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^2,\alpha\in\mathbb{R}^2,$$

在 $\alpha=0$ 有不动点 $x=0$, 具乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_0},\theta_0=\dfrac{2\pi}{3}$. 如同 1:2 共振, 可以假设对所有小 $\|\alpha\|$, $x=0$ 是映射的不动点, 把映射写为

$$x\mapsto A(\alpha)x+F(x,\alpha),$$

其中 $F(x,\alpha)=O(\|x\|^2)$. 因为乘子是单的, 对每个小 $\|\alpha\|$, 存在特征向量 $q(\alpha)\in\mathbb{C}^2$:

$$A(\alpha)q(\alpha)=\mu(\alpha)q(\alpha),$$

使得 $\mu(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 如通常, 引入满足

$$A^{\mathrm{T}}(\alpha)p(\alpha)=\bar{\mu}(\alpha)p(\alpha)$$

的伴随特征向量 $p(\alpha)\in\mathbb{C}^2$, 它们按

$$\langle p,q\rangle=1$$

标准化. 现在任何向量 $x\in\mathbb{R}^2$ 可表示为

$$x=zq+\bar{z}\bar{q},$$

以及研究的映射可写为复数形式

$$z\mapsto\mu(\alpha)z+g(z,\bar{z},\alpha), \tag{9.78}$$

其中

$$g(z,\bar{z},\alpha)=\langle p(\alpha),f(zq(\alpha)+\bar{z}\bar{q}(\alpha),\alpha)\rangle=\sum_{k+l\geqslant 2}\frac{1}{k!l!}g_{kl}(\alpha)z^k\bar{z}^l.$$

可以如同第 4 章 (见 4.7 节) 研究 Neimark-Sacker 分支那样用相同方法进行.

**引理 9.12** (1:3 共振映射规范形)　*对所有充分小 $\|\alpha\|$, 映射 (9.78) 可以用光滑依赖于参数的光滑可逆的变量变换化为形式*

$$\zeta\mapsto\Gamma_\alpha(\alpha)=\mu(\alpha)\zeta+B(\alpha)\bar{\zeta}^2+C(\alpha)\zeta|\zeta|^2+O(|\zeta|^4), \tag{9.79}$$

*其中*

$$B(\alpha)=\frac{g_{02}(\alpha)}{2}, \tag{9.80}$$

*以及*

$$C(\alpha)=\frac{g_{20}(\alpha)g_{11}(\alpha)(2\mu(\alpha)+\bar{\mu}(\alpha)-3)}{2(\bar{\mu}(\alpha)-1)(\mu^2(\alpha)-\mu(\alpha))}+\frac{|g_{11}(\alpha)|^2}{1-\bar{\mu}(\alpha)}+\frac{g_{21}(\alpha)}{2}. \tag{9.81}$$

**证明**　这个引理的证明实际上已经包含在引理 4.5 和 4.6 的证明中. 如引理 4.5, 可以用变换

$$z=w+\frac{h_{20}}{2}w^2+h_{11}w\bar{w}+\frac{h_{20}}{2}\bar{w}^2$$

尝试消去 (9.78) 中的二次项, 其中 $h_{kl}=h_{kl}(\alpha)$ 是未知函数. 完全与引理 4.5 一样, 可以令

$$h_{20}=\frac{g_{20}}{\mu^2-\mu},\quad h_{11}=\frac{g_{11}}{|\mu|^2-\mu},$$

以消去 $w^2$ 和 $w\bar{w}$ 项前面的系数, 因为对所有充分小 $\|\alpha\|$, 上面的分母不为零. 但是在形式地令 (如同引理 4.5)

$$h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu}$$

企图 "消去" $\bar{w}^2$ 项的系数时惊人地失败, 因为

$$\bar{\mu}^2(0) - \mu(0) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}(1 - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}) = 0.$$

由此, $\bar{w}^2$ 项不可能用光滑依赖于 $\alpha$ 的变换消去. 因此, 令 $h_{02}(\alpha) = 0$, 这给出

$$B(0) = \frac{g_{02}(0)}{2}. \tag{9.82}$$

下一步是消去三次项. 这可如引理 4.6 一样执行可逆的光滑变换

$$w = \zeta + \frac{h_{30}}{6}\zeta^3 + \frac{h_{12}}{2}\zeta\bar{\zeta}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{\zeta}^3,$$

其中 $h_{kl} = h_{kl}(\alpha)$ 光滑. 由于 $\mu^2(0) \neq 1$ 和 $\mu^4(0) \neq 1$, 变换移去所得映射中除了 $\zeta|\zeta|^2$ 项以外的所有三次项. 为了计算 $C(\alpha)$ 的系数, 只需要作变换

$$z = \zeta + \frac{1}{2}h_{20}(\alpha)\zeta^2 + h_{11}(\alpha)\zeta\bar{\zeta},$$

并求 $\zeta^2\bar{\zeta}$ 项前面所得的系数, 其中 $h_{20}$ 和 $h_{11}$ 是上面所给. 这给出了表达式 (9.81). 于是临界值 $C(0)$ 由下面公式给出

$$C(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu_0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{g_{21}(0)}{2}, \tag{9.83}$$

其中 $\mu_0 = \mu(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 将 $g_{02} = 0$ 代入 (4.20) 就可得到公式 (9.83). 引理得证. □

我们要用流近似映射 (9.79). 它的线性部分是

$$\zeta \mapsto \mu(\alpha)\zeta, \tag{9.84}$$

不难看到, 它是描述 $\alpha = 0$ 时的旋转, 旋转角度为 $\frac{2\pi}{3}$. 将 $\mu(\alpha)$ 表示为指数形式

$$\mu(\alpha) = \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha) + \mathrm{i}\theta(\alpha)},$$

其中 $\varepsilon(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0 = \frac{2\pi}{3}$, 立刻看到 (9.84) 是沿着线性方程

$$\dot{\zeta} = \lambda(\alpha)\zeta$$

轨道的单位时间的移位, 这里 $\lambda(\alpha)=\varepsilon(\alpha)+\mathrm{i}\theta(\alpha)$. 但是在企图用流近似 $\Gamma_\alpha$ 的二次项时没有成功. 显然, 近似方程应该有形式

$$\dot{\zeta}=\lambda\zeta+G_{02}\bar{\zeta}^2+O(|\zeta|^3),$$

其中 $G_{02}=G_{02}(\alpha)$ 是未知函数. 执行 Picard 二次迭代 (9.26) 得

$$\zeta^{(1)}(\tau)=\mathrm{e}^{\lambda\tau}\zeta,\quad \zeta^{(2)}(1)=\mathrm{e}^{\lambda}\zeta+\frac{\mathrm{e}^{2\bar{\lambda}}(\mathrm{e}^{\lambda-2\bar{\lambda}}-1)}{\lambda-2\bar{\lambda}}G_{02}\bar{\zeta}^2.$$

$\bar{\zeta}^2$ 前面的系数在 $\alpha=0$ 为零, 因为在 1:3 共振

$$\mathrm{e}^{\lambda(0)-2\bar{\lambda}(0)}=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}=1.$$

因此, 不能用流的单位–时间移位近似满足 $B(0)\neq 0$ 的 $\Gamma_0$. 对二次迭代 $\Gamma_\alpha^2$ 同样成立 (验证). 幸运的是, 三次迭代 $\Gamma_\alpha^3$ 允许用流近似.

**引理 9.13** 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 映射 (9.79) 的第三次迭代可表示为形式

$$\Gamma_\alpha^3(\zeta)=\varphi_\alpha^1\zeta+O(|\zeta|^4),$$

其中 $\varphi_\alpha^t$ 是平面系统

$$\dot{\zeta}=\omega(\alpha)\zeta+B_1(\alpha)\bar{\zeta}^2+C_1(\alpha)\zeta|\zeta|^2 \tag{9.85}$$

的流, 这里 $\omega, B_1$ 和 $C_1$ 是 $\alpha$ 的光滑复值函数, $\omega(0)=0$, 且

$$B_1(0)=3\bar{\mu}_0B(0), \tag{9.86}$$

$$C_1(0)=-3|B(0)|^2+3\mu_0^2C(0), \tag{9.87}$$

其中 $\mu_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, 以及 $B(0)$ 和 $C(0)$ 分别由 (9.82) 和 (9.83) 给出.

**证明** $\Gamma_\alpha$ 的第三次迭代有形式

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^3(\zeta)=&\mu^3\zeta+(\mu^2+\bar{\mu}|\mu|^2+\bar{\mu}^4)B\bar{\zeta}^2+[2(|\mu|^2+\bar{\mu}^3+|\mu|^4)|B|^2\\&+\mu^2(1+|\mu|^2+|\mu|^4)C]\zeta|\zeta|^2+O(|\zeta|^4).\end{aligned}$$

由于 $\mu^3(0)=1$, 在 $\alpha=0$ 附近 $\mu^3$ 可表示为

$$\mu^3(\alpha)=\mathrm{e}^{\omega(\alpha)},$$

$\omega(\alpha)$ 为满足 $\omega(0)=0$ 的复值函数. 这就给出了 (9.85) 中的线性项.

对小的 $\|\alpha\|$, 映射 $\Gamma_\alpha^3$ 接近于恒同映射 $\mathrm{id}(\zeta)=\zeta$. 我们已经指出, 这样的映射总可以用流移位近似. 为验证 (9.86) 和 (9.88), 首先执行 (9.85) 在 $\alpha=0$ 的三次 Picard 迭代:

$$\begin{aligned}
&\zeta^{(1)}(\tau)=\zeta,\\
&\zeta^{(2)}(\tau)=\zeta+B_1(0)\bar{\zeta}^2\tau,\\
&\zeta^{(3)}(1)=\zeta+B_1(0)\bar{\zeta}^2+(|B_1(0)|^2+C_1(0))\zeta|\zeta|^2+O(|\zeta|^4).
\end{aligned}$$

对 $\alpha=0$ 比较 $\Gamma^3$ 和 $\zeta^3(1)$ 中的系数, 考虑到 $\mu_0^3=\bar{\mu}_0^3=|\mu_0|=1$, 得表达式 (9.86) 和 (9.87). □

考虑 $\omega$ 的实部和虚部为新开折参数 $(\beta_1,\beta_2)$:

$$\omega(\alpha)=\beta_1(\alpha)+\mathrm{i}\beta_2(\alpha).$$

有

$$\begin{cases}\beta_1(\alpha)=3\varepsilon(\alpha),\\ \beta_2(\alpha)=3\theta(\alpha)(\mathrm{mod}\,2\pi).\end{cases}$$

在 $\alpha=0$, 假设

(R3.0) $\det\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)\neq 0$,

可用 $\beta$ 去参数化参数平面内原点的邻域, 并将 (9.85) 写为

$$\dot{\zeta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\zeta+b_1(\beta)\bar{\zeta}^2+c_1(\beta)\zeta|\zeta|^2, \tag{9.88}$$

其中 $b_1(\beta)=B_1(\alpha(\beta)), c_1(\beta)=C_1(\alpha(\beta))$. 如果复数

(R3.1) $b_1(0)=B_1(0)\neq 0$,

其中 $B_1(0)$ 由 (9.86) 给出, 则可用

$$\zeta=\gamma(\beta)\eta,\quad \gamma(\beta)\in\mathbb{C}^1$$

尺度化 (9.88), 其中

$$\gamma(\beta)=\frac{1}{|b_1(\beta)|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg b_1(\beta)}{3}\right).$$

尺度化结果得

$$\dot{\eta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\eta+\bar{\eta}^2+c(\beta)\eta|\eta|^2, \tag{9.89}$$

其中

$$c(\beta) = \frac{c_1(\beta)}{|b_1(\beta)|^2}.$$

在极坐标 $\eta = \rho e^{i\varphi}$ 下将 (9.89) 写为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta_1 \rho + \rho^2 \cos 3\varphi + a(\beta)\rho^3, \\ \dot{\varphi} = \beta_2 - \rho \sin 3\varphi + b(\beta)\rho^2, \end{cases} \tag{9.90}$$

其中光滑实值函数 $a(\beta) = \operatorname{Re} c(\beta), b(\beta) = \operatorname{Im} c(\beta)$. 现在, 对近似平面系统引入最后一个假设, 即假定

$$a(0) \neq 0,$$

这等价于非退化条件

(R3.2) $\operatorname{Re} C_1(0) \neq 0$,

其中 $C_1(0)$ 由 (9.87) 所给.

在非退化条件假设下, 近似系统 (9.90) 对 $a(0) < 0$ 的分支图如图 9.12 所示.

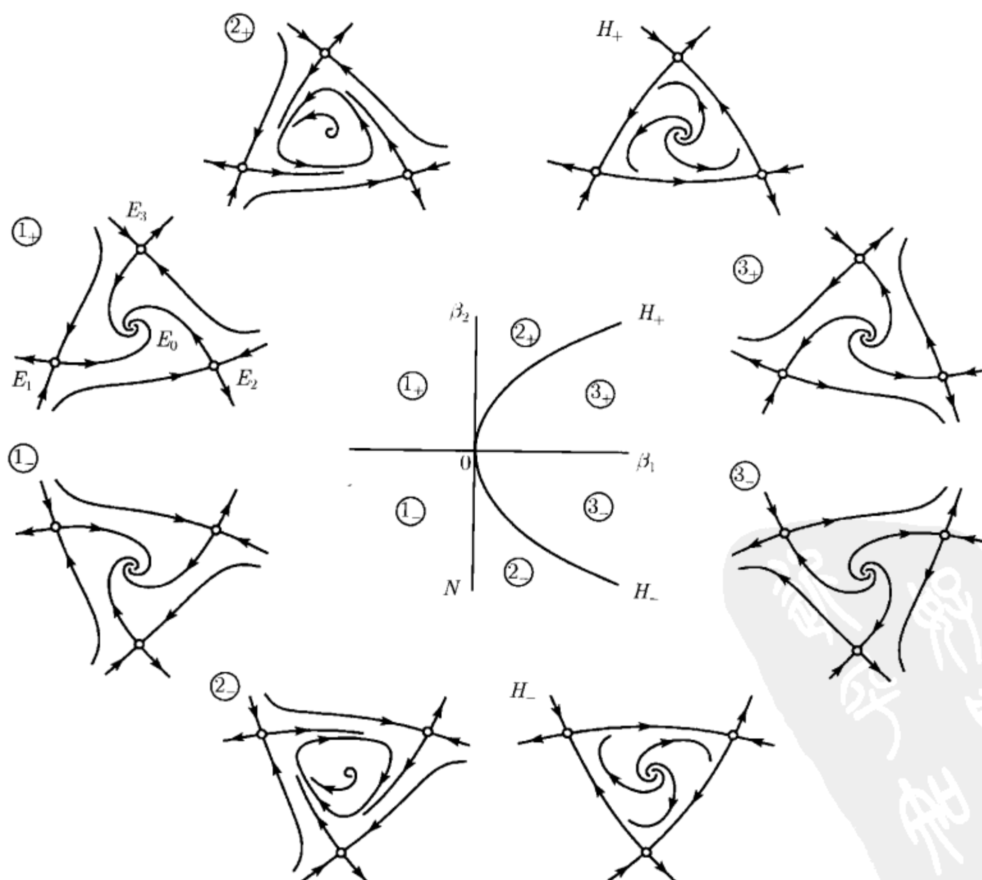



图 9.12 近似系统 (9.89) 对 $a(0) = \operatorname{Re} c(0) < 0$ 的分支图

注意, 系统在通过角度 $\varphi = \theta_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ 的旋转 $R_3$ 下不变. 这样的系统称为 $\mathbb{Z}_3$ 对称.

这个系统永远有 $\rho_0 = 0$ 的平凡平衡点 $E_0$. 对所有充分小 $\|\beta\| \neq 0$, 也存在三个非平凡对称平衡点

$$E_k = (\rho_s, \varphi_{s,k}), \quad k = 1, 2, 3,$$

它们都位于半径为 $r_s$ 的圆周

$$r_s^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + O(\|\beta\|^3)$$

上, 并以角度 $\theta_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ 按 $\varphi$ 坐标分开.

非平凡平衡点永远是**鞍点**且对小的 $\|\beta\|$ 不分支. 平凡平衡点显然对 $\beta_1 < 0$ 稳定, 但对 $\beta_1 > 0$ 变成不稳定, 并由于假设 $a(0) < 0$, 在 $\beta_1 = 0$ 产生超临界 Hopf 分支. 因此, 若从左到右在 $\beta_2 \neq 0$ 的点穿过 Hopf 分支线

$$N = \{(\beta_1 \beta_2) : \beta_1 = 0\},$$

则 (9.90) 出现唯一且稳定的极限环.

这个极限环以后会发生什么情况? 可以证明, 若非退化条件 (R3.1) 和 (R3.2) 满足, 则对所有充分小 $\|\beta\|$, 系统 (9.90) 的极限环不多于一个 (见文献评注). 还可以证明, 存在分支曲线

$$H = \left\{(\beta_1 \beta_2) : \beta_1 = -\frac{a}{2}\beta_2^2 + o(\beta_2^2)\right\},$$

在此曲线上极限环由于**异宿分支**而消失 (见练习 6). 对在曲线 $H$ 上的参数值, 系统有由非平凡鞍点的稳定和不稳定分界线相重合而形成的异宿环. 所有三个鞍点的连接由于对称性而同时发生. 这个异宿环类似于三角形并且是内稳定的. 因此, 极限环在两个不相交而邻近于 Hopf 线 $N$ 的区域内存在. 建议读者围绕原点对图 9.12 中的分支图作次考察, 连同考虑 $a(0) > 0$ 的情形.

下面简短地讨论一下前面在 1:3 共振附近对原映射 $\Gamma_\alpha$ 分析的结果的含义. 这个映射永远有平凡不动点, 在对应于近似系统 (9.90) 的 Hopf 曲线 $N$ 的分支曲线上产生非退化 Neimark-Sacker 分支. Neimark-Sacker 分支产生围绕平凡不动点的闭不变曲线. 对所有接近于余维 2 点的参数值, 映射 $\Gamma_\alpha$ 有对应于 $\Gamma_\alpha^3$ 的三个非平凡鞍点的**周期 3 鞍点环**, 这三个鞍点依次对应于 (9.90) 的鞍点 $E_k, k = 1, 2, 3$. 代替单个异宿分支曲线 $H$, 具一般高阶项的映射 $\Gamma_\alpha$ 具有更加复杂的分支集. 在一个狭窄的指数形区域内, 周期 3 环的稳定和不稳定不变流形的横截相交形成**同宿结构** (见图 9.13). 这个区域是由两条光滑分支曲线 $T_{1,2}$ 所围, 在此两条曲线上这些流

形相切而得非横截同宿轨道. 这些流形的相交导致 Smale 马蹄的存在性, 因此存在无穷多个长周期环 (见第 1 章). 这些轨道在曲线 $T_{1,2}$ 附近由于折分支和翻转分支而出现并消失. 在 Neimark-Sacker 分支产生的闭不变曲线当它趋于同宿结构时失去它的光滑性而被破坏. 完全的图像还不知道.

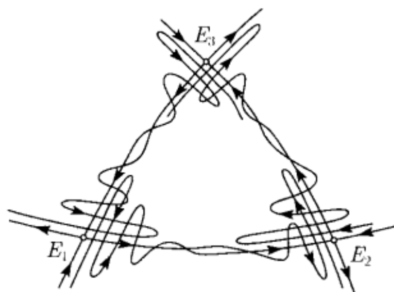



图 9.13 在 1:3 共振附近的同宿结构

**注** 在系统 (9.90) 中加入任何一个 $\mathbb{Z}_3$ 不变的高阶项并不定性地改变它的分支图. ◇

### 9.5.5 1:4 共振

考虑平面光滑映射

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

它在 $\alpha = 0$ 有不动点 $x = 0$, 具单乘子 $\mu_{1,2}(0) = \exp\left(\pm\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right) = \pm\mathrm{i}$ (1:4 共振). 对充分小 $\|\alpha\|$, 把映射写为

$$x \mapsto \Lambda(\alpha)x + F(x, \alpha),$$

其中 $F(x, \alpha) = O(\|x\|^2)$. 由于 $\Lambda(0)$ 的特征值 $\mu_1(0) = \mathrm{i}$ 是单的, 对所有充分小 $\|\alpha\|$, 存在 $\Lambda(0)$ 的邻近光滑特征值 $\mu(\alpha), \mu(0) = \mathrm{i}$. 如通常, 引入对应的通常的和伴随的特征向量 $q(\alpha), p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$,

$$\Lambda q = \mu q, \quad \Lambda^{\mathrm{T}} p = \bar{\mu} p,$$

以及用

$$\langle p, q \rangle = 1$$

对它们标准化. 现在任何向量 $x \in \mathbb{R}^2$ 可表示为形式

$$x = zq + \bar{z}\bar{q},$$

而映射可写为复数形式

$$z \mapsto \mu(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \tag{9.91}$$

其中

$$g(z,\bar{z},\alpha)=\langle p,f(zq(\alpha)+\bar{z}\bar{q}(\alpha),\alpha)\rangle=\sum_{k+l\geqslant 2}\frac{1}{k!l!}g_{kl}(\alpha)z^k\bar{z}^l.$$

由引理 4.5, 对小的 $\|\alpha\|$, 可作光滑变换消去 (9.91) 中所有二次项, 因为对 $\mu_0=\mathrm{i}$, $\mu_0\neq 1$ 和 $\mu_0^3\neq 1$. 变换将改变三次项. 然后, 如引理 4.6 消去尽可能多的三次项. 用 $\zeta$ 记新的复坐标. 于是, 从引理 4.6 的证明立刻看到在现在的情形四个三次项只有两个可去掉. 就是说, 在尝试移去 $\zeta|\zeta|^2$ 项和 $\bar{\zeta}^3$ 项时遭到失败, 因为 $|\mu_0|^2=\mu_0^4=1$. 经简单的额外计算可得到下面的引理.

**引理 9.14** (1:4 共振映射规范形)　对所有充分小 $\|\alpha\|$, 映射 (9.91) 可经光滑依赖于参数的光滑可逆的变量变换化为形式

$$\zeta\mapsto\Gamma_\alpha(\zeta)=\mu(\alpha)\zeta+C(\alpha)\zeta|\zeta|^2+D(\zeta)\bar{\zeta}^3+O(|\zeta|^4),\tag{9.92}$$

这里 $C$ 和 $D$ 是 $\alpha$ 的光滑函数:

$$C(0)=\frac{1+3\mathrm{i}}{4}g_{20}(0)g_{11}(0)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}|g_{11}(0)|^2-\frac{1+\mathrm{i}}{4}|g_{02}(0)|^2+\frac{1}{2}g_{21}(0),\tag{9.93}$$

$$D(0)=\frac{\mathrm{i}-1}{4}g_{11}(0)g_{02}(0)-\frac{1-\mathrm{i}}{4}g_{02}(0)\bar{g}_{20}(0)+\frac{1}{6}g_{03}(0).\tag{9.94}$$

□

下一个目标是用流近似 $\Gamma_\alpha$. (9.92) 的线性部分

$$\zeta\mapsto\mu(\alpha)\zeta\tag{9.95}$$

是在 $\alpha=0$ 通过 $\frac{\pi}{2}$ 角度的旋转, 这容易处理. 把 $\mu(\alpha)$ 写为指数形式:

$$\mu(\alpha)=\mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha)+\mathrm{i}\theta(\alpha)},$$

其中 $\varepsilon(0)=0$ 和 $\theta(0)=\frac{\pi}{2}$, 立刻可验证 (9.95) 是对 $\lambda(\alpha)=\varepsilon(\alpha)+\mathrm{i}\theta(\alpha)$, 沿着线性方程

$$\dot{\zeta}=\lambda(\alpha)\zeta$$

轨道的单位–时间的移位. 但是, 如果我们对非线性项有兴趣, 只有 $\Gamma_\alpha$ 的第四次迭代才允许用流近似.

**引理 9.15**　对所有的充分小 $\|\alpha\|$, 映射 (9.92) 的第四次迭代可表示为形式

$$\Gamma_\alpha^4(\zeta)=\varphi_\alpha^1\zeta+O(|\zeta|^4),$$

其中 $\varphi_\alpha^t$ 是平面系统

$$\dot{\zeta}=\omega(\alpha)\zeta+C_1(\alpha)\zeta|\zeta|^2+D_1(\alpha)\bar{\zeta}^3\tag{9.96}$$

的流, 其中 $\omega, C_1$ 和 $D_1$ 是 $\alpha$ 的光滑复值函数, $\omega(0)=0$, 且

$$C_1(0) = -4\mathrm{i}C(0), \quad D_1(0) = -4\mathrm{i}D(0). \tag{9.97}$$

$C(0)$ 和 $D(0)$ 分别由 (9.93) 和 (9.94) 所给.

**证明** $\Gamma_\alpha$ 的第四次迭代有形式

$$\Gamma_\alpha^4(\zeta) = \mu^4\zeta + \mu^3(|\mu|^2+1)(|\mu|^4+1)C\zeta|\zeta|^2 + (\mu+\bar{\mu}^3)(\mu^2+\bar{\mu}^6)D\bar{\zeta}^3 \\ + O(|\zeta|^4).$$

由于 $\mu^4(0)=1$, 在 $\alpha=0$ 附近, 可将 $\mu^4$ 表为形式

$$\mu^4(\alpha) = \mathrm{e}^{\omega(\alpha)},$$

$\omega(\alpha)$ 为某个满足 $\omega(0)=0$ 的光滑复值函数. 这给出了 (9.96) 中的线性项.

对小的 $\|\alpha\|$, 映射 $\Gamma_\alpha^4$ 接近于恒同映射 $\mathrm{id}(\zeta)=\zeta$, 因此可用流的单位–时间移位来近似. 为验证 (9.97), 首先作 (9.96) 在 $\alpha=0$ 的三次 Picard 迭代:

$$\zeta^{(1)}(\tau) = \zeta^{(2)}(\tau) = \zeta,$$
$$\zeta^{(3)}(1) = \zeta + C_1(0)\zeta|\zeta|^2 + D_1(0)\bar{\zeta}^3 + O(|\zeta|^4).$$

比较 $\zeta^{(3)}(1)$ 与 $\Gamma_\alpha^4$ 在 $\alpha=0$ 的系数, 考虑到 $\mu(0)=\mathrm{i}$, 得到表达式 (9.97). □

如同 1:3 共振, 考虑 $\omega$ 的实部和虚部为新开折参数 $(\beta_1,\beta_2)$:

$$\omega(\alpha) = \beta_1(\alpha) + \mathrm{i}\beta_2(\alpha).$$

有

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha) = 4\varepsilon(\alpha), \\ \beta_2(\alpha) = 4\theta(\alpha) (\mathrm{mod}\, 2\pi). \end{cases}$$

假设在 $\alpha=0$ 有

(R4.0) $\det\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right) \neq 0$.

可以用 $\beta$ 参数化参数平面原点的邻域, 并将 (9.96) 写为

$$\dot{\zeta} = (\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2)\zeta + c_1(\beta)\zeta|\zeta|^2 + d_1(\beta)\bar{\zeta}^3, \tag{9.98}$$

其中 $c_1(\beta) = C_1(\alpha(\beta))$ 和 $d_1(\beta) = D_1(\alpha(\beta))$. 假设

(R4.1) $d_1(0) = D_1(0) \neq 0$,

这里 $D_1(0)$ 是由 (9.97) 所给, 于是可用

$$\zeta = \gamma(\beta)\eta, \quad \gamma(\beta) \in \mathbb{C}^1$$

尺度化 (9.98), 其中

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{|d_1(\beta)|}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg d_1(\beta)}{4}\right).$$

尺度化结果得

$$\dot{\eta} = (\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2)\eta + A(\beta)\eta|\eta|^2 + \bar{\eta}^3, \tag{9.99}$$

其中

$$A(\beta) = \frac{c_1(\beta)}{|d_1(\beta)|}.$$

注意, 这个系统在通过角度 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (即变换 $\eta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\eta$) 的旋转 $R_4$ 下不变. 这样的系统称为 $\mathbb{Z}_4$ 对称. 也许, 如果用极坐标 $\eta = \rho\mathrm{e}^{\varphi}$, 系统

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta_1\rho + a(\beta)\rho^3 + \rho^3\cos 4\varphi, \\ \dot{\varphi} = \beta_2 + b(\beta)\rho^2 - \rho^2 \sin 4\varphi \end{cases} \tag{9.100}$$

的对称性更明显, 其中 $a(\beta) = \mathrm{Re}\, A(\beta), b(\beta) = \mathrm{Im}\,(\beta)$.

系统 (9.99) 的分支分析比前面几节近似系统的分析更为复杂, 要求用数值方法. 分支图依赖于 $A = A(0) = (a(0), b(0))$, 因此 $(\mathrm{Re}\, A, \mathrm{Im}\, A)$ 平面被 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面内不同分支图划分为几个区域①. 幸运的是, 所有的分支图都是由从 $\beta = 0$ 出发的直线所组成, 因此, 可以沿着 $\beta$ 平面上的单位圆作环绕旅行在其上探索分支点来完全刻画它们. 这等价于令

$$\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

并考虑当 $\alpha$ 完成一个圆周时 (9.99) 的*单参数分支系列*. 在 $A$ 平面上穿过边界得知出现分支序列中的新余维 1 分支, 或者变更它们的次序. 因此, 这些边界是 $(\alpha, A)$ 空间内的余维 2 分支曲线在 $A$ 平面上的投影. 遗憾的是, 它们当中只有三种对应的平衡点分支可以解析地推导出. 其他包含*退化的异宿分支*只能够数值计算. 正如我们可以看到的, $A$ 平面上的边界在关于坐标轴的反射是对称的. 因此, 只要在 $A$ 平面的一个象限内研究它们就够了. 假设

(R4.2) $\mathrm{Re}\, A \neq 0$

① 类似于第 8 章 Hopf-Hopf 分支情形, 那里在 $(\theta, \delta)$ 平面内不同区域内的分支图是不同的.

以及

(R4.3) $\mathrm{Im}\,A \neq 0$,

并取对应于

$$a = \mathrm{Re}\,A < 0, \quad b = \mathrm{Im}\,A < 0$$

的象限. 把 $A$ 平面划分成具不同分支图的区域如图 9.14 所示, 其中有些曲线解析地知道, 其他的则要作数值计算 (见前面的讨论).

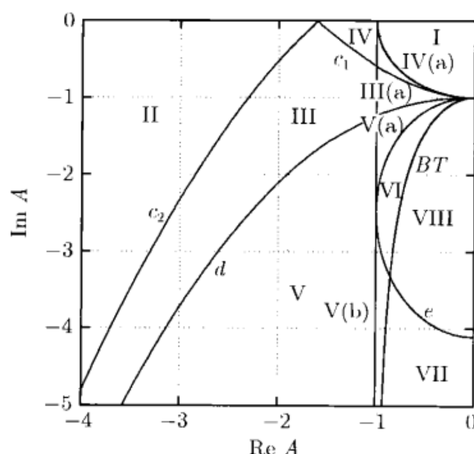



图 9.14　$A$ 平面划分为具 (9.99) 的不同分支图的区域

这个系统永远有平凡平衡点 $\eta = 0$, $\beta_1 < 0$ 时稳定, $\beta_1 > 0$ 时排斥 (见 (9.100) 第一个方程). 在 $\beta_1 = 0$, Hopf 分支发生, 当 $\alpha$ 穿过 $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 时极限环产生/消失. 由于假设 $a < 0$, 它是稳定的. 注意, 对 $\beta_2 \neq 0$, 轨道按 $\beta_2$ 的符号 (见 (9.100) 第二个方程) 盘旋进入或者跑出原点. 对 $\beta_2 = 0$ (即 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi$) 在原点附近旋转方向相反.

有可能的非平凡平衡点 $\eta = \rho e^{i\varphi}$ 满足复方程

$$-\frac{e^{i\alpha}}{\rho^2} = A(\beta) + e^{-4i\varphi},$$

对小的 $\|\beta\|$, 它可用

$$-\frac{e^{i\alpha}}{\rho^2} = A + e^{-4i\varphi} \tag{9.101}$$

近似, 这里 $A = A(0)$. (9.101) 的左边给定 (固定 $\alpha$) 一条在复平面上由 $\rho > 0$ 参数化的射线, 右端则定义一个中心在 $A$ 的单位圆, 当 $\varphi$ 转动一整圈时它覆盖圆周四次 (见图 9.15 (a), (b)). 射线和圆周的任何交点给出 (9.99) 的四个对称平衡点. 根据这个几何结构得知, 这个系统可以有零个、四个或者八个非平凡平衡点.

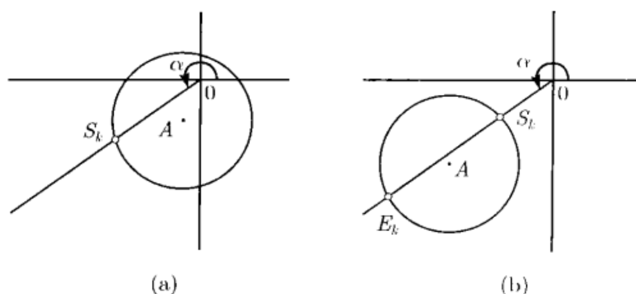



图 9.15　(9.99) 的平衡点结构: (a) $|A| < 1$; (b) $|A| > 1$

事实上, 若 $|A| < 1$, 则复平面的原点位于这个圆周的内部, 因此从原点出发的任何射线与圆周恰好有一个交点 (见图 9.15(a)), 这给出 (9.99) 的四个对称平衡点 $S_k, k = 1, 2, 3, 4$. 这时可以证明平衡点 $S_k$ 是鞍点 (见图 9.16(a)). 反之, 如果 $|A| > 1$, 复平面的原点在圆周的外面, 从原点出发的标准射线与圆周或者没有交点或者有两个交点 (见图 9.15(b)), 后一种情形给出 (9.99) 的八个平衡点 $S_k, E_k, k = 1, 2, 3, 4$, 靠近原点的平衡点 $S_k$ 是鞍点, 较远的 $E_k$ 是吸引的 (见图 9.16(b)) 或者是排斥的. 当射线以 $\alpha$ 旋转并与圆周相切时, 平衡点 $S_k$ 和 $E_k$ 由于折分支成对地重合并消失. 因此, 对 $|A| > 1$, 存在 $\alpha$ 值的区间, 其内系统有八个非平凡平衡点. 它们的存在性区间包含折分支值之间的参数 $\alpha$.

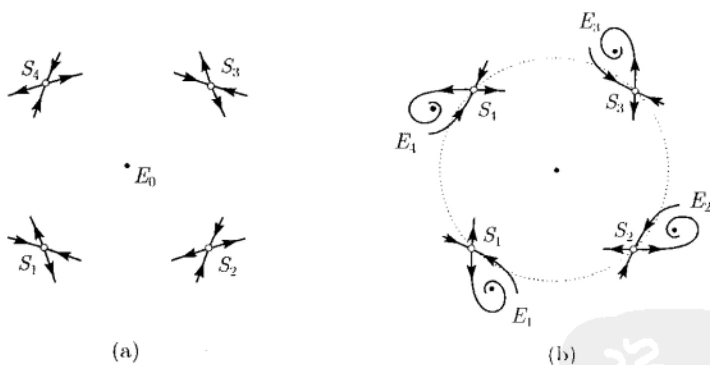



图 9.16　(9.99) 的平衡点: (a) $|A| < 1$; (b) $|A| > 1$

显然, 情形 $|A| = 1$ 是个例外, 应该避免, 故假设

(R4.4) $|A(0)| \neq 1$.

另一个例外情形是圆周与复平面的虚轴相切, 即在所考虑的象限内 $\mathrm{Re}\,A = -1$ (图 9.17). 在这情形两个不同的分支在 $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ 同时发生: 平凡平衡点 $E_0$ 的 Hopf 分支以及非平凡平衡点 $S_k, E_k$ 的相碰. 因此, 假设

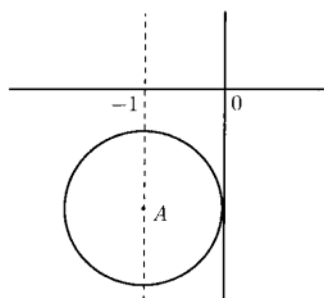



图 9.17 例外情形 $\mathrm{Re}\,A=-1$

(R4.5) $|\mathrm{Re}\,A(0)|\neq 1$

平衡点 $E_k$ 对所有 $\alpha$ 保持稳定或者在 Hopf 分支改变其稳定性取决于 $A$ 的值. 在 $A$ 平面区分这两种情形的曲线是空间中的 Bogdanov-Takens 分支曲线 $BT$ 在 $(\alpha, A)$ 上的投影:

$$|b|=\frac{1+a^2}{\sqrt{1-a^2}},$$

其中 $a=\mathrm{Re}\,A, b=\mathrm{Im}\,A$. 曲线 $BT$ 在所选择 $A$ 平面的象限内从 $-\mathrm{i}$ 出发渐近于直线 $a=-1$ (见图 9.14). 在这条曲线上方的平衡点 $E_k$ 保持稳定, 曲线下方的具有非退化的 Hopf 分支. 因此, 假设下面的非退化条件成立:

(R4.6) $|\mathrm{Im}\,A(0)|\neq\dfrac{1+(\mathrm{Re}\,A(0))^2}{\sqrt{1-(\mathrm{Re}\,A(0))^2}}$.

其他可能的余维 1 分支包括 (9.99) 的极限环. 由 Hopf 分支从非平凡平衡点 $E_k$ 分支出的 "小" 极限环, 在当鞍点 $S_k$ 的分界线构成 "小" 同宿闭环时的同宿分支上消亡 (见图 9.18(a)). 鞍点 $S_k$ 的分界线也可构成异宿环. 这些环有两种可能的类型, 即围绕平衡点 $E_0$ 的 "方形" 异宿环 (图 9.18(b)) 和围绕所有平衡点 $E_k, k=0,1,2,3,4$ 的 "叶形" 环 (图 9.18(c)). 由 $\mathbb{Z}_4$ 对称性, 所有四种连接同时出现. 分支类似于第 6 章已经研究过的标准同宿分支, 其中包含单个鞍点. 用 $\sigma_0$ 记鞍点的鞍点量: $\sigma_0=\mathrm{tr}\,\Lambda(S_k)$. "方形" 环永远是内稳定 $(\sigma_0<0)$, "叶形" 环外稳定或者不稳定取决于 $\sigma_0<0$ 或 $\sigma_0>0$. 当参数 $\alpha$ 穿过对应 "方形" 异宿环的 $\sigma_0\neq 0$ 时, 在附近的参数值出现相关稳定性的极限环. 这个环围绕平凡平衡点 $E_0$, 并且在它外面存在有任何非平凡平衡点. 通过对应 $\sigma_0\neq 0$ 时 "叶形" 异宿环的值时, 产生相应稳定性的围绕系统所有平衡点的极限环. 如果这个极限环外面没有

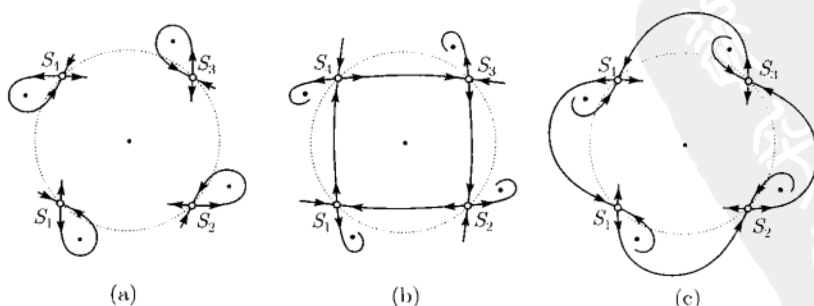



图 9.18 (a) "小" 同宿闭环; (b) "方形" 异宿环; (c) "四叶形" 异宿环

平衡点, 那它是稳定的, 因为 $\operatorname{Re} A < 0$. 有强计算机显示这个系统可以有至多两个围绕所有非平凡平衡点的 "大" 极限环, 以及不多于一个的围绕每个非平凡平衡点的 "小" 极限环. 其他余维 1 分支产生的 "大" 极限环可以是在折分支由鞍–结点的中心流形组成的异宿环 (图 9.19). 由 $\mathbb{Z}_4$ 对称性, 所有四个连接同时存在. 这个分支类似于第 7 章已经研究过的同宿于单个鞍–结点的同宿轨道. 当穿过对应的参数值时, 非平凡平衡点消失, "大" 极限环出现.

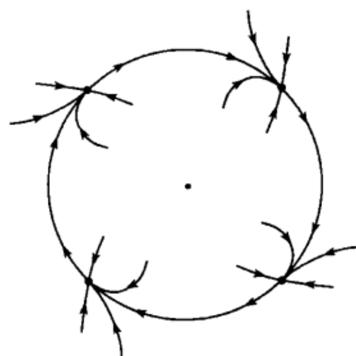


图 9.19　鞍–结点的异宿连接

在 $A$ 平面上显示的余下的边界对应于退化异宿分支. 更确切地说, 在 $(\alpha, A)$ 空间存在出现对应上面描述的异宿环之一的曲线, 它们有额外的退化性. 这种余维 2 情形存在三种类型, 它们定义三类曲线见图 9.14. "叶形" 异宿环可以包含鞍点, 它们都是 $\sigma_0 = 0$ 的鞍点 (中性鞍点). 由此得知, 稳定和不稳定 "大" 极限环都可以存在, 它们可以 "重合". $A$ 平面上对应的边界以 $e$ 标记. 如果考虑整个 $A$ 平面, 它看上去像通过 $A = -\mathrm{i}$ 的椭圆①. 另外两条边界对应于退化的鞍–结点连接, 这种连接是当鞍–结点中心流形 (它的 "不稳定" 分界线) 沿着非中心方向 (沿着 "结点扇形" 的边界) 趋于另外的鞍–结点时产生. 存在两种可能的这种退化性: "方形" (见图 9.20(a)) 或者 "叶形" (见图 9.20(b)). 在 $A$ 平面上对应的边界记为 $c_{1,2}$ 和 $d$.

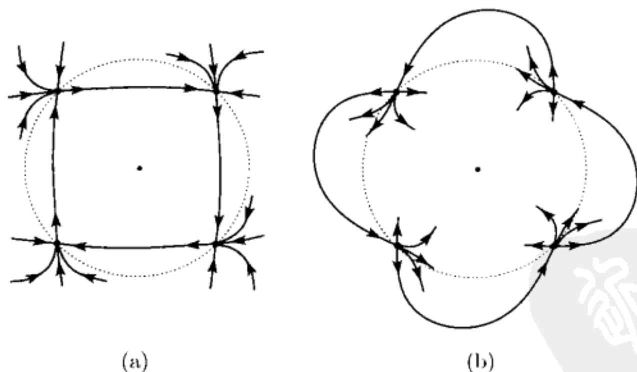



图 9.20　退化的鞍–结点异宿轨道: (a) "方形"; (b) "叶形"

解析和数值地寻找边界将所考虑的 $A$ 象限划分成 12 个区域, 按历史原因记为 I, II, III, III(a), IV, IV(a), V, V(a), V(b), VI, VII, 和 VIII. 当 $\alpha$ 从 $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ (逆钟向) 变化时每一个区域都由它自己的分支序列所刻画. 因此, 有三个

① 存在对称的通过 $A = \mathrm{i}$ 的一个椭圆.

非退化条件：

(R4.7) $A \notin e$,

(R4.8) $A \notin c_{1,2}$,

(R4.9) $A \notin d$,

这些都没有解析表达式. 综合上面的讨论, 如果 $A$ 是固定在负象限区域之一的内部, 可以遇到下面的许多余维 1 分支：

$H_0$ 平凡平衡点 $E_0$ 的 Hopf 分支. 首先 $\left(在\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2}\right)$ 产生稳定极限环, 其次 $\left(在\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$ 环消失.

$T$ 非平凡平衡点的切 (折) 分支. 在对应的参数值 8 个非平凡平衡点 $E_k, S_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$ 出现/消失. 事实上, 它们出现三种可能性：如果这个分支发生时大环存在则它们或者在 "大" 环的内部, 或者在其上, 或者在外部, 用 $T_{\rm in}, T_{\rm on}$ 或者 $T_{\rm out}$ 区别这些可能性.

$H_1$ 非平凡平衡点 $E_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$ 的 Hopf 分支. 从非平凡反鞍点 $E_k$ 分支出四个 "小" 极限环.

$L$ "小" 同宿回路分支. "小" 环由 Hopf 分支产生, 由于非平凡鞍点 $S_k$ 的同宿轨道而消失.

$C_S$ "方形" 异宿环. 从轨道分支出稳定极限环.

$C_C$ "叶形" 异宿环. 它产生稳定的或者不稳定的 "大" 极限环, 稳定性取决于鞍点量 $\sigma_0$ 的符号. 分别以 $C_C^-$ 和 $C_C^+$ 记这些情形.

$F$ "大" 极限环的折 (切) 分支. 两个 "大" 环, 外面的稳定, 它们可重合并消失.

下面的符号序列允许我们完全地重新构造系统 (9.99) 的分支图, 我们相信在 $A$ 平面内存在相应的区域. 对应相图的数目如图 9.21 和图 9.22 所示, 箭头上面的符号表示分支. 在区域 I, 如前从 $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ 开始, 其中只有一个稳定的平凡平衡点 $E_0$ 和四个对称的非平凡鞍点 $S_k, k = 1, 2, 3, 4$. 在所有其他区域都从单个大范围稳定的平凡点 $E_0$ 开始. 第一个分支永远是超临界 Hopf 分支.

$$\mathrm{I}: 1 \xrightarrow{H_0} 2 \xrightarrow{C_s} 3(3') \xrightarrow{C_s} 2' \xrightarrow{H_0} 1'.$$

$$\mathrm{II}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\rm on}} 10 \xrightarrow{T_{\rm on}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'.$$

$$\mathrm{III}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\rm on}} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{T_{\rm out}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'.$$

$$\mathrm{III(a)}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\rm on}} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

$$\text{IV}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{out}}} 11 \xrightarrow{C_S} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{T_{\text{out}}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'.$$

$$\text{IV(a)}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{out}}} 11 \xrightarrow{C_S} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{T_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

$$\text{V}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{in}}} 8 \xrightarrow{C_C^-} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{T_{\text{out}}} 5 \xrightarrow{H_0} 4'.$$

$$\text{V(a, b)}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{in}}} 8 \xrightarrow{C_C^-} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

$$\text{VI}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{in}}} 8 \xrightarrow{C_C^+} 9 \xrightarrow{F} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

$$\text{VII}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{in}}} 6 \xrightarrow{H_1} 7 \xrightarrow{L} 8 \xrightarrow{C_C^-} 10 \xrightarrow{C_S} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

$$\text{VIII}: 4 \xrightarrow{H_0} 5 \xrightarrow{T_{\text{in}}} 6 \xrightarrow{H_1} 7 \xrightarrow{L} 8 \xrightarrow{C_C^+} 9 \xrightarrow{F} 10 \xrightarrow{C_s} 11 \xrightarrow{H_0} 12 \xrightarrow{T} 4'.$$

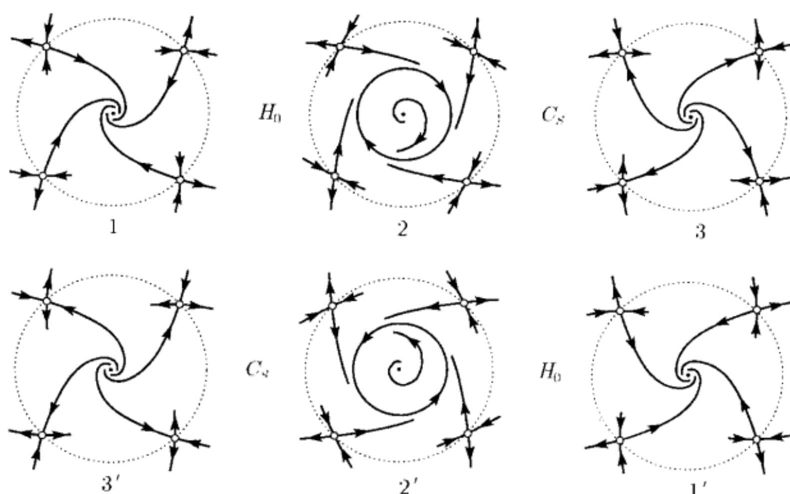



图 9.21　区域 I 中的分支序列

在最简单的区域 I 中典型的相图序列如图 9.21. 注意, 为使序列便于理解, 我们指出有三对拓扑等价的相图 (1(1′), 2(2′) 和 3(3′), 它们仅围绕原点旋转的方向不同). 两个相图之间的标签, 对应的分支可从一个变到另一个. 相图最复杂的序列是对应于区域 VIII, 描述于图 9.22. 建议读者重新构造其他所有可能的分支序列.

由已得的结果对有 1:4 共振的一般映射 $\Gamma_\alpha$ 能做些么? 显然, 近似系统的平凡平衡点对应于映射的平凡不动点, 系统的四个非平凡 $\mathbb{Z}_4$ 成对平衡点对应于原映射单个周期 4 环. 可以证明, 非平凡平衡点的切分支和 Hopf 分支引起映射非平凡不动点的切分支和 Neimark-Sacker 分支. 如通常, 近似系统中的同宿连接和异宿连接变成映射的异宿结构 (见图 9.23). 它们是由非平凡鞍点周期 4 环的稳定和不稳定不变流形相交而形成. 这些结构导致无穷多个周期轨道的存在性. 对应于极限环的闭不变曲线失去它们的光滑性而被破坏, 几乎与鞍点周期 4 环 "重合". 个别分支序

列变成依赖于 $\|\beta\|$ 且包含无穷多个分支. 完全的详细情况看来始终仍不知道!

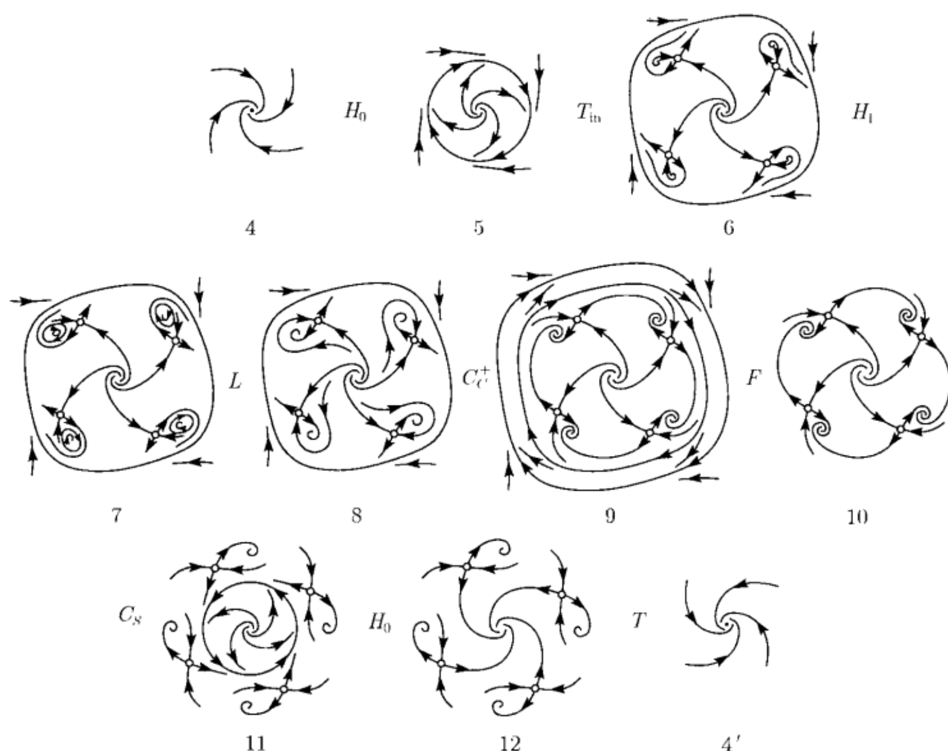



图 9.22　区域 VIII 中的分支序列

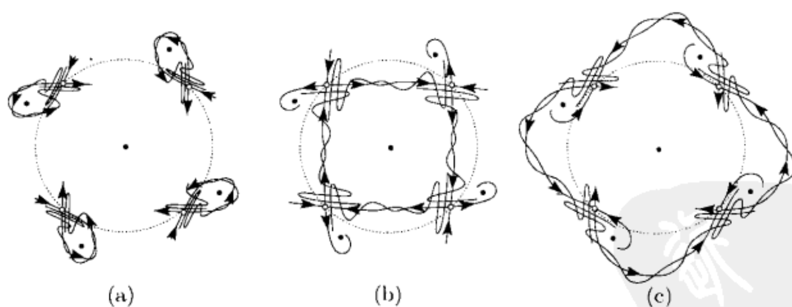



图 9.23　1:4 共振附近的同宿结构: (a) "小"; (b) "方形"; (c) "叶形"

## 9.6　折–翻转分支

考虑离散–时间的光滑平面动力系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{9.102}$$

它在 $\alpha=0$ 有平衡点 $x=0$, 具乘子 $\mu_1=1$ 和 $\mu_2=-1$. 对折–翻转分支存在两个分支条件.

对任何小 $\|\alpha\|$, $f$ 在 $x=0$ 关于 $x$ 的展开为

$$f(x,\alpha)=\gamma(\alpha)+A(\alpha)x+R(x,\alpha),$$

其中 $\gamma(0)=0$ 以及 $R(x,\alpha)=O(\|x\|^2)$. 由分支条件得知, 存在两个向量 $q_{1,2}(\alpha)\in\mathbb{R}^2$ 使得

$$A(\alpha)q_1(\alpha)=\lambda_1(\alpha)q_1(\alpha),\quad A(\alpha)q_2(\alpha)=\lambda_2(\alpha)q_2(\alpha),$$

其中 $\lambda_1(0)=1$ 和 $\lambda_2(0)=-1$. 注意, 由于 $A(0)$ 的特征值 $\pm1$ 是单的, $\lambda_{1,2}$ 光滑地依赖于 $\alpha$, 而 $q_{1,2}$ 也可选择使得它们是 $\alpha$ 的光滑函数. 任何一个向量 $x\in\mathbb{R}^2$ 对所有小 $\|\alpha\|$ 现在可表示为

$$x=\xi_1q_1(\alpha)+\xi_2q_2(\alpha),$$

其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$. 可以明确地计算 $\xi$ 的分量

$$\xi_1=\langle p_1(\alpha),x\rangle,\quad \xi_2=\langle p_2(\alpha),x\rangle,$$

其中

$$A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_1(\alpha)=\lambda_1(\alpha)p_1(\alpha),\quad A^{\mathrm{T}}(\alpha)p_2(\alpha)=\lambda_2(\alpha)p_2(\alpha),$$

以及 $\langle p_1(\alpha),q_1(\alpha)\rangle=\langle p_2(\alpha),q_2(\alpha)\rangle=1$. 由于 $\langle p_1(\alpha),q_2(\alpha)\rangle=\langle p_2(\alpha),q_1(\alpha)\rangle=0$, 映射 $f$ 在 $\xi$ 坐标系下取形式

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\sigma_1(\alpha)+\lambda_1(\alpha)\xi_1+S_1(\xi,\alpha)\\ \sigma_2(\alpha)+\lambda_2(\alpha)\xi_2+S_2(\xi,\alpha)\end{pmatrix},\tag{9.103}$$

其中

$$\sigma_k(\alpha)=\langle p_k(\alpha),\gamma(\alpha)\rangle,\quad S_k(\xi,\alpha)=\langle p_k(\alpha),R(\xi_1q_1(\alpha)+\xi_2q_2(\alpha),\alpha)\rangle$$

对 $k=1,2$. 进一步展开 $S_{1,2}(\xi,\alpha)$, 可以将 (9.103) 写为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\sigma_1(\alpha)+\lambda_1(\alpha)\xi_1+\sum\limits_{i+j=2,3}\dfrac{1}{i!j!}g_{ij}(\alpha)\xi_1^i\xi_2^j\\ \sigma_2(\alpha)+\lambda_2(\alpha)\xi_2+\sum\limits_{i+j=2,3}\dfrac{1}{i!j!}h_{ij}(\alpha)\xi_1^i\xi_2^j\end{pmatrix}+O(\|\xi\|^4).\tag{9.104}$$

先考虑对 $\alpha=0$, 当 $\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=0$ 和 $\lambda_1(0)=-\lambda_2(0)=1$ 时的映射 (9.104).

**引理 9.16** (临界规范形) 假设光滑映射 $F_0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 有形式

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\xi_1+\displaystyle\sum_{i+j=2,3}\frac{1}{i!j!}g_{ij}(\alpha)\xi_1^i\xi_2^j\\ -\xi_2+\displaystyle\sum_{i+j=2,3}\frac{1}{i!j!}h_{ij}(\alpha)\xi_1^i\xi_2^j\end{pmatrix}+O(\|\xi\|^4), \tag{9.105}$$

且 $h_{11}\neq 0$. 则可用可逆的光滑的变量变换将 $F_0$ 化为形式

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\eta_1+a(0)\eta_1^2+b(0)\eta_2^2+c(0)\eta_1^3+d(0)\eta_1\eta_2^2\\ -\eta_2+\eta_1\eta_2\end{pmatrix}+O(\|\eta\|^4), \tag{9.106}$$

其中

$$a(0)=\frac{g_{20}}{2h_{11}},\quad b(0)=\frac{1}{2}g_{02}h_{11},\quad c(0)=\frac{1}{6h_{11}^2}\left(g_{30}+\frac{3}{2}g_{11}h_{20}\right), \tag{9.107}$$

$$\begin{aligned}d(0)=&\frac{3g_{02}(h_{02}h_{20}+2h_{21}-2g_{11}h_{20})-g_{20}(3h_{02}^2+2h_{03})}{12h_{11}}-\frac{1}{2}g_{11}^2+\frac{1}{2}g_{12}\\&+\frac{1}{4}g_{11}h_{02}-\frac{1}{2}h_{02}^2-\frac{1}{3}h_{03}.\end{aligned} \tag{9.108}$$

**证明** 第一步 (二次项). 应用坐标的多项式变换

$$\begin{cases}\xi_1=\eta_1+\dfrac{1}{2}G_{20}\eta_1^2+G_{11}\eta_1\eta_2+\dfrac{1}{2}G_{02}\eta_2^2,\\ \xi_2=\eta_2+\dfrac{1}{2}H_{20}\eta_1^2+H_{11}\eta_1\eta_2+\dfrac{1}{2}H_{02}\eta_2^2\end{cases} \tag{9.109}$$

到 (9.105), 得到

$$\eta_1\mapsto\eta_1+\frac{1}{2}g_{20}\eta_1^2+(g_{11}+2G_{11})\eta_1\eta_2+\frac{1}{2}g_{02}\eta_2^2+\cdots,$$

$$\eta_2\mapsto-\eta_2+\frac{1}{2}(h_{20}-2H_{20})\eta_1^2+h_{11}\eta_1\eta_2+\frac{1}{2}(h_{02}-2H_{02})\eta_2^2+\cdots,$$

这里省略号表示高阶项. 令

$$G_{11}=-\frac{1}{2}g_{11},\quad H_{20}=\frac{1}{2}h_{20},\quad H_{02}=\frac{1}{2}h_{02}, \tag{9.110}$$

消去尽可能多的二次项. 剩下的二次项称为**共振项**.

第二步 (三次项). 现在假定第一步已经做了, 因此 (9.105) 中只有共振二次项和所有三次项. 考虑多项式变换

$$\begin{cases}\xi_1=\eta_1+\dfrac{1}{6}G_{30}\eta_1^3+\dfrac{1}{2}G_{21}\eta_1^2\eta_2+\dfrac{1}{2}G_{12}\eta_1\eta_2^2+\dfrac{1}{6}G_{03}\eta_2^3,\\ \xi_2=\eta_2+\dfrac{1}{6}H_{30}\eta_1^3+\dfrac{1}{2}H_{21}\eta_1^2\eta_2+\dfrac{1}{2}H_{12}\eta_1\eta_2^2+\dfrac{1}{6}H_{03}\eta_2^3.\end{cases} \tag{9.111}$$

显然, 这不改变二次项. 经过变换后, 得到

$$\eta_1 \mapsto \eta_1 + \frac{1}{2}g_{20}\eta_1^2 + \frac{1}{2}g_{02}\eta_2^2 + \frac{1}{6}g_{30}\eta_1^3 + \frac{1}{2}(g_{21}+2G_{21})\eta_1^2\eta_2 + \frac{1}{2}g_{12}\eta_1\eta_2^2 + \frac{1}{6}(g_{03}+2G_{03})\eta_2^3 + \cdots$$

和

$$\eta_2 \mapsto -\eta_2 + h_{11}\eta_1\eta_2 + \frac{1}{6}(h_{30}-2H_{30})\eta_1^3 + \frac{1}{2}h_{21}\eta_1^2\eta_2 + \frac{1}{2}(h_{12}-2H_{12})\eta_1\eta_2^2 + \frac{1}{6}h_{03}\eta_2^3 + \cdots,$$

令

$$G_{21} = -\frac{1}{2}g_{21}, \quad G_{30} = -\frac{1}{2}g_{03}, \quad H_{30} = \frac{1}{2}h_{30}, \quad H_{12} = \frac{1}{2}h_{12},$$

消去四个三次项, 剩下的三次项也称为共振项. 用 (9.111) 改变不了它们.

第三步 (超–标准化). (9.109) 的系数 $H_{11}, G_{20}$ 和 $G_{02}$ 不影响 (9.105) 的二次项但改变了它的三次项. 在计算变换映射的三次项时考虑到 (9.110), 得到

$$\eta_1 \mapsto \eta_1 + \frac{1}{2}g_{20}\eta_1^2 + \frac{1}{2}g_{02}\eta_2^2 + \frac{1}{6}\left(g_{30} + \frac{3}{2}g_{11}h_{20}\right)\eta_1^3 + \frac{1}{2}\left(2g_{02}H_{11} - g_{02}G_{20} + (g_{20}+2h_{11})G_{02} + \frac{1}{2}g_{11}h_{02} + g_{12} - g_{11}^2\right)\eta_1\eta_2^2 + \cdots$$

和

$$\eta_2 \mapsto -\eta_2 + h_{11}\eta_1\eta_2 + \frac{1}{2}\left(g_{20}H_{11} + h_{11}G_{20} - g_{11}h_{20} + \frac{1}{2}h_{02}h_{20} + h_{21}\right)\eta_1^2\eta_2 + \frac{1}{6}\left(3g_{02}H_{11} + 3G_{02}h_{11} + h_{03} + \frac{3}{2}h_{02}^2\right)\eta_2^3 + \cdots,$$

这里仅仅显示共振三次项. 因此可以尝试选取 $H_{11}, G_{20}$ 和 $G_{02}$ 以消去已经被改变的三项. 这要求解一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2g_{02} & -g_{02} & 2h_{11}+g_{20} \\ g_{20} & h_{11} & 0 \\ 3g_{02} & 0 & 3h_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} \\ G_{20} \\ G_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g_{11}h_{02} - g_{12} + g_{11}^2 \\ g_{11}h_{20} - \frac{1}{2}h_{02}h_{20} - h_{21} \\ -h_{03} - \frac{3}{2}h_{02}^2 \end{pmatrix}.$$

它的矩阵的行列式为零. 但是, 利用非退化条件 $h_{11} \neq 0$, 可以消去规范形第二个分量中的共振三次项. 因此, 令

$$H_{11} = 0, \tag{9.112}$$

并从上面的线性方程组得到

$$G_{02} = -\frac{1}{h_{11}}\left(\frac{1}{3}h_{03} + \frac{1}{2}h_{02}^2\right), \quad G_{20} = \frac{1}{h_{11}}\left(g_{11}h_{20} - h_{21} - \frac{1}{2}h_{02}h_{20}\right). \tag{9.113}$$

第四步 (最后的变换). 现在, 用第一步和第三步确定的系数, 利用变换 (9.109) 变换原映射 (9.105). 所得映射中, 含有共振二次项, 非共振三次项以及在映射的第一个分量中只剩下的两个共振三次项. 然后, 从第二步的变换 (9.111) 允许消去所有非共振三次项而不改变所有剩下的二次项和三次共振项. 最后进行线性尺度化

$$\eta_1 \mapsto \frac{\eta_1}{h_{11}}$$

使得第二个分量 $\eta_1\eta_2$ 前面的系数等于 1. 由此得临界规范形系数表达式 (9.107) 和 (9.108). □

**定理 9.4** (依赖于参数的规范形)　考虑依赖于两个参数的平面映射

$$\xi \mapsto F(\xi,\alpha), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

其中 $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 光滑且使得

(F.1) $F_0 : \xi \mapsto F_0(\xi) = F(\xi,0)$ 满足引理 9.16 的假设;

(F.2) 由

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto T(\xi,\alpha) = \begin{pmatrix} F(\xi,\alpha)-\xi \\ \det F_\xi(\xi,\alpha)+1 \\ \operatorname{tr} F_\xi(\xi,\alpha) \end{pmatrix} \tag{9.114}$$

定义的映射 $T:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 在 $(\xi,\alpha)=(0,0)$ 正则.

则对所有充分小 $\|\alpha\|$, $F$ 可经光滑依赖于参数的变量的光滑可逆变换以及光滑可逆的参数变换变成形式

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 + (1+\beta_2)\eta_1 + a(\beta)\eta_1^2 + b(\beta)\eta_2^2 + c(\beta)\eta_1^3 + d(\beta)\eta_1\eta_2^2 \\ -\eta_2 + \eta_1\eta_2 \end{pmatrix} + O(\|\eta\|^4), \tag{9.115}$$

其中所有的系数都是 $\beta$ 的光滑函数, 它们在 $\beta_1=\beta_2=0$ 的值由 (9.107) 和 (9.108) 给出.

**证明**　用光滑依赖于参数的光滑坐标变换将 (9.104) 代入 (9.115). 考虑变量变换

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \varepsilon_0(\alpha) + \varepsilon_1(\alpha)\eta_2 + \frac{1}{2}G_{20}(\alpha)\eta_1^2 + G_{11}(\alpha)\eta_1\eta_2 + \frac{1}{2}G_{02}(\alpha)\eta_2^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}G_{21}(\alpha)\eta_1^2\eta_2 + \frac{1}{6}G_{03}(\alpha)\eta_2^3, \\ \xi_2 = \eta_2 + \delta_0(\alpha) + \delta_1(\alpha)\eta_1 + \frac{1}{2}H_{20}(\alpha)\eta_1^2 + \frac{1}{2}H_{02}(\alpha)\eta_2^2 \\ \qquad + \frac{1}{6}H_{30}(\alpha)\eta_2^3 + \frac{1}{2}H_{12}(\alpha)\eta_1\eta_2^2, \end{cases} \tag{9.116}$$

其中所有的系数现在都还是 $\alpha$ 的未知光滑函数, 对 $i=0,1$ 使得 $\varepsilon_i(0)=\delta_i(0)=0$. 显然, 对 $\alpha=0$, (9.116) 化为引理 9.16 证明中的第四步最后尺度化前引入的变换.

现在要求 (9.104) 在 $\eta$ 坐标系下的 Taylor 展开取形式

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1(\alpha) + (1+\mu_2(\alpha))\eta_1 \\ -\eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\alpha)\eta_1^2 + B(\alpha)\eta_2^2 + C(\alpha)\eta_1^3 + D(\alpha)\eta_1\eta_2^2 \\ E(\alpha)\eta_1\eta_2 \end{pmatrix} + O(\|\eta\|^4),$$

其中 $\mu_1(0)=\mu_2(0)=0$. 在经所有这些变换后, 要求化为求解代数方程组

$$Q_\alpha(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\delta_0,\delta_1,\beta_1,\beta_2,G_{20},G_{11},G_{02},G_{21},G_{03},H_{20},H_{02},H_{30},H_{12},A,B,C,D,E)=0,$$

其中 $Q_\alpha : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{20}$ 是由对应 Taylor 系数相等得到的方程. 这个系统在 $\alpha=0$ 的 Jacobi 矩阵 $J$, 当

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1=\delta_0=\delta_1=\beta_1=\beta_2=0$$

时有 $\det(J) = -147456h_{11}^3 \neq 0$. 因此, 隐函数定理保证变换 (9.116) 的系数作为 $\alpha$ 的函数局部存在且光滑.

尺度化

$$x_1 \mapsto \frac{x_1}{E(\alpha)}, \quad \beta_1 \mapsto \frac{\beta_1}{E(\alpha)},$$

给出最后的 (9.115), 其中 $E(\alpha) = h_{11}(0) + O(\|\alpha\|)$. 显然, 临界系数与引理 (9.115) 中的相同.

此外, 可以证明

$$\det\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{4h_{11}(0)} \det\left(\frac{\partial T}{\partial(\eta,\alpha)}\right)\Big|_{\eta=\alpha=0},$$

这里 $T$ 是在 $(\eta,\alpha)$ 坐标下的映射 (9.114), 即映射 (9.104). 因此, 如果 $h_{11}(0)\neq 0$, (9.114) 在原点的正则性等价于映射 $\alpha \mapsto \beta$ 的正则性, 故可以用 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 作为新参数. □

在 (9.115) 抛弃 $O(||\eta||^4)$ 项得截断规范形

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 + (1+\beta_2)x_1 + a(\beta)x_1^2 + b(\beta)x_2^2 + c(\beta)x_1^3 + d(\beta)x_1x_2^2 \\ -x_2 + x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad (9.117)$$

其中 $(x_1, x_2)$ 再次用于代替 $(\eta_1, \eta_2)$. 用 $x \mapsto N_\beta(x)$ 记这个映射, 我们看到

$$RN_\beta(x) = N_\beta(Rx),$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R^2 = I_2. \quad (9.118)$$

由此得知 (9.117) 的相图在关于 $x_1$ 轴反射作用下不变.

记规范形系数的临界值为

$$a_0 = a(0), \quad b_0 = b(0), \quad c_0 = c(0), \quad d_0 = d(0).$$

为了研究 (9.117) 的分支, 我们将用流近似这个映射. 如同对强共振 1:2 的研究, 可以考虑二次迭代 $N_\beta^2$, 并用沿着平面连续–时间系统轨道的单位–时间移位来近似它. 但是, 比较方便的是找流近似 $N_\beta$ 和反射 $x \mapsto Rx$ 的复合映射, 其中 $R$ 是由 (9.118) 定义的矩阵.

**定理 9.5**　截断规范形 (9.117) 满足

$$RB_\beta(x) = \varphi_\beta^1(x) + O(||\beta||^2) + O(||x||^2||\beta||) + O(||x||^4), \quad (9.119)$$

其中 $\varphi_\beta^t$ 是平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta_1 + (-a_0\beta_1 + \beta_2)x_1 + a_0x_1^2 + b_0x_2^2 + d_1x_1^3 + d_2x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{2}\beta_1x_2 - x_1x_2 + d_3x_1^2x_2 + d_4x_2^3 \end{cases} \quad (9.120)$$

的流, 这里

$$d_1 = c_0 - a_0^2, \quad d_2 = d_0 - a_0b_0 + b_0, \quad d_3 = \frac{1}{2}(a_0 - 1), \quad d_4 = \frac{1}{2}b_0.$$

**证明**　如同分析 1:1 共振, 将 $\varphi_\beta^t$ 构造为流

$$X \mapsto \phi^t(X) = \begin{pmatrix} \varphi_\beta^t(x) \\ \beta \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

的前面两个分量. 这个流是由把参数看作为常数变量的四维系统

$$\dot{X} = Y(X) = JX + Y_2(X) + Y_3(X) + \cdots, \quad X \in \mathbb{R}^4 \quad (9.121)$$

生成. 这里

$$J=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad Y_k(X)=\begin{pmatrix}Z_k(x)\\0\end{pmatrix},$$

其中每一个 $Z_k$ 是 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的具有未知系数的 $k$ 次齐次多项式函数. 定义

$$M(X)=\begin{pmatrix}N_\beta(x)\\\beta\end{pmatrix},$$

并引入 $4\times 4$ 分块对角矩阵

$$S=\begin{pmatrix}R&0\\0&I_2\end{pmatrix},$$

其中 $R$ 是由 (9.118) 给出. 现在求使得 $S(X)=\phi^1(X)+O(\|X\|^4)$ 的向量场 $Y$.

为了寻求向量场 $Y$ 的明显表达式, 对 (9.121) 作三次 Picard 迭代, 从令 $X^{(1)}(t)=\mathrm{e}^{Jt}X$ 开始, 于是, 显然 $SM(X)$ 的线性部分与 $X^{(1)}(1)$ 重合.

由于我们应该看出 Picard 的第二次迭代 $X^{(2)}(t)$ 的结果, 可令 $Y_2$ 的某些系数等于零:

$$Y_2=\begin{pmatrix}A_{10}\beta_1x_1+A_{01}\beta_2x_1+\frac{1}{2}A_{20}x_1^2+\frac{1}{2}A_{02}x_2^2\\B_{11}x_1x_2+B_{10}\beta_1x_2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}X^{(2)}(t)=&\mathrm{e}^{Jt}X+\int_0^t\mathrm{e}^{J(t-\tau)}Y_2(X^{(1)}(\tau))\mathrm{d}\tau\\=&\begin{pmatrix}x_1+t\beta_1\\x_2\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(A_{10}t+\frac{1}{2}A_{20}t^2\right)\beta_1x_1+A_{01}\beta_2x_1t+\frac{1}{2}A_{20}x_1^2t+\frac{1}{2}A_{02}x_2^2t\\B_{11}x_1x_2t+\left(\frac{1}{2}B_{11}t^2+B_{10}t\right)\beta_1x_2\\0\\0\end{pmatrix}\\&+O(\|\beta\|^2).\end{aligned}$$

比较 $SM(X)$ 和 $X^{(2)}(1)$ 的二次项, 得到

$$A_{10}=-a_0,\quad A_{20}=2a_0,\quad A_{01}=1,\quad A_{02}=2b_0,\quad B_{10}=\frac{1}{2},\quad B_{11}=-1.$$

注意, 对三次部分, 我们只对 $x$ 的三次项感兴趣. 因此令

$$Y_3 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j=3} \frac{1}{i!j!} A_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{i+j=3} \frac{1}{i!j!} B_{ij} x_1^i x_2^j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{aligned} X^{(3)}(1) &= \mathrm{e}^J X + \int_0^1 \mathrm{e}^{J(1-\tau)} \left[ Y_2(X^{(2)}(\tau)) + Y_3(X^2(\tau)) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + \beta_1 + \beta_2 x_1 + a_0 x_1^2 + b_0 x_2^2 \\ x_2 - x_1 x_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}A_{30} + a_0^2\right) x_1^3 + \frac{1}{2}A_{21}x_1^2x_2 + \left(a_0b_0 - b_0 + \frac{1}{2}A_{12}\right) x_1x_2^2 + \frac{1}{6}A_{03}x_2^3 \\ \frac{1}{6}B_{30}x_1^3 + \frac{1}{2}(-a_0 + 1 + B_{21})x_1^2x_2 + \frac{1}{2}B_{12}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}B_{03} - b_0\right) x_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + O(\|\beta\|^2) + O(\|x\|^2\|\beta\|). \end{aligned}$$

比较 $SM(X)$ 和 $X^{(3)}(1)$ 的三次项, 求得 $Y_3$ 的系数

$$\begin{gathered} A_{30} = 6(c_0 - a_0^2), \quad A_{21} = 0, \quad A_{12} = 2(d_0 - a_0b_0 + b_0), \quad A_{03} = 0, \\ B_{30} = 0, \quad B_{21} = a_0 - 1, \quad B_{12} = 0, \quad B_{03} = 3b_0. \end{gathered}$$

这给出 (9.120). □

下面对小的参数值在原点的小邻域内描述近似系统 (9.120) 的分支 (见图 9.25~图 9.28). 这个分支图类似于第 8 章已经研究过的截断振幅系统 (8.82) 的折 Hopf 分支. 由于变换 $x_2 \mapsto -x_2$, 令 (9.120) 不变, 它的相图关于 $x_1$ 轴对称, 我们只画了它们的上半部分.

在所有情形, 系统对 $x_2 \geqslant 0$ 有不多于 3 个平衡点. 如果

(FF.1) $a_0 \neq 0$,

则满足 $x_2 = 0$ 的两个平凡平衡点由于非退化折分支出现在曲线

$$F = \left\{(\beta, \beta_2) : \beta_1 = \frac{\beta_2^2}{4a_0} + o(\beta_2^2)\right\}$$

上. 曲线 $F$ 有两条分别对应于 $\beta_2 > 0$ 和 $\beta_2 < 0$ 的分枝 $F_+$ 和 $F_-$. 只要

(FF.2) $b_0 \neq 0$,

两个平凡平衡点之一沿着产生 $x_2 > 0$ 的非平凡平衡点的直线

$$P = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

产生非退化叉分支. 此外, 当 $b_0 > 0$, 非平凡平衡点在分支曲线

$$NS = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = \frac{(2b_0 + d_0)}{b_0}\beta_1 + o(\beta_1), \beta_1 < 0\right\}$$

上具有 Hopf 分支. 可以验证, 对应的第一个 Lyapunov 系数

$$l_1 = c_{NS}C_+ + o(\beta_1),$$

其中 $C_+ > 0$, 且

$$c_{NS} = 3b_0c_0 - a_0(2a_0b_0 + 3b_0 + d_0). \tag{9.122}$$

因此, 若

(FF.3) $3b_0c_0 - a_0(2a_0b_0 + 3b_0 + d_0) \neq 0$,

则 Hopf 分支是非退化的并产生单个极限环.

若 $a_0$ 和 $b_0$ 都是正的, 则 (9.120) 的两个平凡平衡点都是鞍点, 它们永远沿着 $x_1$ 轴由异宿轨道连接. 当参数属于曲线

$$J = \left\{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = \frac{2a_0(a_0b_0 + a_0d_0 + d_0) + 3b_0(a_0 + c_0)}{b_0a_0(3 + 2a_0)}\beta_1 + o(\beta_1), \beta_1 < 0\right\} \tag{9.123}$$

时存在另外的异宿连接.

对截断规范形映射 (9.117) 这些结果意味着什么? 映射的轨道从下半平面跳到上半平面然后返回. 这可从 (9.119) 容易理解, 由此得知, (9.115) 是由沿着 (9.120) 的轨道单位–时间移位 $\varphi_\beta^1$ 和反射 (跳跃)$R$ 合成的近似. 注意, 单位移位仅仅给出与 $R$ 合成的截断规范形的近似. 但是, 如通常, (9.120) 的平凡平衡点对应于 (9.117) 的不动点. 非平凡平衡点对应于映射的周期 2 环, (9.117) 的极限环对应于闭不变曲线或者附近存在的更复杂的不变集. 平凡平衡点的折分支引起 $x_1$ 轴上不动点的折分支, 叉分支变成不动点的倍周期 (翻转) 分支, 以及非平凡平衡点的 Hopf 分支,

它保证周期 2 环的 Neimark-Sacker 分支. 可以证明, 对应的分支曲线如对平衡点分支有相同的渐近表达式. 此外, 在相同条件下分支是非退化的. (9.120) 的 $J$ 曲线的出现得知对映射 (9.117) 存在两条曲线, 沿着它们出现异宿切触 (见图 9.24 中的曲线 $h_{1,2}$). 这两条曲线之间存在异宿结构.

图 9.24　出现在直线 $h_{1,2}$ 上的异宿切触以及它们之间的横截异宿结构

现在围绕 $(\mu_1, \mu_2)$ 平面的原点讨论截断规范形映射 (9.117) 的分支. 有四种情形, 前面两个情形又有两个子情形. 它们由 $a_0, b_0$ 和 $c_{NS}$ 的符号所确定.

情形 1 $(a_0 > 0, b_0 > 0)$. 在区域 1 (图 9.25) 轨道只不过跳向右边. 穿过 $F_+$ 导致在水平轴上出现两个不动点. 在区域 2 这两个不动点之一是完全不稳定, 另一个是鞍点. 当从 2 到 3 穿过曲线 $P_+$ 时不稳定不动点变成鞍点, 并出现不稳定周期 2 环. 如果 $c_{NS} > 0$, 当从 3 到 4+ 时, 由于在 $NS_+$ 上 Neimark-Sacker 分支出现 "绕

图 9.25　情形 1 $(a_0 > 0, b_0 > 0)$

着" 周期 2 环的不稳定不变曲线. 如果进入 5, 在通过 $J_+$ 附近与异宿分支相应的一系列分支时不变曲线消失. 如果 $c_{NS} < 0$, 通过与异宿结构相应的一系列分支时稳定闭不变曲线呈现在 $4_-$. 这个稳定的不变曲线一直存在到穿过 $NS_-$, 在那里稳定周期 2 环变成在 5 中的吸引点. 接下来穿过 $P_-$, 周期 2 环消失, 留下的是在 6 中的稳定不动点和鞍点. 当回到 1 时, 这两个点重合.

情形 2 ($a_0 < 0, b_0 > 0$). 固定一个在原点附近的相区域. 现在从区域 1 的水平轴开始, 在轴上有两个不动点, 一个稳定, 一个不稳定 (图 9.26). 然后穿过翻转曲线 $P_+$ 进入 2, 出现一个具有倍周期的不动点, 和周期 2 环. 水平轴上的不动点在曲线 $F_+$ 上重合, 这条曲线分开区域 2 和 3, 在上存在稳定的周期 2 环. 若 $c_{NS} > 0$, 则当穿过 Neimark-Sacker 分支曲线 $NS_+$ 时出现不稳定不变曲线. 这条不变曲线不断增大, 直到它到我们选择的固定相区域的某条曲线 $B_+$ 处破裂而消失. 事实上, 不变曲线在碰到这个区域的边界前就可失去它的光滑性而消失. 若 $c_{NS} < 0$, 则第一个遇到 "边界分支" 曲线 $B_-$, 那里一个大的稳定不变曲线出现在我们的固定相区域. 从 $4_-$ 到 5 转移时由于 Neimark-Sacker 分支这条曲线遭到了破坏. 最后穿过折曲线 $F_-$ 在 6 中产生两个不动点, 在 $P_-$ 通过翻转分支周期 2 环再次消失, 回到区域 1.

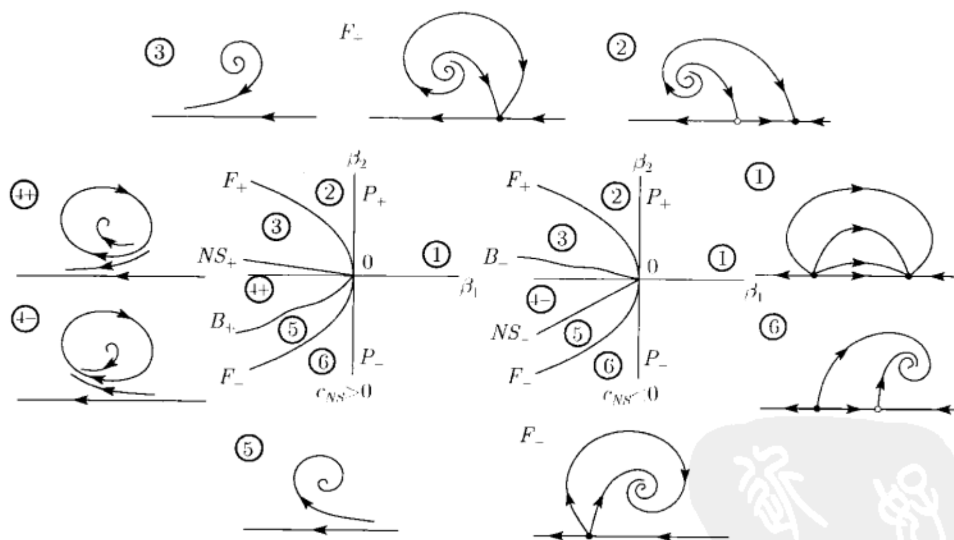



图 9.26　情形 2 ($a_0 < 0, b_0 > 0$)

情形 3 ($a_0 > 0, b_0 < 0$). 从区域 1 具有周期 2 鞍点环开始 (图 9.27), 通过折曲线 $F_+$ 进入 2, 在水平轴上产生两个不动点, 一个是鞍点, 一个是排斥的. 然后, 当穿过翻转曲线 $P_+$ 进入 3 时, 周期 2 环破裂, 得到 $x_1$ 轴上的两个鞍点. 通过 $P_-$ 进入 4 时, 一个鞍点变成稳定点, 并产生周期 2 环. 最后, 在水平轴上的不动点在 $F_-$ 上重合, 又在区域 1 了.

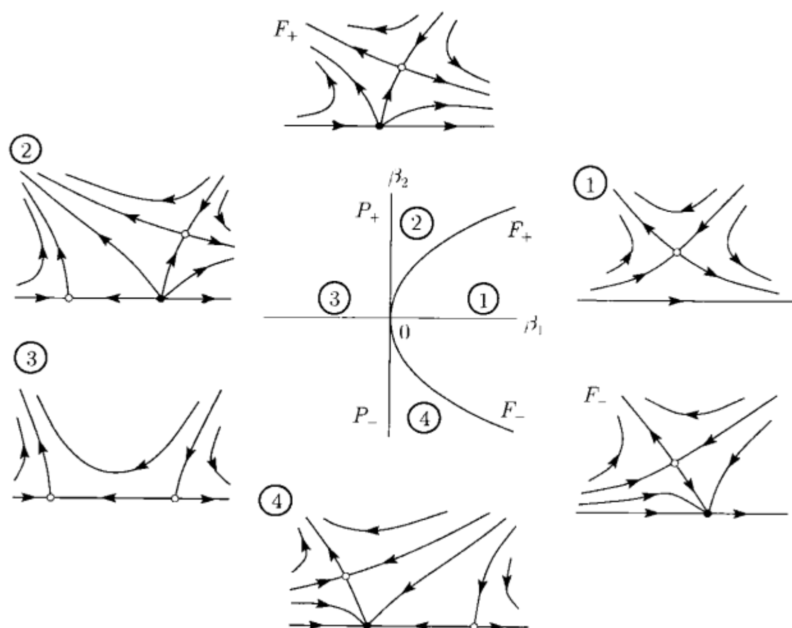



图 9.27　情形 3 ($a_0 > 0, b_0 < 0$)

情形 4 ($a_0 < 0, b_0 < 0$). 从区域 1 开始 (图 9.28), 如同情形 3, 有周期 2 鞍点环, 但也稳定, 以及在 $x_1$ 轴上不稳定不动点. 当通过 $P_+$ 曲线进入 2 时不稳定点变成鞍点. 然后在区域 3, 鞍点和稳定点在 $F_+$ 上重合以后除了 "像鞍点的流" 没有特别的现象出现. 从 3 进入 4 当通过在 $F_-$ 上的折分支时得到鞍点和一个不稳定点. 在 $P_-$ 上时由翻转分支产生周期 2 环, 也就回到 1.

图像给出了截断规范形 (9.117) 的分支比较详细地描述, 但是, 这些描述是不完全的, 因为出现闭不变曲线和异宿切触.

事实上, 在闭不变曲线上的旋转数可无穷多次从有理数变到无理数, 此外, 不变曲线可以失去光滑性而消失. 在异宿切触附近会发生分支的无穷序列, 包括翻转瀑布和折分支.

在截断规范形 (9.117) 中加入高阶项, 即恢复到 (9.115), 分支图像更加复杂. 可以证明, 对充分小 $\|\beta\|$, 映射 (9.115) 与有相同渐近性的任意高阶项的 (9.117) 有相同的不动点分支和周期 2 环. 因此, 我们知道局部地能够期望什么. 特别, 在情形 1 和 2 出现闭不变曲线. 此外, 沿着向量场 (9.120) 轨道的单位移位和反射的合成近似 (9.115), 实际上相当于近似 (9.117). 这导致在情形 1, (9.115) 有两条分支曲线, 沿着它们出现异宿切触. 在这些曲线之间出现异宿结构. 一般地 (9.115) 中的高阶项影响这些曲线, 但它们仍保留切于曲线 (9.123).

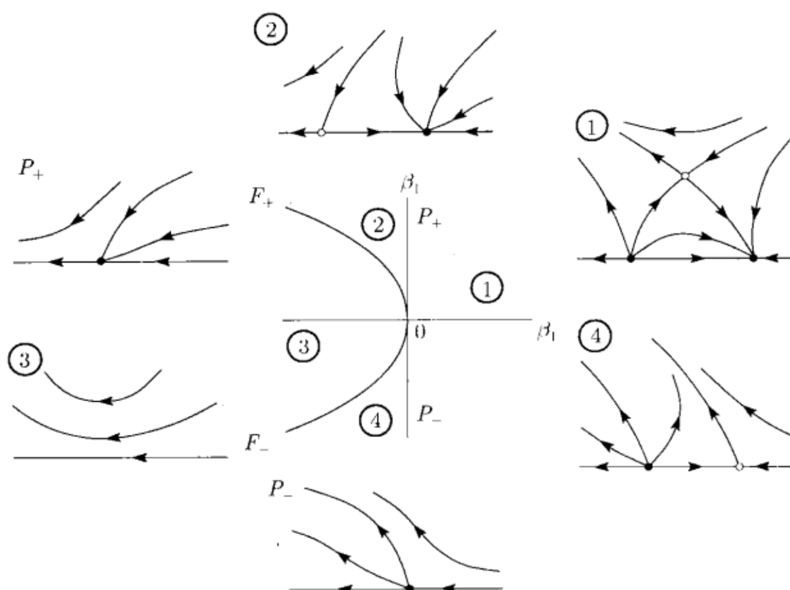



图 9.28　情形 4 ($a_0 < 0, b_0 < 0$)

(9.117) 和一般的 (9.115) 相图之间存在着许多差异. 这与其他异宿切触有关. 例如, 在截断规范形 (9.117) 中, $x_1$ 轴永远是不变的. 因此, 在情形 1 和 3 有位于水平轴上鞍点之间的异宿连接. 但是, 一般地, (9.115) 中的高阶项破坏了反射对称, 沿着 $x_1$ 轴的异宿连接失去. 对异宿结构允许这种情况发生是由于在水平轴附近鞍点的不变流形的相交性. 这种相交性或者是横截的 (图 9.29) 或者是相切的. 因此, 在前面三种情形 (9.117) 的分支图与一般 (9.115) 的不局部拓扑等价.

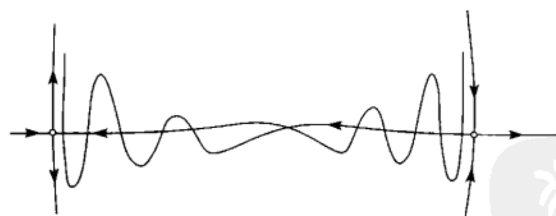


图 9.29　在水平轴附近的一个横截异宿结构

## 9.7　$n$ 维映射的临界规范形

为了将不动点的余维 2 分支理论应用到具体映射, 还需要在分支点验证非退化条件, 即要计算在中心流形上临界规范形到某一阶的系数. 这些系数可以用先计算中心流形的 Taylor 展开, 再计算对应的规范形系数来求得. 在不动点余维 1 分

支这些系数的明显公式 (5.46), (5.49) 和 (5.54) 在第 5 章已找到. 对于余维 2 分支这个方法不切实际.

这一节, 用类似于对 ODEs 的平衡点余维 2 分支用过的交替 “结合” 标准化技巧来推导中心流形上临界规范形系数. 考虑具至多两个临界乘子的不动点的所有余维 2 分支. 因此, 9.1 节中所列出的除了情形 (9)~(11) 的所有情形都包括了.

下面用的标准化方法非常类似于 8.7 节. 假设光滑映射

$$x \mapsto F(x), \quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

有非双曲不动点 $x=0$, 且限制在中心流形上的这个映射已经变换成规范形

$$\omega \mapsto G(\omega), \quad G: \mathbb{R}^{n_c} \mapsto \mathbb{R}^{n_c},$$

其中 $n_c$ 是临界乘子的数目 (计算重次), 或者等价地, 是中心流形的维数. 局部地, 中心流形可用 $w \in \mathbb{R}^{n_c}$ 参数化:

$$x = H(\omega), \quad H: \mathbb{R}^{n_c} \to \mathbb{R}^n.$$

由于中心流形是不变的, 我们有下面满足

$$H(G(\omega)) = F(H(\omega)) \tag{9.124}$$

的 $H$ 的同调方程. 如同 8.7 节, $G$ 和 $H$ 的 Taylor 系数可从 (9.124) 用迭代方法找到. 事实上, $H$ 的 Taylor 展开式同时确定了中心流形的展开, 在上面的标准化变换, 以及所得规范形的系数. 所得公式仅包含 Jacobi 矩阵和它的转置的临界特征向量, 以及映射 $F$ 在临界不动点按原来基的 Taylor 展开式 (8.118). 同样的 “加边技巧” 将用来解如 8.7 节的奇异线性方程组.

### 9.7.1　尖分支

在这一情形只存在一个临界乘子 $+1$, 以及 (9.6) 中的系数 $b$ 为零. 这种分支 (参看 9.2 节) 的临界规范形可写为

$$w \mapsto w + cw^3 + O(w^4),$$

其中 $w \in \mathbb{R}^1$ 是沿着一维中心流形

$$H(w) = wq + \frac{1}{2}h_2 w^2 + \frac{1}{6}h_3 w^3 + O(w^4)$$

的局部坐标. 这里 $h_i \in \mathbb{R}^n$, 且

$$Aq = q.$$

我们也引入满足

$$A^{\mathrm{T}}p = p, \quad \langle p, q\rangle = 1$$

的伴随特征向量. 合并 (9.124) 中的 $w^2$ 项, 得到方程

$$(A - I_n)h_2 = -B(q, q).$$

由于左边的矩阵是奇异的, 但是右边的由于 (5.46) 而满足 Fredholm 可解性条件 $\langle p, B(q,q)\rangle = 0$, 用加边技巧来求满足 $\langle p, h_2\rangle = 0$ 的唯一解 $h_2 \in \mathbb{R}^n$, 将它记为 $h_2 = -(A - I_n)^{\mathrm{INV}}B(q,q)$. 接下来继续考虑三次项, 得

$$(A - I_n)h_3 = 6cq - C(q,q,q) - 3B(q, h_2).$$

这是另一个奇异线性系统. 用 Fredholm 可解性条件和 $q$ 关于 $p$ 的标准化, 可以将临界系数 $c$ 表为

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q,q,q) - 3B(q, (A - I_n)^{\mathrm{INV}}B(q,q))\rangle. \tag{9.125}$$

这个表达式与第 5 章得到的 (5.47) 一样.

### 9.7.2　广义翻转分支

在这一情形只有一个临界乘子 $-1$, 以及 (9.7) 中的系数 $c$, 它由 (5.49) 给出且为零. 临界规范形是

$$w \mapsto -w + dw^5 + O(w^6),$$

其中 $w \in \mathbb{R}^1$ 是沿着一维中心流形适当选择的局部坐标 (见 9.3). 中心流形由

$$H(w) = wq + \frac{1}{2}h_2w^2 + \frac{1}{6}h_3w^3 + \frac{1}{24}h_4w^4 + \frac{1}{120}h_5w^5 + O(w^6)$$

确定, 其中 $h_i \in \mathbb{R}^n$, 且

$$Aq = -q.$$

可以求满足

$$A^{\mathrm{T}}p = -p, \quad \langle p, q\rangle = 1$$

的伴随特征向量 $p$. 合并 (9.124) 中的 $w^2$ 项, 得到

$$(A - I_n)h_2 = -B(q, q), \tag{9.126}$$

这是一个非奇异线性系统, 它有唯一解 $h_2$. 对 $w^3$ 项继续进行得

$$(A + I_n)h_3 = -C(q,q,q) - 3B(q, h_2). \tag{9.127}$$

这是一个可解的奇异系统, 因为由于 (5.49), 在广义翻转分支上,

$$\langle p, C(q,q,q) + 3B(q,h_2)\rangle = 0.$$

假设 $h_3$ 是 (9.127) 满足 $\langle p, h_3\rangle = 0$ 的唯一解. (9.124) 中的四次项给出

$$(A - I_n)h_4 = -(4B(q,h_3) + 3B(h_2,h_2) + 6C(q,q,h_2) + D(q,q,q,q)). \tag{9.128}$$

这是一个非奇异系统, 因此可解出 $h_4$. 最后, 临界系数 $d$ 出现在五次项

$$\begin{aligned}(A + I_n)h_5 =& 120dq - (5B(q,h_4) + 10B(h_2,h_3) + 10C(q,q,h_3)\\ &+ 15C(q,h_2,h_2) + 10D(q,q,q,h_2) + E(q,q,q,q,q)).\end{aligned}$$

由这个奇异系统的可解性得

$$\begin{aligned}d =& \frac{1}{120}\langle p, 5B(q,h_4) + 10B(h_2,h_3) + 10C(q,q,h_3)\\ &+ 15C(q,h_2,h_2) + 10D(q,q,q,h_2) + E(q,q,q,q,q)\rangle.\end{aligned}$$

在这个公式中, 向量 $h_2, h_3$ 和 $h_4$ 分别是线性系统 (9.126)~(9.128) 的解.

### 9.7.3 Chenciner 分支

这个分支出现在有一对满足 $|\mu_{1,2}| = 1$ 的复乘子以及 (9.8) 中系数 $d_1$ 的实部 $d$ 为零的情形. 还假定此外没有其他临界乘子, 且

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0} \neq 1, \quad 对\ k = 1,2,3,4,5,6.$$

临界规范形 (9.20) 可以写为

$$w \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}w + c_1 w|w|^2 + c_2 w|w|^4 + O(|w|^6),$$

其中 $w \in \mathbb{C}^1$ 是中心流形上适当的局部复坐标. 在 Chenciner 点, 第一个 Lyapunov 系数 $l_1 = \mathrm{Re}\, d_1$ 为零, 其中 $d_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}c_1$. 选择复特征向量满足

$$\begin{aligned}&Aq = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}q, \quad A\bar{q} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}\bar{q},\\ &A^{\mathrm{T}}p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}p, \quad A^{\mathrm{T}}\bar{p} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\bar{p},\end{aligned}$$

且使得 $\langle p, q\rangle = 1$. 现在中心流形的参数化由

$$H(w,\bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{1\leqslant j+k\leqslant 5} \frac{1}{j!k!}h_{jk}w^j\bar{w}^k + O(|w|^6)$$

定义, 其中 $h_{jk} \in \mathbb{C}^n, h_{kj} = \bar{h}_{kj}$.

合并 (9.124) 中满足 $j+k=2$ 的 $w^j\bar{w}^k$ 项, 得到下面的非奇异线性系统

$$
\begin{aligned}
(A-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{20}&=-B(q,q),\\
(A-I_n)h_{11}&=-B(q,\bar{q}),\\
(A-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}I_n)h_{02}&=-B(\bar{q},\bar{q}).
\end{aligned}
$$

合并 (9.124) 中满足 $j+k=3$ 的 $w^j\bar{w}^k$ 项得

$$(A-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{30}=-C(q,q,q)-3B(q,h_{20}), \tag{9.129}$$

$$(A-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{21}=2c_1q-C(q,q,\bar{q})-B(\bar{q},h_{20})-2B(\bar{q},h_{11}), \tag{9.130}$$

$$(A-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{12}=2\bar{c}_1\bar{q}-C(q,\bar{q},\bar{q})-B(q,h_{02})-2B(\bar{q},h_{11}), \tag{9.131}$$

$$(A-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}I_n)h_{03}=-C(\bar{q},\bar{q},\bar{q})-3B(\bar{q},h_{02}). \tag{9.132}$$

线性系统 (9.129) 和 (9.132) 是复共轭且非奇异. 系统 (9.130) 和 (9.131) 也是复共轭但是奇异的. 作为中间结果, 从 (9.130) 的可解性得表达式

$$c_1=\frac{1}{2}\langle p,C(q,q,\bar{q})-B(\bar{q},(A-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n)^{-1}B(q,q))-2B(q,(A-I_n)^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle,$$

由此可得第 5 章推导过的公式 (5.54). 用 $c_1$ 这个值再用加边技巧求得 (9.130) 满足 $\langle p,h_{21}\rangle=0$ 的唯一解 $h_{21}$.

满足 $j+k=4$ 的项 $w^j\bar{w}^k$ 得非奇异线性系统

$$
\begin{aligned}
(A-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{40}=&-[D(q,q,q,q)+6C(q,q,h_{20})+3B(h_{20},h_{20})+4B(q,h_{30})],\\
(A-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{31}=&-[D(q,q,q,\bar{q})+3C(q,q,h_{11})+3C(q,\bar{q},h_{20})+3B(q,h_{21})\\
&+3B(h_{11},h_{20})+B(\bar{q},h_{30})]+6c_1h_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0},\\
(A-I_n)h_{22}=&-[D(q,q,\bar{q},\bar{q})+C(q,q,h_{02})+C(\bar{q},\bar{q},h_{02})+4C(q,\bar{q},h_{11})\\
&+B(h_{20},h_{02})+2B(h_{11},h_{11})+2B(q,h_{12})+2B(\bar{q},h_{11})]\\
&+4h_{11}(c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}+\bar{c}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}),\\
(A-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{13}=&-[D(q,\bar{q},\bar{q},\bar{q})+3C(\bar{q},\bar{q},h_{11})+3C(q,\bar{q},h_{02})+3B(\bar{q},h_{12})\\
&+3B(h_{11},h_{02})+B(q,h_{03})]+6\bar{c}_1h_{02}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0},\\
(A-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{04}=&-[D(\bar{q},\bar{q},\bar{q},\bar{q})+6C(\bar{q},\bar{q},h_{02})+3B(h_{02},h_{02})+4B(\bar{q},h_{03})].
\end{aligned}
$$

(9.124) 中的 $w^3\bar{w}^2$ 项给出奇异系统

$$
\begin{aligned}
(A-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}I_n)h_{32}=&12c_2q-[E(q,q,q,\bar{q},\bar{q})+D(q,q,q,h_{02})+6D(q,q,\bar{q},h_{11})\\
&+3D(q,\bar{q},\bar{q},h_{20})+3C(q,h_{20},h_{02})+6C(q,h_{11},h_{11})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+3C(q,q,h_{12})+6C(q,\bar{q},h_{21})+6C(\bar{q},h_{11},h_{20})\\
&+C(\bar{q},\bar{q},h_{30})+3B(h_{20},h_{12})+6B(h_{11},h_{21})\\
&+3B(q,h_{22})+B(h_{02},h_{30})+2B(\bar{q},h_{31})]\\
&+6h_{21}(2c_1+\bar{c}_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0}).
\end{aligned}
$$

注意, 在 Chenciner 点有 $h_{21}=\bar{h}_{12}, h_{20}=\bar{h}_{02}$ 和 $c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}+\bar{c}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}=0$. 为求 $c_2$, 不需计算向量 $h_{03},h_{40},h_{13},h_{04}$ 和 $h_{32}$. 进一步, 只有对 $h_{21}$ 需要用加边技巧.

最后, 考虑到 $\langle p,h_{21}\rangle=0$, 从 $h_{32}$ 的方程得表达式

$$
\begin{aligned}
c_2=&\frac{1}{12}\langle p,E(q,q,q,\bar{q},\bar{q})+D(q,q,q,h_{02})+6D(q,q,\bar{q},h_{11})+3D(q,\bar{q},\bar{q},h_{20})\\
&+3C(q,h_{20},h_{02})+6C(q,h_{11},h_{11})+3C(q,q,h_{12})+6C(q,\bar{q},h_{21})\\
&+6C(\bar{q},h_{11},h_{20})+C(\bar{q},\bar{q},h_{30})+3B(h_{20},h_{12})+6B(h_{11},h_{21})\\
&+3B(q,h_{22})+B(h_{02},h_{30})+2B(\bar{q},h_{31})\rangle.
\end{aligned}
$$

### 9.7.4　1:1 共振

若两个乘子都等于 1 且没有其他临界乘子存在. 则有 1:1 共振. 对这个分支临界规范形 (9.38) 可以写为

$$
\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} w_0+w_1\\ w_1+aw_0^2+bw_0w_1\end{pmatrix}+O(\|w\|^3),
$$

其中 $w=(w_0,w_1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ 提供二维中心流形适当的局部参数化 (见 9.5.2 节). 可以求 $A$ 的 (广义) 特征向量, 使得

$$
Aq_0=q_0,\quad Aq_1=q_1+q_0,
$$

以及对转置矩阵 $A^{\mathrm{T}}$ 相似的特征向量

$$
A^{\mathrm{T}}p_1=p_1,\quad A^{\mathrm{T}}p_0=p_0+p_1,
$$

使得 $\langle p_0,q_0\rangle=\langle p_1,q_1\rangle=1, \langle p_0,q_1\rangle=\langle p_1,q_0\rangle=0$. 将参数化中心流形函数写为

$$
H(w_0,w_1)=w_0q_0+w_1q_1+\frac{1}{2}h_{20}w_0^2+h_{11}w_0w_1+\frac{1}{2}h_{02}w_1^2+O(\|w\|^3),
$$

其中 $h_{jk}\in\mathbb{R}^n$. 合并 (9.124) 中的二次项, 得奇异线性系统

$$
\begin{aligned}
w_0^2&:(A-I_n)h_{20}=-B(q_0,q_0)+2aq_1,\\
w_0w_1&:(A-I_n)h_{11}=-B(q_0,q_1)+h_{20}+bq_1,
\end{aligned}
$$

$$w_1^2 : (A - I_n)h_{02} = -B(q_1, q_1) + 2h_{11} + h_{20}.$$

这些奇异线性系统的可解性要求它们的右端与 $p_1$ 正交. 由第一个方程立即得

$$a = \frac{1}{2}\langle p_1, B(q_0, q_0)\rangle.$$

考虑到等式 $\langle p_1, h_{20}\rangle = -\langle p_0, B(q_0, q_0)\rangle$, 从第二个方程得到

$$b = \langle p_0, B(q_0, q_0)\rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1)\rangle.$$

如同 8.7.4 节, 适当选取第二个系统的解 $h_{11}$, 使得第三个系统可解.

### 9.7.5　1:2 共振

这里有两个乘子等于 $-1$, 没有其他临界乘子. 临界规范形 (9.61) 可以写为

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -w_0 + w_1 \\ -w_1 + cw_0^3 + dw_0^2 w_1 \end{pmatrix} + O(\|(w_0, w_1)\|^4),$$

其中 $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ 是临界中心流形适当的局部参数化 (见 9.5.3). 首先引入 $A$ 和 $A^{\mathrm{T}}$ 的广义特征向量

$$\begin{aligned} Aq_0 &= -q_0, & Aq_1 &= -q_1 + q_0, \\ A^{\mathrm{T}}p_1 &= -p_1, & A^{\mathrm{T}}p_0 &= -p_0 + p_1, \end{aligned}$$

它们在 1:1 共振满足相同的标准化条件. 中心流形的展开式在这一情形应该包含有三次项

$$H(w_0, w_1) = w_0 q_0 + w_1 q_1 + \sum_{1 \leqslant i+j \leqslant 3} \frac{1}{i!j!} h_{jk} w_0^k w_1^k + O(\|w\|^4),$$

其中 $h_{jk} \in \mathbb{R}^n$. 合并 (9.124) 中的二次项, 得

$$\begin{aligned} w_0^2 &: (A - I_n)h_{20} = -B(q_0, q_0), \\ w_0 w_1 &: (A - I_n)h_{11} = -B(q_0, q_1) - h_{20}, \\ w_1^2 &: (A - I_n)h_{02} = -B(q_1, q_1) + 2h_{11} + h_{20}. \end{aligned}$$

注意, 矩阵 $(A - I_n)$ 是非奇异的, 因为 $A$ 只有两个特征值 $\lambda = -1$ 在单位圆上. 因此可用通常的方法对 $h_{20}, h_{11}$ 和 $h_{02}$ 求解这些方程.

由三次项, 得到方程

$$w_0^3 : (A + I_n)h_{30} = 6cq_1 - 3B(q_0, h_{20}) - C(q_0, q_0, q_0),$$

$$
\begin{aligned}
w_0^2 w_1 &: (A+I_n)h_{21} = 2dq_1 + h_{30} - 2B(q_0,h_{11}) - B(q_1,h_{20}) - C(q_0,q_0,q_1),\\
w_0 w_1^2 &: (A+I_n)h_{12} = 2h_{21} - h_{30} - 2B(q_1,h_{11}) - B(q_0,h_{02}) - C(q_0,q_1,q_1),\\
w_1^3 &: (A+I_n)h_{03} = 3(h_{12}-h_{21}) + h_{30} - 3B(q_1,h_{02}) - C(q_1,q_1,q_1).
\end{aligned}
$$

现在可容易确定临界系数 $c$:

$$
c = \frac{1}{6}\langle p_1, C(q_0,q_0,q_0) + 3B(q_0,(I_n-A)^{-1}B(q_0,q_0))\rangle.
$$

临界系数 $d$ 的方程包含有向量 $h_{30}$. 取关于 $p_1$ 的数量积, 从 $w_0^3$ 项的方程得到 $\langle p_1, h_{30}\rangle = -\langle p_0, 3B(q_0,h_{20}) + C(q_0,q_0,q_0)\rangle$. 于是, 由关于 $h_{21}$ 方程的可解性得知

$$
\begin{aligned}
d =& \frac{1}{2}[\langle p_1, 2B(q_0,h_{11}) + B(q_1,h_{20}) + C(q_0,q_0,q_1)\rangle\\
&+ \langle p_0, 3B(q_0,h_{20}) + C(q_0,q_0,q_0)\rangle].
\end{aligned}
$$

### 9.7.6 1:3 共振

类似于 Chenciner 分支, 对 1:3 共振临界规范形 (9.79) 可以写成复数形式

$$
w \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} w + b\bar{w}^2 + cw|w|^2 + O(|w|^4), \quad \theta = \frac{2\pi}{3},
$$

其中 $w \in \mathbb{C}^1$ 是中心流形上的规范化局部坐标 (见 9.5.4 节). 现在选择复特征向量使得

$$
\begin{aligned}
Aq &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} q, & A\bar{q} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}\bar{q},\\
A^{\mathrm{T}} q &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} p, & A^{\mathrm{T}}\bar{q} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\bar{p}
\end{aligned}
$$

和 $\langle p, q\rangle = 1$. 引入

$$
H(w,\bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{1\leqslant i+j\leqslant 3} \frac{1}{i!j!} h_{jk} w^j \bar{w}^k + O(\|w\|^4),
$$

其中 $h_{jk} \in \mathbb{C}^n, h_{kj} = \bar{h}_{jk}$. 同调方程 (9.124) 的二次部分给出

$$
\begin{aligned}
w^2 &: (A - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_0} I_n) h_{20} = 2\bar{b}\bar{q} - B(q,q),\\
w\bar{w} &: (A - I_n) h_{11} = -B(q,\bar{q}),\\
\bar{w}^2 &: (A - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0} I_n) h_{02} = 2bq - B(\bar{q},\bar{q}).
\end{aligned} \tag{9.133}
$$

首先, 注意第一个和第三个方程是共轭的, 所以 $\bar{h}_{20} = h_{02}$. 其次, 由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ 是 $A$ 的特征值, 有奇异性, 故 $h_{02}$ 应该用加边系统寻找. 如前由可解性条件得知

$$
b = \frac{1}{2}\langle p, B(\bar{q},\bar{q})\rangle. \tag{9.134}
$$

只要合并 $z^2\bar{z}$ 项, 因为寻求临界系数 $c$ 就只要这些,

$$(A - e^{i\theta_0} I_n)h_{21} = 2cq + e^{-i\theta_0}\bar{b}h_{02} - 2B(q, h_{11}) - B(\bar{q}, h_{20}) - C(q, q, \bar{q}).$$

从 (9.134) 得 $\langle p, h_{02}\rangle = 0$. 因此得到 $c$ 的表达式, 如果 $b = 0$, 它类似于 (5.54),

$$\begin{aligned} c =& \frac{1}{2}\langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, (I_n - A)^{-1}B(q, \bar{q})) \\ & - B(\bar{q}, (e^{2i\theta_0} I_n - A)^{\mathrm{INV}}(2\bar{b}\bar{q} - B(q, q)))\rangle. \end{aligned}$$

### 9.7.7　1:4 共振

对这个分支二次项可以消去, 但是, 两个三次项不能去掉. 在中心流形上的临界规范形 (9.94) 用复坐标可写为

$$w \mapsto iw + cw|w|^2 + d\bar{w}^3 + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}^1 \tag{9.135}$$

(见 9.5.5 节). 如通常, 选择复特征向量使得

$$Aq = iq, \quad A\bar{q} = -i\bar{q}, \quad A^{\mathrm{T}}p = -ip, \quad A^{\mathrm{T}}\bar{p} = i\bar{p}, \quad \langle p, q\rangle = 1.$$

如同对 1:3 共振, 确定 $H(w)$ 的展开式, 于是 (9.124) 的二次部分给出

$$w^2 : (A + I_n)h_{20} = -B(q, q),$$

$$w\bar{w} : (A - I_n)h_{11} = -B(q, \bar{q}),$$

$$\bar{w}^2 : (A + I_n)h_{02} = -B(\bar{q}, \bar{q}).$$

由于 $\pm 1$ 不是 $A$ 的特征值, 容易求得 $h_{20}, h_{11}$ 和 $h_{02}$. 如前现在只要合并共振项前面的系数得

$$\begin{aligned} (A - iI_n)h_{21} &= 2cq - 2B(q, h_{11}) - B(\bar{q}, h_{20}) - C(q, q, \bar{q}), \\ (A - iI_n)h_{03} &= 6dq - 3B(\bar{q}, h_{02}) - C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}). \end{aligned}$$

由可解性条件得

$$c = \frac{1}{2}\langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, (I_n - A)^{-1}B(q, \bar{q})) - B(\bar{q}, (I_n + A)^{-1}B(q, q))\rangle$$

和

$$d = \frac{1}{6}\langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) - 3B(\bar{q}, (I_n + A)^{-1}B(\bar{q}, \bar{q}))\rangle.$$

### 9.7.8 折–翻转分支

这个分支由两个在单位圆上的单乘子刻画, 一个为 $+1$, 另一个为 $-1$. 矩阵 $A$ 有特征值 $\lambda_{1,2}=\pm 1$. 引入相应的特征向量

$$
\begin{aligned}
Aq_1 &= q_1, \quad & A^{\mathrm{T}}p_1 &= p_1,\\
Aq_2 &= -q_2, \quad & A^{\mathrm{T}}p_2 &= -p_2,
\end{aligned}
$$

使得 $\langle p_1,q_1\rangle=\langle p_2,q_2\rangle=1$. 有 $\langle p_1,q_2\rangle=\langle p_2,q_1\rangle=0$. 中心流形的参数化由

$$
H(w)=w_1q_1+w_2q_2+\sum_{1\leqslant i+j\leqslant 3}\frac{1}{i!i!}h_{jk}w_1^kw_2^k+O(\|w\|^4)
$$

给出. 假设中心流形上的限制已经化为规范形

$$
G(w)=\begin{pmatrix} w_1+\frac{1}{2}a_1w_1^2+\frac{1}{2}b_1w_2^2+\frac{1}{6}c_1w_1^3+\frac{1}{2}c_2w_1w_2^2\\ -w_2+e_1w_1w_2+\frac{1}{2}c_3w_1^2w_2+\frac{1}{6}c_4w_2^3\end{pmatrix}+O(\|w\|^4).
$$

这是引理 9.16 证明中的第二步所出现的共振规范形. 任何一个在折–翻转分支的映射, 可以通过光滑可逆的坐标变换变成这个形式而不用额外的一般性假设.

合并 (9.124) 中的二次项, 得到

$$
\begin{aligned}
(A-I_n)h_{20}&=a_1q_1-B(q_1,q_1),\\
(A+I_n)h_{11}&=e_1q_2-B(q_1,q_2),\\
(A-I_n)h_{02}&=b_1q_1-B(q_2,q_2),
\end{aligned}
\tag{9.136}
$$

三次系数从奇异系统

$$
\begin{aligned}
(A-I_n)h_{30}&=c_1q_1+3a_1h_{20}-3B(q_1,h_{20})-C(q_1,q_1,q_1),\\
(A-I_n)h_{12}&=c_2q_1+b_1h_{20}-2e_1h_{02}-B(q_1,h_{02})-2B(q_2,h_{11})-C(q_1,q_2,q_2),\\
(A+I_n)h_{21}&=c_3q_2+(2e_1-a_1)h_{11}-2B(q_1,h_{11})-B(q_2,h_{20})-C(q_1,q_1,q_2),\\
(A+I_n)h_{03}&=c_4q_2-3b_1h_{11}-3B(q_2,h_{02})-C(q_2,q_2,q_2)
\end{aligned}
$$

求得. 由于 1 和 $-1$ 是 $A$ 的单乘子, 由 Fredholm 可解性条件得到临界二次系数

$$
a_1=\langle p_1,B(q_1,q_1)\rangle,\quad b_1=\langle p_1,B(q_2,q_2)\rangle,\quad e_1=\langle p_2,B(q_1,q_2)\rangle,
$$

用加边技巧求得

$$
\begin{aligned}
h_{20}&=(A-I_n)^{\mathrm{INV}}[\langle p_1,B(q_1,q_1)\rangle q_1-B(q_1,q_1)],\\
h_{11}&=(A+I_n)^{\mathrm{INV}}[\langle p_2,B(q_1,q_2)\rangle q_2-B(q_1,q_2)],\\
h_{02}&=(A-I_n)^{\mathrm{INV}}[\langle p_1,B(q_2,q_2)\rangle q_1-B(q_2,q_2)].
\end{aligned}
$$

这些向量满足 $\langle p_1, h_{20}\rangle = \langle p_1, h_{02}\rangle = \langle p_2, h_{11}\rangle = 0$. 于是可以寻求下面的三次系数的表达式：

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \langle p_1, C(q_1, q_1, q_1) + 3B(q_1, h_{20})\rangle,\\
c_2 &= \langle p_1, C(q_1, q_2, q_2) + B(q_1, h_{02}) + 2B(q_2, h_{11})\rangle,\\
c_3 &= \langle p_2, C(q_1, q_1, q_2) + B(q_2, h_{20}) + 2B(q_1, h_{11})\rangle,\\
c_4 &= \langle p_2, C(q_2, q_2, q_2) + 3B(q_2, h_{02})\rangle,
\end{aligned}
$$

若假设 $e_1 \neq 0$, 则临界规范形 (9.106) 的系数可用 (9.107) 和 (9.108) 计算, 得

$$
a(0) = \frac{a_1}{2e_1}, \quad b(0) = \frac{1}{2}b_1 e_1, \quad c(0) = \frac{c_1}{6e_1^2},
$$

$$
d(0) = \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2e_1}\left(b_1 c_3 - \frac{1}{3}c_4(a_1 + 2e_1)\right).
$$

## 9.8　极限环的余维 2 分支

考虑 $(n+1)$ 维微分方程系统

$$
\dot{y} = F(y, \alpha), \quad y \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{9.137}
$$

其中 $F$ 光滑. 假设系统 (1.137) 有极限环 $L_\alpha$, 周期为 $T$, 令

$$
x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^2 \tag{9.138}
$$

是定义在极限环的 $n$ 维截面上的 Poincaré 映射. 为简单起见, 假设这个截面与参数无关. 这个环对应于映射 $f$ 的不动点 (见第 1 章). 因此, 任何一个映射的不动点的余维 2 分支将给出极限环的某个余维 2 分支. 当 Poincaré 映射的中心流形的维数小于或者等于 2 时, 可以用这一章所得的分支图推断环分支的分支图.

类似的构造允许我们应用不动点的余维 2 分支理论到非自治时间–周期微分方程

$$
\dot{x} = f(x, t, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^2 \tag{9.139}
$$

的周期解的余维 2 分支. 其中 $f$ 是 $t$ 的周期函数, (最小) 周期 $T_0 = 2\pi$. 系统 (9.139) 在以 $(x, x_{n+1} \bmod 2\pi)$ 为坐标的柱面上定义了一个自治系统

$$
\begin{cases}
\dot{x} = f(x, x_{n+1}, \alpha),\\
\dot{x}_{n+1} = 1,
\end{cases} \tag{9.140}
$$

(9.139) 的孤立周期解可以解释为 (9.140) 的极限环, 对此环超平面 $\Sigma = \{x_{n+1} = 0\}$ 是截面. 定义在这个截面上的 Poincaré 映射 (9.138) 是 (9.139) 的简单的周期回复映射 (见第 1 章).

在尖分支情形 (见 9.2 节), 中心流形是一维的. 在这个流形上的每一个不动点对应于极限环, 两个不动点的重合意味着不同稳定性的极限环的折 (切) 分支. 因此, 存在一般的参数区域, 系统 (9.137) 在这个区域内有三个邻近的极限环, 它们在这个区域的边界成对地相碰而消失 (见图 9.2).

对广义翻转分支 (9.3 节), 中心流形的维数仍是 1. 流形上周期 2 环对应的极限环在它闭合之前围绕 "主" 环 $L_\alpha$ 旋转两次, 因此它近似地有倍周期. 因而, 存在附上主环的倍周期分支曲线的区域, 在这个区域内有两个不同稳定性的环, 它们的周期近似于原周期的两倍 (见图 9.3). 在这个区域的边界, 由于折分支环消失.

Chennciner 分支 (见 9.4 节) 意味着 Poincaré 映射的中心流形的维数是 2. 在流形上的闭不变曲线变成有关稳定性的*二维不变环面*. 可以存在这样的区域, 在这种区域内这样的两个环面共存. 但是, 它们以复杂的方式几乎是重合的情况下失去光滑性而遭到破坏. 在参数变化时, 由于折分支出现无穷多个长周期极限环, 它们在环面上以及离开环面时产生和消失.

在所有强共振情形, 中心流形是二维的. 相图中的中心平衡点 (见图 9.9、图 9.10、图 9.12 等) 对应于 "主" 极限环, 非平凡平衡点实际上刻画*单重极限环*, 在它闭合前旋转两次, 三次或者四次 (图 9.30 中, 画的是近似于*三重周期的环*). 围绕非平凡平衡点的闭不变曲线对应于围绕倍周期、三重周期等的单不变环面. 鞍点不动点的稳定和不稳定不变流形是鞍点极限环对应流形的截面. 一般地, 它们沿着同宿或者异宿于极限环的轨道横截相交. 在这种结构附近出现无穷多个鞍点极限环. 这就导致在强共振附近出现复杂的 "混沌" 动力学. 例如, 考虑 $s = -1$ 的情形 1:2 (见图 9.19). 在这个共振附近的单参数系统可以具有下面的情况: 一个稳定极限环由于 Neimark-Sacker 分支失去稳定性而产生光滑的不变环面. 在环面内部保持的不稳定极限环生成倍周期分支, 而引起近似倍周期的排斥环. 在倍周期后 "主"

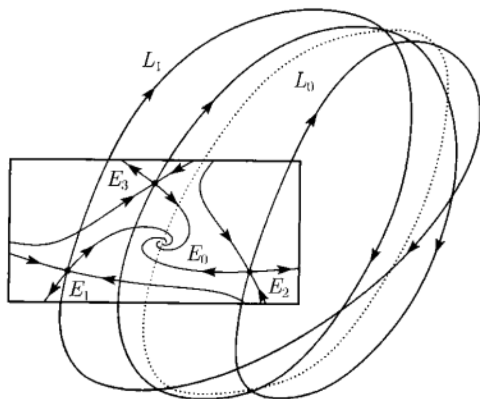



图 9.30 在 1:3 共振附近近似三重周期环

环是鞍点环. 当环面的径线趋于 8 字形时环面沿着纬线变得狭窄. 然后, 环面在由 "主" 环的稳定和不稳定流形所形成的同宿结构附近破裂. 结果, 轨道环绕着破裂环面的一半然后到另一半随机地从环的一面跳到另一面. 出现了内部嵌有长–周期环的 "混沌吸引子".

对折–翻转分支. 中心流形也是 2 维. 图 9.25～ 图 9.28 中水平轴上的平衡点对应于 "主" 极限环. 非平凡平衡点实际上代表在其在闭合前的*两次旋转*的极限环. 类似地, 闭不变曲线对应于闭合前两次旋转的 "二重环面". 所有谈及不变流形的相交以及环面的破裂在这情形也适用.

**例 9.3** (强迫周期捕食–被捕食系统中的强共振)　考虑下面的两个微分方程的时间–周期系统 (Kuznetsov, Muratori, Rinaldi, 1992)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(1-x_1) - \dfrac{cx_1x_2}{\alpha(t)+x_1}, \\ \dot{x}_2 = -dx_2 + \dfrac{cx_1x_2}{\alpha(t)+x_1}, \end{cases}$$

其中

$$\alpha(t) = b(1+\varepsilon\sin(t)),$$

这里 $r,b,c,d$ 和 $\varepsilon$ 是参数, $x_1$ 和 $x_2$ 为尺度化了的种群数. 对 $\varepsilon=0$, 系统简化为第 3 章已经研究过的自治捕食–被捕食系统 (例 3.1). 如在那一章已经看到的, 这个系统由于 Hopf 分支而有稳定极限环. 时间周期函数 $\alpha(t)$ 描述环境的季节性变化对种群动力学的影响. 时间已经作了 $2\pi$ 年长度的尺度化. 参数 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$ 测量季节性变化对捕食者的功能性反应. 如已经指出的, 对这个模型的研究等价于研究平面*第一次回复映射*

$$f: x(0) \mapsto x(2\pi). \tag{9.141}$$

(9.141) 的不动点对应于这个模型的 $2\pi$ 周期解, $k$ 周期点定义 $2k\pi$ 周期 ($k$ 年) 的*亚调和解*. 闭不变曲线对应于*拟周期*或者*长周期*(锁定的) 解, 不规则的不变集描述了*混沌振动*. 映射 $f(x)$ 依赖于参数并且具有几个早先已经研究过的余维 2 分支. 下面的结果是借助于第 10 章将介绍的数值延拓技巧以及这一章叙述的理论得到的. 固定

$$c=2, \quad d=1,$$

并分析 $(\varepsilon,b,r)$ 空间中的分支图. 对其他参数组合的现象也作了说明. 令

$$r=1,$$

而只令两个参数 ($\varepsilon$ 和 $b$) 变动. 有关的不动点的分支曲线和周期 2 轨道如图 9.31 所示. 下面一步一步追踪这个图是如何构造的.

对 $\varepsilon=0$(没有季节变化), 映射 $f$ 是沿着例 3.1 已经研究过的自治系统轨道的 $2\pi$ 移位. 它的不动点对应于自治系统平衡点的平凡 $2\pi$ 解. 那个系统在

$$b_H=\frac{c-d}{c+d}$$

有 Hopf 分支 $\left(\text{对所选的参数值 } b_H=\frac{1}{3}\right)$. 从 $b<b_H$ 分支出一个稳定的极限环. 对 $2\pi$ 移位映射, 这意味着 Neimark-Sacker 分支产生稳定的闭不变曲线. 因此, 在 $(\varepsilon,b)$ 平面内的点

$$H=(0,b_H)$$

可作为延拓这两个参数的 Neimark-Sacker 分支曲线 $h^{(1)}$ 的初始点. 事实上, 这条曲线的根是在 $b$ 轴上的点 $H$(见图 9.31), 它与这个轴横截相交. 在典型点穿过 $h^{(1)}$ 导致产生小闭不变曲线, 即出现围绕对应于常–参数模型①的非平凡平衡点的 "基本"$2\pi$ 周期解的小振幅振动.

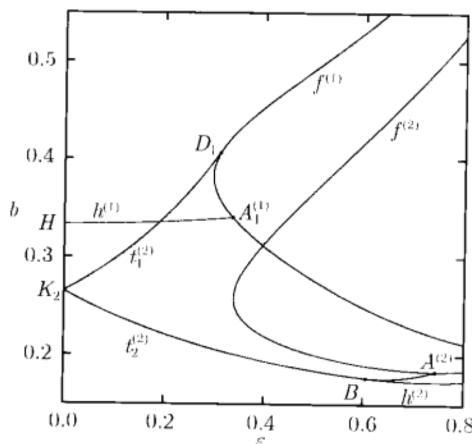



图 9.31 $(\varepsilon,b)$ 平面上对 $r=1$ 的分支图

当在 $(\varepsilon,b)$ 平面从左到右延拓曲线 $h^{(1)}$ 时, 不动点的两个乘子 $\mu_{1,2}^{(1)}$ 光滑地变化, 并且在到达终点 $A_1^{(1)}$ 时都等于 $-1$. 这是一个余维 2 分支 ——1:2 共振. 可以数值验证, 规范形系数满足

$$D_1(0)<0,\quad C_1(0)>0,$$

因此 $s=1$, 系统在 $A_1^{(1)}$ 附近的分支图近似地描述于图 9.9. 由此, 存在与不动点或者通过点 $A_1^{(1)}$ 的周期 2 轨道有关的单个分支曲线, 特别, 沿着分支曲线 $f^{(1)}$"基

① 如果没有强迫的系统有双曲平衡点, 则映射 $f$ 对小 $\varepsilon$ 有临近的双曲不动点. 这个点对应于强迫系统的 $2\pi$ 周期解.

本" 不动点具有翻转 (倍周期) 分支. 沿着这条曲线离开 $A_1^{(1)}$ 时, 不动点有单个乘子 $\mu_1^{(1)} = -1$. $f^{(1)}$ 的两个从 $A_1^{(1)}$ 出发的分枝按可能的两个方向的数值延拓已经得到. 在点 $A_1^{(1)}$ 上方从左到右穿过 $f^{(1)}$ 时鞍点周期 2 轨道消失, 这时稳定的周期 1 不动点变成鞍点 (参看图 9.9). 反之, 在点 $A_1^{(1)}$ 下方按同一方向穿过曲线 $f^{(1)}$ 时鞍点周期 2 环消失, 这时排斥不动点分支成为鞍点.

对位于 $f^{(1)}$ 的上面分枝的翻转分支的分析显示, 存在另外的余维 2 分支点 $D_1$, 在这点三次规范形系数 $c(0)$ 为零, 由于 $d(0) \neq 0$ 出现非退化的广义翻转分支 (见 9.3 节). 因此, 穿过位于点 $D_1$ 上方 $f^{(1)}$ 的部分导致标准的超临界翻转分支产生稳定周期 2 环. 此外, 存在从点 $D_1$ 出发的切分支曲线 $t_1^{(2)}$, 在这条曲线上两个周期 2 环重合并消失 (见图 9.31). 沿着这条曲线存在乘子 $\mu_1^{(2)} = 1$ 的周期 2 环. 曲线 $t_1^{(2)}$ 终止于 $b$ 轴上点 $K_2$, 在那里常参数系统的极限环有周期 $2 \cdot 2\pi$. 点 $K_2$ 是周期 2 环的切分支曲线的另一个分枝 $t_2^{(2)}$ 的终点. 如同在分枝 $t_1^{(2)}$ 上, 当在 $K_2$ 附近穿过 $t_2^{(2)}$ 时出现两个周期 2 环, 一个稳定, 另一个是鞍点.

跟随切分支曲线的下分枝 $t_2^{(2)}$ 遇到点 $B$, 那里周期 2 环有两个乘子 $\mu_{1,2}^{(2)} = 1$. 这是周期 2 环的 1:1 共振 (见 9.5.2 节). Neimark-Sacker 分支曲线 $h^{(2)}$ 从这点出发. 沿着这条曲线周期 2 环有一对在单位圆上的乘子 $\mu_{1,2}^{(2)}$. 曲线 $h^{(2)}$ 终止于点 $A^{(2)}$, 在那里两个乘子 $\mu_{1,2}^{(2)}$ 都等于 $-1$ (1:2 共振). 对应于周期 2 环的翻转分支的曲线 $f^{(2)}$ 通过点 $A^{(2)}$, 它也是 Neimark-Sacker 分支曲线 $h^{(4)}$ 的根 (图 9.31 中没有显示), 这是因为对 1:2 共振有 $s = -1$. 后面将回到对 $A^{(2)}$ 附近分支的讨论.

对参数 $(c, d, \tau)$ 的流动值, $\varepsilon = 0$ 的非扰动系统的 Hopf 分支产生周期小于季节性周期 $(2\pi)$ 的极限环. 当 $b$ 减少时环周期增大并在点 $K_2$ 达到 $2 \cdot 2\pi$. 注意, 由 Hopf 分支产生的环的周期依赖于参数, 特别依赖于 $r$ 的值. 因此, 现在取 $r$ 的一般值, 譬如

$$r = 0.73,$$

对此, 自治系统通过 Hopf 分支出现的稳定极限环的周期大于 $2\pi$ (强迫周期). 在 $(\varepsilon, b)$ 平面所得的分支曲线如图 9.32 所示.

还存在根在 $b$ 轴上 Hopf 点 $H$ 的 Neimark-Sacker 分支曲线 $h^{(1)}$. 如同前一情形, 这条曲线终止于对应 1:2 共振的点 $A_2^{(1)}$, 翻转分支曲线 $f^{(1)}$ 通过这一点. 但是在这情形 $(s = -1)$,

$$D_1(0) < 0, \quad C_1(0) < 0,$$

由 1:2 共振的理论, 必须存在从 $A_2^{(1)}$ 出发的曲线 $h^{(2)}$, 沿着它周期 2 环有一对在单位圆上的乘子 $\mu_{1,2}^{(2)}$ (Neimark-Sacker 分支). 这样的曲线实际上是存在的, 且可用第 10 章的方法计算 (见图 9.13). 按照 1:2 共振理论, 沿着这条曲线出现亚临界 Neimark-Sacker 分支. 现在只存在一条终止于曲线 $f^{(1)}$ 上的广义翻转分支点 $D_2$ 的

切分支曲线的分枝 $t_2^{(2)}$.

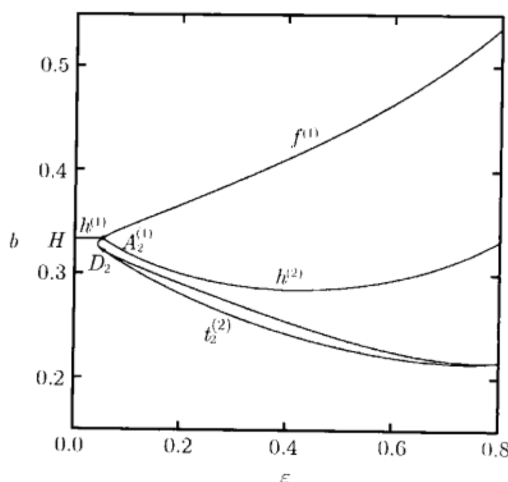



图 9.32 $(\varepsilon, b)$ 平面上 $r=0.73$ 的分支曲线

如何使得图 9.31 和图 9.32 相一致? 回忆存在区分两种情形的值 $r=r_2(r_2=0.75)$, 在这个值, 对 $\varepsilon=0$, 在 Hopf 分支的极限环的渐近周期差不多是强迫周期的2倍. 这是 1:2 共振 Hopf 分支, 它是被 Gambaudo (1985) 在小强迫 $\varepsilon \ll 1$ 的限制下理论地分析过 (也见文献评注). 在三参数空间中开折这个分支, 把强迫振幅作为铅直轴, 有如图 9.33 所示的值得注意的分支结构. 存在一个圆锥形曲面 $f^{(1)}$, 它的顶点在共振 Hopf 点, 在这点翻转分支发生. 这个圆锥形曲面被对应于条件

$$\mu_1^{(1)}\mu_2^{(1)}=1$$

的曲面所 "切割". 这个曲面位于圆锥外面的部分, $h^{(1)}$, 对应于 Neimark-Sacker 分支. 交线 $A_1^{(1)}$ 和 $A_2^{(1)}$ 趋于对应于具相反 $s=\pm1$ 的 1:2 共振 (在 $-1$ 的二重乘子)

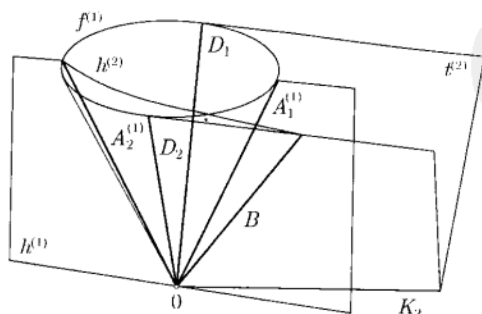



图 9.33 在 1:2 共振 Hopf 分支附近的分支结构

的共振 Hopf 点. 这两条曲线之一 ($A_2^{(1)}$) 是另外一个余维 1 曲面的边界, 即 $h^{(2)}$, 在它上面发生周期 2 环的 Neimark-Sacker 分支. 曲面 $h^{(2)}$ 由位于周期 2 环 $t^{(2)}$ 的切分支曲面上的 1:1 共振曲线 $B$ 所界定. 这后一个曲面是由两条广义翻转分支曲线 $D_{1,2}$ 所界定. 图 9.34 给出参数空间 $(r, b, \varepsilon)$ 被平面 $\varepsilon = 0.4$ 所截的截面.

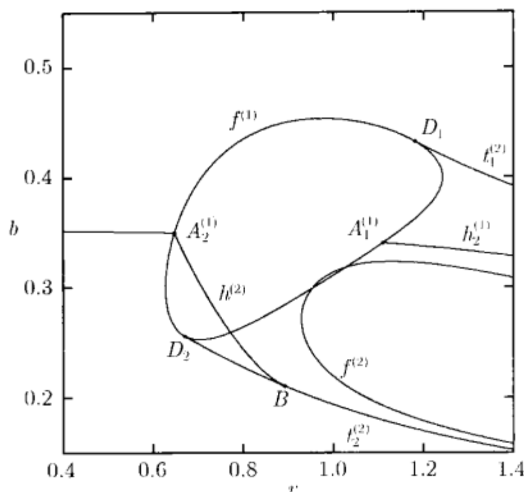



图 9.34　$(r, b)$ 平面上 $\varepsilon = 0.4$ 时的分支曲线

要跟理论完美一致, 图 9.31、图 9.32 和图 9.34 所示的分支图显然是不完全的. 这是因为周期大于或者等于 3 的周期轨道分支, 以及与同宿结构有关的分支集没有叙述. 但是即使这些不完全的图像也对这个捕食–被捕食模型的动力学在周期强迫作用下提供了有趣的信息, 特别预报了不同类型的吸引子的共存.

远离共振 Hopf 点 (例如 $f^{(2)}$ 上周期 2 环的翻转分支) 的分支不能由局部分析预测. 事实上, 存在导致倍周期 Feigenbaum 瀑布的翻转分支曲线 $f^{(2k)}$ 的凝聚序列. 这样的瀑布引起在参数空间某个区域内的奇怪吸引子, 如图 9.35(a) 所示. 模型中引起混沌的另外情景是闭不变曲线的破坏. 闭曲线可失去它的光滑性, 在周期 2 鞍点环的稳定和不稳定流形相交而形成的同宿结构附近变成不规则不变集 (见图 9.35 (b)).

最后, 看图 9.31 ($r = 1$ 时) 中点 $A^{(2)}$ 附近的分支图. 这里显示一个有趣现象, 即 1:2 *共振的凝聚* (见图 9.36). 正如我们已提到的在 $(\varepsilon, b)$ 平面存在翻转分支曲线凝聚序列:

$$f^{(2)}, f^{(4)}, f^{(8)}, \cdots .$$

它们中只有前面三个画在图像中, 因为按照 Feigenbaum 的普适性它们越来越接近. 穿过曲线 $f^{(2k)}$, 导致出现稳定周期 $2k$ 环前面的稳定周期 $k$ 环变成不稳定

(超临界翻转分支). 在每个计算的翻转曲线 $f^{(2k)}$ 上存在 1:2 共振的余维 2 点 $A^{(2k)}$. 对对应的参数值, 有周期 $2k$ 的环, 使得第一个回复映射 (1.141) 的第 $2k$ 次迭代 $f^{2k}$ 有乘子为 $\mu_{1,2}^{(2k)}=-1$ 的不动点 ($f$ 的周期 $2k$ 环). 显然, 所有的点 $A^{(2k)}$ 都有相同的拓扑类型, 它们对应于 $s=-1$ 的规范形 (9.75) 的流. 这意味着存在从每个 $A^{(2k)}$ 出发的 Neimark-Sacker 分支曲线 $h^{(2k)}$ 和 $h^{(4k)}$. 事实上, 从计算和某些理论证明, 点 $A^{(2k)}$ 是由 Neimark-Sacker 分支曲线序列所连接. 因此, 这个例子阐明如何将高余维分支相应的分支结构的理论知识引导到数值分析并帮助我们理解模型的性态.

◇

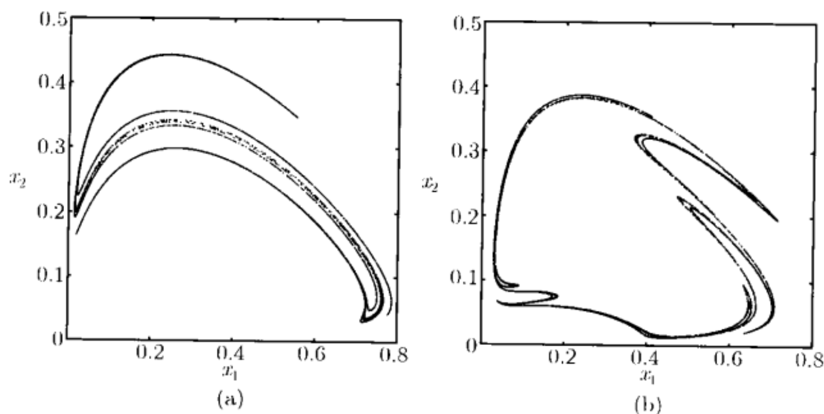



图 9.35　Poincaré 映射的奇怪吸引子

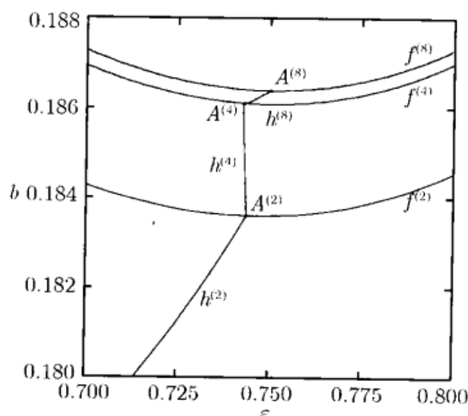



图 9.36　1:2 共振的凝聚

## 9.9　练　　习

1. (适应控制中的强共振) 考虑映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ bx + k + yz \\ z - \dfrac{ky}{c+y^2}(bx + k + zy - 1) \end{pmatrix},$$

它描述适应控制系统 (Frouzakis, Adomaitis, Kevrekidis, 1991).

(a) 如果参数 $c$ 固定, 求证：在 $(k, b)$ 平面上有点使得不动点 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1-b-k)$ 有 1:2 共振. 提示：用第 5 章练习 10 的计算, 求翻转分支线和 Neimark-Sacker 分支线的公共点.

(b) 证明：如果 $k$ 从 1:2 共振值减少到零时, 沿着 Neimark-Sacker 分支线移动会遇到 1:3 共振和 1:4 共振.

2. (1:4 强共振) 验证：映射 (Hale, Kocak, 1991)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \dfrac{3}{4} - x_1^2 \end{pmatrix}$$

有乘子为 $\mu_{1,2} = \pm \mathrm{i}$ 的不动点, 并计算规范形 (9.92) 的系数 $C(0)$ 和 $D(0)$. 提示：不要忘记把不动点移到原点.

这个映射的一般双参数扰动可以有什么样的分支?

3. (Hénon 映射的退化 1:2 共振) 寻求参数值使得在这个参数值 Hénon 映射 (见例 4.1 和第 5 章练习 9)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}$$

有二重乘子 $-1$ 的不动点. 计算规范形系数 $C(0)$ 和 $D(0)$, 并验证非退化条件 (R2.2) 不满足. 提示：对 $\beta = 1$ 这个映射保面积, 因为 $J(x, y) = 1$, 这里 $J(x, y)$ 是映射在点 $(x, y)$ 的 Jacobi 矩阵. 因此, 它不可能有任何吸引和排斥不动点以及闭不变曲线.

4. (在 1:2 共振与流相对的映射) 对 1:2 共振考虑截断规范形映射 (9.61):

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C\xi_1^3 + D\xi_1^2\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{E.1}$$

以及近似 ODE 系统 (9.141):

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C\xi_1^3 + D\xi_1^2\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{E.2}$$

为简单起见, 假设 $C$ 和 $D$ 是与参数无关.

(a) 比较 (E.1) 中平凡不动点的 Neimark-Sacker 分支方程和 (E.2) 中的平凡平衡点的 Hopf 分支方程. 验证：变换 $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (4\beta_1, -2\beta_1 - 2\beta_2)$ (参看引理 9.11) 将前面的分支线映为后面的分支线.

(b) 计算 (E.1) 的 Neimark-Sacker 分支的三次规范形系数 $c_1$ (参看公式 (4.26)), 并在原点附近计算 $d = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} c_1) \neq 0$. 验证非退化条件 $d \neq 0$ 等价于条件 (R2.2):

$$D + 3C \neq 0.$$

(c) 在原点附近沿着 (E.2) 的 Hopf 分支线计算第一个 Lyapunov 系数 $l_1$. 然后验证非退化条件 $l_1 \neq 0$ 等价于条件

$$D \neq 0.$$

(d) 解释 (b) 和 (c) 中所得结果的差别, 但它们和引理 9.11 是一致的.

5. (1:2 共振近似系统中的异宿分支和同宿分支) 考虑系统 (9.75):

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta} = \varepsilon_1 \zeta_1 + \varepsilon_2 \zeta_2 + s\zeta_1^3 - \zeta_1^2 \zeta_2, \end{cases}$$

其中 $s = \pm 1$.

(a) 寻求变量、时间, 以及参数的奇异重尺度化, 使得非平凡平衡点 (如果存在) 位于

$$\varepsilon_{1,2} = (\mp 1, 0),$$

并将尺度化系统写为形式

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = s\eta_1(-1 + \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_2 - \gamma_1 \eta_1^2 \eta_2, \end{cases}$$

其中 $(\gamma_1, \gamma_2)$ 是新参数. 推导新旧参数之间的关系：

$$\gamma_1 = \sqrt{-s\varepsilon_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{-s\varepsilon_1}}.$$

(b) 考虑将 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 代入前面方程所得的系统, 并验证它是具 Hamilton 函数

$$H_s(\eta) = \frac{s\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2}{2} - \frac{s\eta_1^4}{4}$$

的 Hamilton 系统. 对 $s = \pm 1$ 画出常数等高线 $H_s(\eta) = h$.

(c) 取 $\gamma=0$ 的 Hamilton 系统, 对 $s=1$, 验证

$$\eta_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}-1}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}+1},\quad \eta_2(t)=\frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}}{(\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}+1)^2}$$

对应于连接鞍点 $\varepsilon_{1,2}$ 的上面的异宿轨道 $H_1(\eta)=\dfrac{1}{4}$. 验证对 $s=-1$,

$$\eta_1(t)=\frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{2t}},\quad \eta_2(t)=\frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{t}(1-\mathrm{e}^{2t})}{(1+\mathrm{e}^{2t})^2}$$

给出对应于同宿于在原点的鞍点 $\mathcal{E}_0$ 的右边的轨道 $H_{-1}(\eta)=0$ 的明显解.

(d) 按照第 8 章附录中所述的方法, 沿着 $\gamma\neq 0$ 的系统的轨道计算 Hamilton 函数 $H_s$ 的导数, 并证明: (i) 对 $s=1$, 异宿连接曲线 $C$ 有表达式 $\gamma_2=k_1\gamma_1+O(\gamma_1^2)$, 其中

$$k_1=\frac{I_2\left(\dfrac{1}{4}\right)}{I_1\left(\dfrac{1}{4}\right)}=\frac{1}{5},$$

其中 $I_{1,2}(h)$ 定义为

$$I_1(h)=\int_{H_s(\eta)=h}\eta_2\mathrm{d}\eta_1,\quad I_2(h)=\int_{H_s(\eta)=h}\eta_1^2\eta_2\mathrm{d}\eta_1.$$

(ii) 对 $s=-1$, 8 字形同宿曲线 $P$ 有表达式 $\gamma_2=k_2\gamma_1+O(\gamma_1^2)$, 其中

$$k_2=\frac{I_2(0)}{I_1(0)}=\frac{4}{5},$$

$I_1(0),I_2(0)$ 是上面定义的积分. 提示: 为了沿着异宿轨道和同宿轨道计算积分, 把它们转换成对时间的积分并应用 (c) 步中所得的明显解.

(e) 映 (d) 步中所得的分支曲线到原来参数 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的平面, 并验证 9.5.3 节中给出的分支曲线 $C$ 和 $P$ 的表达式.

(f) 证明: 在情形 $s=1$, 积分比是 $h$ 的单调函数, 但对 $s=-1$ 有唯一极小值. 提示: 例如见 Carr (1980). 按照 (9.75) 的极限环这些事实意味着什么?

6. (1:3 共振近似系统的异宿分支) 考虑 1:3 共振的近似系统

$$\dot{\eta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\eta+\bar{\eta}^2+c\eta|\eta|^2.$$

(a) 分析截断三次项的系统, 即

$$\dot{\eta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\eta+\bar{\eta}^2.$$

(i) 证明：它有三个非平凡鞍点，位于等边三角形的顶点.

(ii) 证明：当 $\beta_1 = 0$ 时系统是 Hamilton 系统，求极坐标下的 Hamilton 函数. 画出它的等位线，并验证在 $\beta_1 = 0$ 连接鞍点的轨道是直线.

(b) 对小的 $\beta_1$ 执行带三次项的系统的奇异尺度化，把系统化为 (a) 步已经研究过的二次 Hamilton 系统的小扰动. 沿着扰动系统的轨道计算 Hamilton 的导数，引入分界线分裂函数，并验证 9.5.4 节给出的异宿环曲线 $H$ 的渐近表达式. 提示：见 Horozov (1979) 或 Chow 等 (1994).

7. (1:4 共振近似系统的平衡点) (a) 考虑写为复数形式的平面线性系统

$$\dot{z} = Pz + Q\bar{z},$$

其中 $P, Q \in \mathbb{C}^1$. 证明：在原点的平衡点类型与 $Q$ 无关. 指出当 $|P| < |Q|$ 时这点是鞍点，$|\mathrm{Im}\, P| > |Q|$ 时是焦点，以及 $|\mathrm{Im}\, P| < |Q| < |P|$ 时是结点. 验证当 $\mathrm{Re}\, P < 0$ 时焦点是稳定的，$\mathrm{Re}\, P > 0$ 时是不稳定的. 提示：见 Arnold (1983, p.305).

(b) 应用 (a) 步证明对 1:4 共振近似系统 (9.99) 的非平凡平衡点，当 $|A| < 1$ 时是鞍点. 验证对 $|A| > 1$，(9.99) 的非平凡平衡点具小模的是鞍点，大模的是反鞍点.

(c) 寻求对应于非平凡平衡点的 Bogdanov-Takens 分支关于 $A$ 的条件 (即什么时候四个非平凡平衡点具二重零特征值)，并验证它与 9.5.5 节给出的相同.

8. (广义 Hénon 映射中的折–翻转分支) 考虑平面映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \mu - \varepsilon x - y^2 + Rxy \end{pmatrix},$$

其中 $(\alpha, \beta)$ 是参数，$R \neq 0$ 是常数 (参看练习 (3)). 这个映射出现在余维 2 同宿切触的研究中 (Gonchenko, Gonchenko, 2000; Gonchenko, Gonchenko, Tatjer 2000).

(a) 证明：在 $(\mu, \varepsilon) = (0, -1)$ 映射有不动点，其乘子 $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

(b) 证明：如果 $R \neq 1$ 对应的折–翻转分支是非退化的，即验证 9.7 节中的条件 (FF.1)~(FF.3). 提示：首先作变换 $(x, y) = (\xi_1 + \xi_2, \xi_1 - \xi_2)$.

## 9.10 附录：文献评注

本章所叙述的大多数结果早在 20 世纪 60 年代初已被专家们知道，虽然确切的表达和证明很迟才出现.

**不动点的尖分支**与平衡点平行. 定理 9.1 以及关于广义翻转分支的定理在 Arnold, Afraimovich, Ilyashenko, Shil′nikov(1994)(俄文原版, 1986) 中有明确叙述.

**广义翻转分支**的简短叙述是由 Holmes 和 Whitl (1984) 给出，连同高阶翻转退化性的详细处理由 Peckham 和 Kevrekidis (1991) 给出. 特别，他们推导了与 9.3 节 (GF.1) 等价的非退化条件.

*广义* Neimark-Sacker 分支的分析属于 Chenciner (1981, 1982, 1983a, 1983b, 1985a, 1985b, 1988). 这个分支的可阅读的介绍由 Arrowsmith 和 Place (1990) 提供.

*强共振*的研究要回到 Melnikov (1962) 和 Sacker (1964). 强共振的现代理论属于 Arnold(1977, 1983) 和 Takens (1974a). 在教科书中叙述的有 Arnold (1983) 和 Arrowsmith 和 Place (1990) (也见 Arnold, Afraimovich, Ilyashenko 和 Shil′nikov (1994) 以及 Chow, Li 和 Wang (1994)). 近似系统分支的完全分析对 1:1 共振属于 Bogdanov (1975, 1976a, 1976b); 对 1:2 共振属于 Takens (1974a), Holmes 和 Rand (1978), Carr (1981) 以及 Horozov (1979). 情形 1:3 的证明也属于 Horozov(1979). 注意, 异宿分支曲线 $H$ 对这个共振的渐近展开式在 Arrowsmith 和 Place (1990) 中少了个因子 $\frac{1}{2}$.

1:4 共振是最复杂的, 因为即使分析近似系统也要求数值计算. 关于这个分支的最多结果是由 Arnold (1977, 1983) 得到或叙述. 基于 Hamilton 扰动的 $\operatorname{Re} A = 0$ 轴 (除了 $A = \pm \mathrm{i}$) 邻域的解析考虑是由 Neishtadt (1978) 研究的. 在 $A$ 平面其他区域 (包括整个区域 $\operatorname{Re} A < -1$) 极限环的解析处理是由 Wan (1978a), Cheng (1990), Cheng 和 Sun (1992) 以及 Zegelin (1993) 所做. $A$ 平面上对应于退化的异宿分支的所有已知边界已被 Berezovskaya 和 Khibnik (1979, 1981) 计算, 他们也给出可能的相图的分支序列. Krauskopf (1994a) 作出了这些相图的计算机图形. 他研究了用不同尺度化的近似系统 $\dot{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} z|z|^2 + b\bar{z}^3$ 的分支图以及计算在 $(b, \varphi, \alpha)$ 空间内的三维参数图 (Krauskopf, 1994b; Krauskopf, 1997).

Arnold (1977) 用其标准方法开始对有极限环其乘子满足 $\mu^q = 1, q = 1, 2, 3,$ 或 4 的自治微分方程系统[①]的强共振的研究. 在适当坐标系下环附近的系统等价于维数减去 1 的非自治 $2\pi$ 周期系统. 用 $2\pi q$ 周期系数的非线性变换, 这个系统可简化为一个自治 "主部" 加上具 $2\pi q$ 周期系数的高阶项的系统. 沿着这个主部的轨道的移位近似相应这个环的 Poincaré 映射的 $q$ 次迭代. 叙述这个构造的有 Arnold (1983), Arrowsmith 和 Place (1990), 在 Iooss 和 Adelmeyer (1992) 的书中对它有特别详细的介绍, 它给出依赖于参数的 $\mathbb{Z}_q$ 对称自治系统. 我们采用属于 Neimark (1972) 基于 Picard 迭代的更为初等的方法 (对 Hamilton 系统也见 Moser (1968)). 这允许我们直接用原映射的 Taylor 系数推导近似系统和非退化条件. 注意, 在有些书里, 近似系统的系数与规范化映射的系数重合的假设是错误的.

关于*折-翻转*分支的结果更近代. 出现在对 ODEs 系统 fold-Hopf 分支分析的截断系统的分支和对应极限环分支之间的联系首先是由 Arnold 等 (1994) 提出的. 对映射, 这个分支由 Gheiner (1994) 和 Kuznetsov, Meijer, van Veen (2004) 作了特殊的处理. 后面的文献包含一个大气环流的简化模型的极限环折-翻转分支的例子.

① 研究三维系统就够了.

近似系统和原映射之间的关系在文献 (Arnold, 1983; Arrowsmith, Place, 1990; Arnold et al., 1994) 以及其他的书中有讨论. 关于闭不变曲线和在不动点余维 2 分支附近出现的同宿结构的重要分析和数值结果可在下面所述的文章中找到: Chenciner, Broer, Roussarie 和 Simo (1993, 1996) 以及 Arrowsmith, Cartwright, Lansbury 和 Place (1993).

不动点 (周期轨道) 的余维 2 分支在下面的领域中也数值地找到: 经济学中的周期性策划模型 (Ghezzi, Kuznetsov, 1994)、生态学 (Kuznetsov et al., 1992)、生物工程学 (Pavlou, Kevrekidis, 1992)、工程学 (Taylor, Keverkidis, 1991, 1993; Kuznetsov, Piccardi, 1994b), 以及流行病学 (Kuznetsov, Piccardi, 1994a), 并且这些领域还在迅速扩大. 共鸣的强迫 Hopf 分支的规范形理论已经被 Gambaudo (1985), Bajaj (1986), Namachchivaya 和 Ariaratnam (1987) 以及 Vance 和 Ross (1991) 所发展.

9.7 节基于 Kuznetsov 和 Meijer (2003) 的工作.



# 第 10 章　分支的数值分析

在这一章将叙述一些用于动力系统的数值分析的基本方法. 假定读者对低水平的数值程序, 诸如求解线性方程组、求特征向量和特征值, 以及执行 ODEs 的数值积分都已经熟悉. 我们专注于更特殊的分支分析的算法, 特别寻求对平衡点 (不动点) 的定位及其关于对参数的延拓以及对分支的探测、分析和延拓. 也特别注意给出极限环及其相应的分支的定位和延拓以及对同宿轨道的延拓. 本章主要处理连续-时间情形, 对离散-时间系统仅给出简短的注释. 附录 A 扼要给出似 Newton 法收敛性的简单估计. 附录 B 给出用来探测 Hopf 和 Neimark-Sacker 分支时产生的双交错矩阵积的某些基本信息. 附录 C 叙述探测高阶同宿分支的数值方法. 附录 D 的文献评注中包括的文献有标准的非相互作用软件包以及相互作用程序, 它们对延拓和动力系统的分支分析有用. 事实上, 这一章的主要目的是为读者提供在动力系统分析中被广泛应用的软件工具的方法的了解.

给了一个依赖于参数的 ODEs 系统, 我们的根本目的是获得它的 *分支图*(即把参数空间划分为区域, 在同一个区域内系统有拓扑等价的相图, 以及描述这些相图如何在分支边界转换). 正如我们已经在前面几章看到的, 这个任务也许不可能办到, 因为分支图中可以有无穷多个复杂形状的区域. 但是, 即使在最简单的情形, 我们也不得不依靠计算机去获得动力系统分支边界结构的信息. 对于极限环分支和同宿轨道分支, 这特别真实, 因为只有几个人为的非线性系统例子, 它们允许有封闭的解析解. 即使对高维系统的平衡点 (不动点) 的分析, 没有数值计算实际上也是不可能的.

## 10.1　在固定参数值的数值分析

考虑没有参数或者所有的参数都固定在某些值的连续-时间系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1}$$

其中 $f$ 充分光滑. 分析系统 (10.1) 意味着给出它的相图结构, 就是说, 定位平衡点和极限环, 研究在这些相对象附近的轨道结构, 以及确定这个系统的大范围性态. 我们主要讨论问题的局部面貌, 对大范围结果只给出一些解释.

### 10.1.1　平衡点的定位

分析系统 (10.1) 从确定它的平衡点, 或者求系统

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{10.2}$$

的解开始. 注意, 映射 $x \mapsto g(x)$ 的不动点满足同类型的系统, 即 $f(x) = g(x) - x = 0$. (10.2) 的解也许可解析地知道. 如果系统是具低阶多项式分量 $f_i(x), i = 1, \cdots, n$ 的*代数系统*, 那特别幸运. 在这一情形, 可用代数结果 (见附录 D 中的文献评注) 确定解的个数, 并 (有时候) 明确求得它们. 但是, 即使相对低次的多项式系统也没有简单的明显解. 因此, 数值方法变得不可避免.

如果系统有 *稳定平衡点* $x = x^0$, 由于

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi^t(x) - x^0\| = 0.$$

所以可以从 $x^0$ 的吸引区域内的点 $x$ 开始, 按要求的精度数值积分 (10.1) 求得. 这里以及整个这一章, 用范数 $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = x^{\mathrm{T}}x$, 其中 T 指转置. 若平衡点 $x^0$ 完全不稳定 (排斥), 则可以改变时间方向重复这个步骤, 于是按原来时间向后收敛到 $x^0$.

一般地, 对既不稳定也不排斥的平衡点, 定位问题只能当 $x^0$ 的位置近似地知道时才能解决. 这并不是一个不切实际的假设, 因为我们典型地开始解析地寻找平衡点, 或者在固定的参数值积分, 再按参数变化的小步距 "延拓" 它. 这个标准的过程产生一个收敛点列 $\{x^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$, 在非常一般的条件下, 它收敛于平衡点, 这就是 Newton *法*.

Newton *法*

以 $A(x)$ 表示 (10.2) 在点 $x$ 的 Jacobi 矩阵. 假设 $x^{(j)}$ 已经是接近于 $x^0$. 在 $x^{(j)}$ 附近以 (10.2) 的线性部分

$$f(x^{(j)}) + A(x^{(j)})(x - x^{(j)}) \approx 0$$

代替 (10.2) 的左边. 如果矩阵 $A$ 可逆, 这个线性系统有解

$$x = x^{(j)} - A^{-1}(x^{(j)})f(x^{(j)}),$$

我们希望它比 $x^{(j)}$ 更接近于 $x^0$(见图 10.1, $n = 1$ 的纯量情形). 设 $x^{(0)}$ 是平衡点 $x^0$ 附近给定的初始点. 由上面讨论的启发用递推关系

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \eta^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{10.3}$$

定义 Newton 迭代, 其中位移 $\eta^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ 是线性系统

$$A(x^{(j)})\eta^{(j)} = -f(x^{(j)}) \tag{10.4}$$

的解. 注意, 不需要用矩阵 $A(x^{(j)})$ 的逆去计算 $x^{(j+1)}$, 代之以仅要求 (10.4) 的一个解. 如果 Jacobi 矩阵具有特殊结构, 则在解 (10.4) 时用它是有用的. 显然, 如果迭代 (10.3), (10.4) 收敛于某个 $x^0$, 则 $x^0$ 是 (10.2) 的解, 或者是 (10.1) 的平衡点.

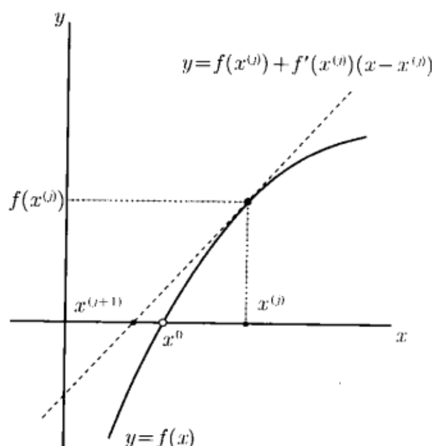



图 10.1　Newton 迭代

**定理 10.1**　假设系统 (10.1) 是光滑的, 有平衡点 $x = x^0$, Jacobi 矩阵 $f_x(x^0)$ 没有零特征值. 则存在 $x^0$ 的邻域 $U$, 使得对任何初始点 $x^{(0)} \in U$, Newton 迭代 (10.3), (10.4) 收敛于 $x^0$. 此外, 对某个 $\kappa_0 > 0$,

$$\|x^{(j+1)} - x^0\| \leqslant \kappa_0 \|x^{(j)} - x^0\|^2, \quad j = 0, 1, 2, \cdots,$$

对 $x^{(0)} \in U$ 一致地成立. □

这条定理可由 Kantorovich 定理得到, 它也提供较精确的误差估计 (见附录 A).

**注**　(1) 注意迭代的收敛性与平衡点的稳定性无关. 不存在零特征值等价于 Jacobi 矩阵 $A(x)$ 在平衡点 $x^0$ 的可逆性. 这也可叙述为映射 $f$ 在 $x^0$ 的*正则性条件*, 或者矩阵 $A(x^0)$ 有最大秩 (等于 $n$).

(2) 这个迭代的收敛性是非常快的. 定理中的估计意味着误差粗略地是逐次迭代的平方. 这样的收敛性称为*二次收敛性*. ◇

### 10.1.2　Newton 法的修正

若 Jacobi 矩阵没有明显的公式, 则每次 Newton 迭代最珍贵的部分是 $f(x)$ 的数值微分, 例如有限差分. 由此, 有几个 Newton 法的修正被提出, 所有这些的目的是为了减少每次迭代所计算函数的数目.

1. Newton *弦*

因为假定 $x^{(0)}$ 是接近于 $x^0$ 的, 所以可不用在每一个得到的点 $x^{(j)}$ 都去重新

计算 Jacobi 矩阵 $A$, 而是对所有迭代都用开始的矩阵 $A(x^{(0)})$. 这个简单的思想导致Newton 弦公式

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \eta^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{10.5}$$

其中位移 $\eta^{(j)}$ 现在被定义为

$$A(x^{(0)})\eta^{(j)} = -f(x^{(j)}). \tag{10.6}$$

**定理 10.2** 在定理 10.1 的条件下, 存在 $x^0$ 的邻域 $U$ 使得对任何初始点 $x^{(0)} \in U$, Newton 弦的迭代 (10.5), (10.6) 收敛于 $x^0$. 此外, 对某个 $0 < \kappa_1 < 1$,

$$\|x^{(j+1)} - x^0\| \leqslant \kappa_1 \|x^{(j)} - x^0\|^2, \quad j = 0, 1, 2, \cdots,$$

对 $x^{(0)} \in U$ 一致地成立. □

**注** (1) Newton 弦方法的收敛性是线性的.

(2) 定理证明的思想是将 (10.5), (10.6) 写为 $\mathbb{R}^n$ 中的离散-时间动力系统

$$x^{(j+1)} = g(x^{(j)}),$$

然后验证映射 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在围绕 $x^0$ 的充分小球内是压缩的. 于是, 压缩映射原理保证平衡点的收敛性并给出误差估计. ◇

2. Broyden 校正

一个有用的方法称为 Broyden 校正, 它是 "真"Newton 迭代和 Newton 弦方法之间的调正.

这个方法的思想是用两个相继的迭代点和在这些点的函数值去校正包含在位移计算中的矩阵 (即使得它接近于在下一步的 Jacobi 矩阵). 为了理解这个方法, 考虑似 Newton 方法第 $j$ 次迭代. 有

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \eta.$$

假设非零位移 $\eta$ 平行于 $x_1$ 轴:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

考虑到对小 $|\delta|$, 尝试用 $x^{(j)}, x^{(j+1)}$ 的坐标以及各个函数值 $f(x^{(j)}), f(x^{(j+1)})$ 去近似在 $x^{(j+1)}$ 的 Jacobi 矩阵. 显然, 没有足够的数据去近似 Jacobi 矩阵的所有元素.

但是, 有一列可以被校正. 事实上, 对第一列,

$$A_{k1}(x^{(j+1)}) \approx \frac{f_k(x^{(j+1)}) - f_k(x^{(j)})}{\delta} = \frac{f_k(x^{(j+1)})}{\|\eta\|^2}\eta_1 - \frac{f_k(x^{(j)})}{\eta_1},$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$, 以及 $A_{kl}$ 表示 $A$ 的第 $k\ l$ 个元素, $\eta_1$ 是 $\eta$ 的第一个分量. $\eta$ 必须从

$$A(x^{(j)})\eta = -f(x^{(j)})$$

找出, 利用 $\eta$ 的特殊形式得

$$A_{k1}(x^{(j)}) = -\frac{f_k(x^{(j)})}{\eta_1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

因此, 下面 "老" 的和 "新" 的第一列元素之间的近似关系成立:

$$A_{k1}(x^{(j+1)}) \approx A_{k1}(x^{(j)}) + \frac{f_k(x^{(j+1)})}{\|\eta\|^2}\eta_1, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $k, l = 1, 2, \cdots, n$, 可以形式地写出

$$A_{kl}(x^{(j+1)}) \approx A_{kl}(x^{(j)}) + \frac{f_k(x^{(j+1)})}{\|\eta\|^2}\eta_l.$$

假设所有列除了第一列都未被校正 ($\eta_l = 0$, 对 $l = 2, 3, \cdots, n$). 最后一个表达式建议用公式

$$A^{(j+1)} = A^{(j)} + \frac{f_k(x^{(j+1)})}{\|\eta^{(j)}\|^2}[\eta^{(j)}]^{\mathrm{T}} \tag{10.7}$$

去校正矩阵, 其中 T 表示转置. 如果 $\eta$ 平行于一个坐标轴, 这就给出 Jacobi 矩阵对应列的适当的校正. 由于这个原因, 称它为**秩 1 校正**.

注意到上面的启发, 定义 (Newton) Broyden 迭代如下: 设 $A^{(0)} = A(x^{(0)})$ 是在初始点 $x^{(0)}$ 的 Jacobi 矩阵. Broyden 迭代定义为

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \eta^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{10.8}$$

其中位移 $\eta^{(j)}$ 是线性方程组

$$A^{(j)}\eta^{(j)} = -f(x^{(j)}) \tag{10.9}$$

的解. 其中矩阵 $A^{(j+1)}$ 被用在由 (10.7) 给出的下一个迭代.

所得的方法的收敛性比 Newton 弦修正更好. 在某些条件下 (见附录 D 中所述的文献), Broyden 迭代 (10.7)~(10.9) **超线性地**收敛于系统 (10.2) 的平衡点 $x^0$, 即下面性质成立:

$$\frac{\|x^{(j+1)} - x^0\|}{\|x^{(j)} - x^0\|} \to 0, \quad \text{当 } j \to \infty \text{ 时}.$$

**注** (1) 没有理由期望 $A^{(j)}$ 收敛于在平衡点 $x^0$ 的 Jacobi 矩阵 $A(x^0)$, 即使 Broyden 迭代当 $j\to\infty$ 时收敛于 $x^0$. 因此一般不能用最后所得的矩阵 $A^{(j)}$ 作为 Jacobi 矩阵, 例如去计算 $x^0$ 的特征值.

(2) 正如我们已经指出的, 如果 Jacobi 矩阵有某些特殊结构 (即带状), 通常尝试用它去求解 $\eta^{(j)}$ 的线性系统. 但是, 注意, Broyden 校正 (10.7) 不能保持这种特殊结构. ◇

3. 收敛性准则

当要求的精度达到 (或者收敛性根本没有希望) 时要终止任何一个所述的迭代, 某些收敛性准则必须指定. 有两个收敛性度量: 在第 $j$ 次迭代的位移范数 $\|\eta^{(j)}\|$ 和函数的范数 $\|f(x^{(j)})\|$, 如果迭代收敛, 则这两个范数必须趋于零. 但是, 可容易构造例子, 在有限的第 $j$ 步, 小 $\|\eta^{(j)}\|$ 并不得知满足 (10.2) 的对应 $x^{(j)}$ 具有合理的精度. 因此, 下面的组合精度

$$\|\eta^{(j)}\|<\varepsilon_x \text{ 和 } \|f(x^{(j)})\|<\varepsilon_f$$

证明是最可靠的. 其中 $\varepsilon_x$ 和 $\varepsilon_f$ 是使用者定义的容许量.

### 10.1.3 平衡点分析

1. 稳定性

按要求的精度找到平衡点后, 接下来的任务是分析在它附近的相图, 特别, 确定 $x^0$ 是稳定还是不稳定.

在一般情形, $x^0$ 的稳定性是由它的特征值确定, 即由它的特征多项式

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$$

的根确定. 在这个多项式大多数现有的特征值的解法中永远没有明确的构造. 代之以用某些变换将 $A$ 化为 (分块) 对角形. 从这些形式特征值容易求得. 于是, 在左 (右) 半平面特征值的数目给出 $x^0$ 的稳定 (不稳定) 流形的维数. 不出现 $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$ 的特征值意味着 (指数式) 稳定 (见第 2 章). 事实上, 为了确定稳定性, 甚至不需要计算特征值. 存在一些方法去验证稳定性, 只要计算某些矩阵的行列式即可, 这些矩阵的元素是由矩阵 $A$ 的元素所构造, 或者由 $p(\lambda)$ 的系数按简单规则构造.

2. 不变流形的局部近似

设 $x^0=0$ 是 (10.1) 的鞍点, 它有 $n_-$ 个特征值在左半平面, $n_+$ 个特征值在右半平面, $n_-+n_+=n$. 在矩阵 $A=f_x(x^0)$ 的特征基下, (10.1) 可写为

$$\begin{cases}\dot u=Bu+g(u,v),\\ \dot v=Cv+h(u,v),\end{cases}\tag{10.10}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^{n_+}, v \in \mathbb{R}^{n_-}$, $n_+ \times n_+$ 矩阵 $B$ 只有 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ 的特征值, $n_- \times n_-$ 矩阵 $C$ 只有 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ 的特征值. 函数 $g, h = O(\|(u,v)\|^2)$ 光滑. 局部地, $x^0$ 的稳定和不稳定不变流形可表示为光滑函数

$$W^s(0) = \{(u,v) : u = U(v)\}, \quad W^u(0) = \{(u,v) : v = V(u)\}$$

的图像, 其中 $U : \mathbb{R}^{n-} \to \mathbb{R}^{n+}$, $U(0) = 0$, $U_v(0) = 0$, $V : \mathbb{R}^{n+} \to \mathbb{R}^{n-}$, $V(0) = 0$, 以及 $V_u(0) = 0$. 函数 $U$ 和 $V$ 的 Taylor 展开的系数可用类似于第 5 章求中心流形的待定系数法求得. 利用投影技巧, 可以避免将 (10.1) 变换到特征形式 (10.10), 代之以在原来基上工作. 在情形 $\dim W^u(0) = \mathrm{codim}\, W^s(0) = 1$(即 $n_+ = 1, n_- = n-1$), 用计算流形的二次近似来说明这个技巧. 考虑

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{10.11}$$

其中 $A$ 有一个正特征值 $\lambda > 0$ 和 $(n-1)$ 个特征值具负实部. 设 $q \in \mathbb{R}^n$ 是对应于 $\lambda$ 的特征向量,

$$Aq = \lambda q,$$

设 $p \in \mathbb{R}^n$ 表示对应于相同特征值的伴随特征向量

$$A^{\mathrm{T}} p = \lambda p.$$

将这些向量用

$$\langle q, q \rangle = \langle p, q \rangle = 1$$

标准化, 其中 $\langle p, q \rangle = p^{\mathrm{T}} q$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准数量积. 现在任何向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 可唯一表示为形式

$$x = \xi q + y,$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$ 由

$$\begin{cases} \xi = \langle p, x \rangle, \\ y = x - \langle p, x \rangle q \end{cases}$$

给出. 向量 $y \in \mathbb{R}^n$ 属于对应于所有非正特征值的特征空间 $T^s$, 即满足 $\langle p, y \rangle = 0$. 系统 (10.11) 取形式

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda \xi + G(\xi, y), \\ \dot{y} = Ay + H(\xi y), \end{cases} \tag{10.12}$$

其中

$$G(\xi, y) = \langle p, F(\xi q + y) \rangle = \langle y, Qy \rangle + \cdots,$$

这里某个对称 $n \times n$ 矩阵 $Q = Q^{\mathrm{T}}$, 而

$$H(\xi, y) = F(\xi q + y) - \langle p, F(\xi q + y)\rangle q = r\xi^2 + \cdots,$$

其中 $r \in T^s$, $\langle p, r\rangle = 0$. 上面最后两个公式中的省略号表示所有未写出的二次和高阶项, 它们在下面的讨论中没有关系.

不稳定流形 $W^u(0)$ 可局部地用函数

$$y = Y(\xi) = s\xi^2 + O(\xi^3)$$

表示, 其中 $s \in T^s \subset \mathbb{R}^n$ 是一个未知向量. 显然, $Y(\xi)$ 满足方程 (不变性条件)

$$AY + H(\xi, Y) - (\lambda\xi + G(\xi, Y))Y_\xi = 0.$$

将 $Y(\xi)$ 的表达式代入并合并 $\xi^2$ 项, 得到一个从中可求出 $s$ 的方程

$$(2\lambda I_n - A)s = r.$$

稳定流形 $W^s(0)$ 由

$$\xi = X(y) = \langle y, Ry\rangle + O(\|y\|^3)$$

给出, 其中 $y \in T^s$, 以及 $R = R^{\mathrm{T}}$ 是待定的对称矩阵. 函数 $X(y)$ 满足方程

$$\lambda X + G(X, y) - \langle X_y Ay + H(X, y)\rangle = 0.$$

二次项提供求解 $R$ 的方程为

$$\langle y, (\lambda R + Q - 2A^{\mathrm{T}}R)y\rangle = 0.$$

其中 $Q = Q^{\mathrm{T}}$ 由上面定义. 因此对称矩阵 $R$ 可由解下面的矩阵方程得到

$$(A^{\mathrm{T}} - \lambda I_n)R + RA = Q.$$

我们将验证这个方程有唯一对称解, 以及用 $F(x)$ 的二阶偏导数来表达 $r$ 与 $Q$ 的任务留给读者.

**注**　(1) 在鞍点附近的不变流形 $W^{s,u}$ 的切线近似或二次近似, 可按时间的向前或向后的积分来大范围计算它们. 这个方法用在如果流形是一维且系统 (10.1) 不是难以应付, 特别对平面系统.

(2) 映射的鞍点不动点附近的稳定和不稳定流形的近似可用类似的方法得到.

◇

### 10.1.4　极限环的定位

寻求 (10.1) 的极限环显然是比定位平衡点更为复杂的问题. 一般, 没有一个正规的方法去解决这个问题. 如果系统具有稳定环 $L_0$, 可用数值积分 (模拟) 尝试去找到它. 如果积分的初始点属于环 $L_0$ 的吸引盆, 则被计算的轨道在将来时间收敛于 $L_0$. 这种方法对定位鞍点环失效, 即使改变时间方向.

对一般的环, 可*局部地*叙述这个问题. 假设环的位置近似地知道, 然后更精确地定位它的位置. 如果系统依赖于参数这种方法自然产生. 于是, 也许我们对某些参数值知道环的位置, 而希望用小步距对某个参数去 "延拓" 它. 在这个延拓过程中双曲环将连续地变化, 它在 "前面" 参数值的位置给 "接下来" 的参数值提供环的好近似.

环的周期 $T_0$ 通常是不知道的. 将环的定位问题叙述为在固定区间上的*周期边值问题* (BVP) 是方便的. 特别, 把 $T_0$ 考虑为参数并引入系统

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = T_0 f(u). \tag{10.13}$$

它与 (10.1) 的不同在于一个时间尺度因子 $T_0$, 这里的新时间是 $\tau$. 显然, (10.13) 的具某个固定 $T_0$ 的满足*周期边值条件*

$$u(0) = u(1) \tag{10.14}$$

的解 $u(\tau)$ 对应于 (10.1) 的 $T_0$ 周期解. 但是, 条件 (10.14) 并不定义唯一周期解. 事实上, 周期 (BVP)(10.13), (10.14) 的解的任何时间移位是另外一个解. 因此, 为了在所有这些解中 "选择" 对应于环的解, *额外的相条件*:

$$\Psi[u] = 0 \tag{10.15}$$

必须加到问题 (10.13), (10.14) 中去. 其中 $\Psi[u]$ 是定义在周期解上的*纯量泛函*. 存在几种方法设置相条件 (10.15),

条件

$$\Psi[u] = g(u(0)) = 0 \tag{10.16}$$

(其中 $g(x)$ 是某个光滑纯量函数) 表明所选择的解在 $\tau = 0$ 通过曲面

$$\Sigma_0 = \{u \in \mathbb{R}^n : g(u) = 0\}$$

上的点. 如果 $v(\tau)$ 是周期为 1 的光滑向量值函数, 则

$$\Psi[u] = \langle u(0) - v(0), \dot{v}(0) \rangle = 0 \tag{10.17}$$

给定的解 $u(\tau)$ 在 $\tau=0$ 通过在 $\tau=0$ 垂直于闭曲线 $\{u: u=v(\tau),\ \tau\in[0,1]\}$ 的超平面. "参考" 解 $v$ 假设已知. 如果对某个参数延拓极限环, $v(\tau)$ 可看作对应于在 "前面" 参数值的极限环的解.

但是, 最可靠的相条件是由

$$\Psi[u]=\int_0^1\langle u(\tau),\dot{v}(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau=0 \tag{10.18}$$

提供, 其中 $v(\tau)$ 是周期 1 参考解. 条件 (10.18) 称为积分相条件. 这是 $u$ 和 $b$ 之间关于可能的时间位移 $\sigma$ 的距离

$$\rho(\sigma)=\int_0^1\|u(\tau+\sigma)-v(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau$$

有局部极小值的必要条件 (见练习 3).

为了求解周期 (BVP) (10.13)~(10.15), 选择哪个相条件是无所谓的, 我们必须把它化为有限维问题. 对这种离散化存在几个方法. 下面简短地叙述它们中最常用的几个.

1. 打靶法和多重打靶法

设 $\psi^{\tau}_{T_0}(u)$ 是 (10.13) 具初始点 $u$ 在时间 $\tau$ 的解, 应该可以用某个 ODE 算法数值地计算它. 于是, 问题 (10.13), (10.14), (10.16) 等价于求解系统

$$\begin{cases}\psi^1_{T_0}(u^0)-u^0=0,\\ g(u^0)=0,\end{cases} \tag{10.19}$$

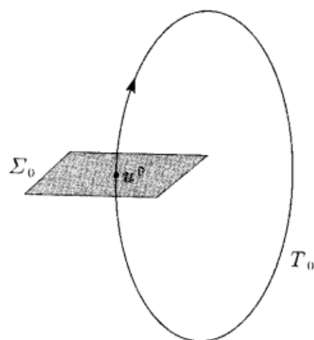



图 10.2　用打靶法定位环

其中 $u^0=u(0)$. 这个系统是 $n+1$ 个未知数, 即 $u^0$ 的分量和 $T_0$ 的 $n+1$ 个纯量方程的方程组①, 可尝试用拟 Newton 法来求解. 系统 (10.19) 的 Jacobi 矩阵可用数值微分或者变分方程得到. 若环没有单位乘子 $\mu=1$, 且曲面 $\Sigma_0$ 与环横截相交, 则 Newton 迭代收敛于从任一充分接近的近似开始的环解. 显然, 求解 (10.19) 意味着在截面 $\Sigma_0$ 上求点 $u^0$, 它是相应 Poincaré 映射的不动点, 以及回复时间 $T_0$ (见图 10.2). 这个方法的精度取决于大范围积分的误差.

**注**　注意, 环 $L_0$ 的乘子 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n-1}$, 可如矩阵

$$\left.\frac{\partial\psi^1_{T_0}(u)}{\partial u}\right|_{u=u^0}$$

① 它们中前面 $n$ 个由数值确定.

的特征值求得, 假若不考虑 $L_0$ 的一个乘子 $\lambda_n=1$, 因为它总是出现. 如果 Newton 迭代收敛, 这个矩阵可容易从 (10.19) 的最后一次 Newton 迭代中的 Jacobi 矩阵求得. ◇

上面的*简单打靶法*在许多情形失效, 特别, 如果考虑的环是鞍点型. 那时, (10.13) 数值得到的解与正确解 $\psi_{T_0}^{\tau}(u)$ 由于在不稳定方向强误差增长而可以有很大的不同. 我们也许可将单位区间 [0, 1] 划分成 $N$ 个 (非零) 子区间, 希望在每个小区间内积分的误差没有增长那么多, 以企图减少这个发散的影响. 更确切地说, 引入网点

$$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=1,$$

并记 $\Delta_j=\tau_{j+1}-\tau_j,\ j=0,1,\cdots,N-1$. 设 $u^j=u(\tau_j)$ 是 (未知) 解在网点的值. 于是 $u^j, j=0,1,\cdots,N-1$ 和 $T_0$ 可由系统

$$\begin{cases}\psi_{T_0}^{\Delta_0}(u^0)-u^1=0,\\ \psi_{T_0}^{\Delta_1}(u^1)-u^2=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ \psi_{T_0}^{\Delta_{N-1}}(u^{N-1})-u^0=0,\\ g(u^0)=0\end{cases}\tag{10.20}$$

求得. 这是每一个 $u^j,\ j=0,1,\cdots,N-1$ 的 $n$ 个分量和尺度化因子 (周期)$T_0$ 的 $nN+1$ 个纯量方程的方程组. 本质上, 这个方法等价于由 $N$ 个映射的*复合*

$$P=P_{N-1}\circ\cdots\circ P_1\circ P_0$$

表示的 Poincaré 映射 $P$, 其中

$$P_j:\Sigma_j\to\Sigma_{j+1},\quad j=0,1,\cdots,N-1$$

是

$$\Sigma_0,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_{N-1},\Sigma_N=\Sigma_0$$

中每对相继截面之间沿着 (10.13) 的轨道的*对应映射*(图 10.3). 这个方法称为*多重打靶法*, 它比单打靶法有较好的数值稳定性, 虽然鉴于相同的理由它也可能失败. 通常, 当应用多重打靶法时, 取相对较少的网点 (小 $N$) 以避免求解在拟 Newton 法中出现的多重线性问题的数值困难.

2. *有限差分法*

现在用充分大数目的网点对 [0,1] 作分划. 于是 $\Delta_j$ 将很小, 而在点 $\tau_j$ 的导数 $\dot{u}$ 可用有限差分近似, 例如

$$\dot{u}(\tau_j)\approx\frac{u^{j+1}-u^{j-1}}{\tau_{j+1}-\tau_{j-1}},\quad j=1,2,\cdots,N-1$$

于是, BVP (10.13)~(10.15) 可用方程组

$$\begin{cases} u^{j+1} - u^{j-1} - (\tau_{j+1} - \tau_{j-1})T_0 f\left(\dfrac{1}{2}(u^{j+1} + u^j)\right) = 0, \\ u^N - u^0 = 0, \\ \psi[u^0, u^1, \cdots, u^N] = 0 \end{cases} \tag{10.21}$$

近似, 其中 $j = 1, 2, \cdots, N-1$, 以及 $\psi[\cdot]$ 是相条件 (10.15) 的适当离散化. 例如, 相条件 (10.16) 将理解为 $\psi = g(u^0) = 0$. 系统 (10.21) 可以写为 (消去 $u^N$)$u^j, j = 0, 1, \cdots, N-1$ 的 $nN$ 个分量和 $T_0$ 的 $nN+1$ 个纯量方程的系统, 然后用 Newton 法求解, 只要通常的正则性和充分接近的初始值给定. 应该指出, 对 (10.21) 的 Newton 迭代所出现的 Jacobi 矩阵有特殊 (带边) 结构, 因此可有效地用来求解对应的线性问题.

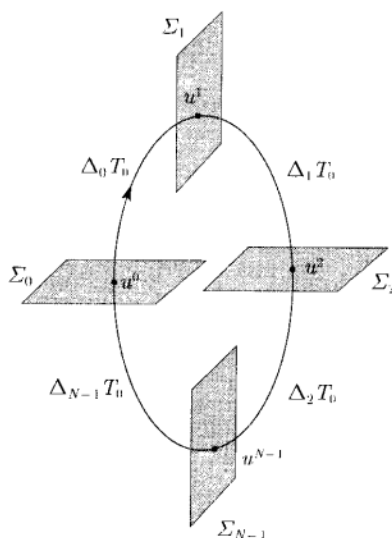



图 10.3 用多重打靶法定位环

用 (10.21) 求得 (10.13)~(10.15) 的光滑解的近似精度可用

$$\|u(\tau_j) - u^j\| = O(h^2), \quad \text{当 } h = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta_j \to 0$$

估计. 因此, 为了达到解的合理精度, 必须取充分大的 $N$.

3. 正交配置法

考虑 BVP (10.13), (10.14) 以及积分相条件 (10.18), 并再次引入 $N-1$ 个网点

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = 1$$

对区间 [0,1] 进行分划, 但是, 现在用逐段可微的连续函数来近似这个解, 它们在每个子区间 $[\tau_j,\tau_{j+1}], j=0,1,\cdots,N-1$ 上是最大次数为 $m$ 的向量多项式$u^{(j)}(\tau)$, "配置" 要求在每个子区间内的 $m$ 个 配置点

$$\tau_j<\zeta_{j,1}<\zeta_{j,2}<\cdots<\zeta_{j,m}<\tau_{j+1}$$

处近似解满足正确系统 (10.13), 即要求

$$\left.\frac{\mathrm{d}u^{(j)}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\zeta_{j,i}}=T_0f(u^{(j)}(\zeta_{ji})),\tag{10.22}$$

对 $i=1,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,N-1$.

用向量

$$u^{jk}=u^{(j)}(\tau_{j,k})\in\mathbb{R}^n,\quad k=0,1,\cdots,m$$

来描述每个多项式 $u^{(j)}(\tau),\ j=0,1,\cdots,N-1$ 是方便的, 它们表示 (未知) 解在由

$$\tau_{j,k}=\tau_j+\frac{k}{m}(\tau_{j+1}-\tau_j),\quad j=0,1,\cdots,N-1,\ k=0,1,\cdots,m$$

给出的等距点

$$\tau_j=\tau_{j,0}<\tau_{j,1}<\tau_{j,2}<\cdots<\tau_{j,m}=\tau_{j+1}$$

上的值. 注意, 由连续性 $u^{j-1,m}=u^{j,0}$ 对 $j=1,2,\cdots,N-1$. 于是多项式 $u^{(j)}(\tau)$ 可用插值公式表示为

$$u^{(j)}(\tau)=\sum_{i=0}^{m}u^{j,i}l_{j,i}(\tau),\tag{10.23}$$

其中 $l_{j,i}(\tau)$ 是 Lagrange 多项式基

$$l_{j,i}(\tau)=\prod_{k=0,k\neq i}^{m}\frac{\tau-\tau_{j,k}}{\tau_{j,i}-\tau_{j,k}}.$$

这些多项式满足

$$l_{j,i}(\tau_{j,k})=\begin{cases}1, & 若\ i=k,\\ 0, & 若\ i\neq k.\end{cases}$$

(验证), 这证明 (10.23) 是正确的.

方程 (10.22) 现在可以作为 $u^{j,i}$ 的方程来处理. 周期性条件 (10.14) 以及相条件 (10.18) 也可用它们的离散化

$$u^{0,0}=u^{N-1,m}\tag{10.24}$$

和

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{m}\omega_{j,i}\langle u^{j,i},\dot{v}^{j,i}\rangle = 0 \tag{10.25}$$

代替, 其中 $\dot{v}^{j,i}$ 是参考周期解在点 $\tau_{j,i}$ 的导数值, $\omega_{j,i}$ 是 Lagrange 二次系数. 方程 (10.22), (10.24) 和 (10.25) 组成一个 $u^{j,i}$ 的未知分量和周期 $T_0$ 的 $nmN+n+1$ 个纯量方程的系统. 方程的个数等于未知数的个数. 如果考虑到 Jacobi 矩阵的分块结构①, 所得的有限维系统可用拟 Newton 法有效地求解.

所述方法最棘手的问题还没有触及到, 就是如何选择配置点 $\{\xi_{j,i}\}$. 可以尝试协调它们的位置使得近似误差最小. 可以证明, 最佳选择是把它们放在 Gauss 点上, 它们是 $m$ 次 Lagrange 多项式在相关子区间 $[\tau_j,\tau_{j+1}]$ 上的根 $\zeta_{j,i},\ i=1,2,\cdots,m$. 这些根在标准区间 $[0,1]$ 上可数值地求得 (见练习 4), 且容易地转移到每个 $[\tau_j,\tau_{j+1}]$ 上. Lagrange 多项式在此区间上组成给出这个方法名字的正交系. 在 Gauss 点的配置使得用 (10.22), (10.24), (10.25) 在网点近似 (10.13), (10.14), (10.18) 的光滑解具有非常高的精度, 即当 $h=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta_j\to 0$ 时,

$$\|u(\tau_j)-u^{j,0}\| = O(h^{2m}).$$

正交配置方法已被证明在确定极限环定位的诸方法中是最可靠的.

正如我们将看到的, 所述的离散方法容易用在参数变化下极限环的自动数值延拓.

**注** 离散–时间系统 $x\mapsto f(x)$ 的周期 $k$ 轨道的定位可用拟 Newton 法对系统

$$f^k(x)-x=0$$

来执行, 其中 $f^k$ 是映射 $f$ 的 $k$ 次迭代. ◇

## 10.2 单参数分支分析

现在考虑依赖于单参数的连续–时间系统②

$$\dot{x}=f(x,\alpha),\ x\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}^1, \tag{10.26}$$

这里 $f$ 为 $(x,\alpha)$ 的光滑函数. 系统的分支分析意味着构造它的单参数分支图, 特别, 研究平衡点和极限环关于参数的依赖性, 以及它们的分支的定位和分析.

① 也可用这个矩阵求环的乘子.

② 如果出现其他参数, 就假设它们为固定的.

### 10.2.1　平衡点与环的延拓

(10.26) 的平衡点满足

$$f(x,\alpha)=0, \tag{10.27}$$

这是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以 $(x,\alpha)$ 为坐标的 $n$ 个纯量方程的系统. 正如我们早已指出, 一般, (10.27) 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义一个一维光滑流形 (曲线)$M$. 这条*平衡点曲线*的计算给出 (10.26) 的平衡点关于参数 $\alpha$ 的依赖性 (见图 10.4).

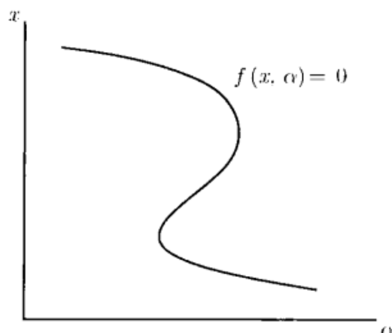



图 10.4　平衡点曲线

计算曲线 $M$ 的问题是一般 (有限维) *延拓问题*的一个特殊情形, 就是要在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中求由 $n$ 个方程

$$F(y)=0,\quad F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n \tag{10.28}$$

定义的曲线.

由隐函数定理, 系统 (10.28) 局部定义了一条通过点 $y^0$ 满足 (10.28) 的光滑曲线 $M$, 只要秩 $J=n$, 这里 $J=F_y(y^0)$ 是 (10.28) 在 $y^0$ 的 Jacobi 矩阵 (*正则性*). 在 (10.27), $y=(x,\alpha)$, 正则性条件在双曲平衡点和一般的折点无疑满足.

(10.28) 的延拓问题的数值解意味着计算一点列

$$y^1,y^2,y^3,\cdots,$$

按所要求的精度近似这条曲线 $M$. 初始点 $y^0$ 假设已经知道, 它充分接近于 $M$(或者属于它), 从这点按两个可能的方向之一产生的点列假设已经知道. 在平衡点情形, 对某个固定的初始值 $\alpha^0$, 用上一节所介绍的方法之一可找到通常对应于 (10.26) 的平衡点 $x^0$ 的点 $y^0=(x^0,\alpha^0)$.

大部分用在分支分析中的延拓算法所执行的*预测校正法*, 包含三个重复执行的基本步骤:

(i) 下一点的预测;

(ii) 校正;

(iii) 步长的控制.

1. **预测**

假设序列中的合格点 $y^i$ 已经被找到. 然后, 序列中的下一点可用**切线预测**

$$\tilde{y}^{j+1} = y^j + h_j v^j \tag{10.29}$$

推测, 其中 $h_j$ 是 **流动步长**, $v^j \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是曲线 $M$ 在点 $y^j$ 的标准切向量, $\|v^j\| = 1$(见图 10.5(a)). 如果 $y(s)$ 是曲线在 $y^j$ 附近的参数化, 譬如说, 用满足 $y(0) = y^j$ 的弧长, 然后, 将 $y = y(s)$ 代入 (10.28) 并计算关于 $s$ 的导数, 由于 $v^j = \dot{y}(0)$(点是关于 $s$ 的导数), 给出

$$J(y^j)v^j = 0 \tag{10.30}$$

(现在点表示关于 $s$ 的导数), 其中 $J(y^j)$ 是 (10.28) 在 $y^j$ 的 Jacobi 矩阵

$$J(y^j) = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y^j}.$$

由正则性假设① 秩 $J(y^j) = n$, 系统 (10.30) 有唯一解 (包括数量倍数). 为了从 (10.30) 计算的切向量, 必须选定它的范数. 为做到这一点, 最简单的办法是先安置某个 $v_{i_0} = 1$, 对其他分量求解这个系统, 然后将所得向量标准化, 小心沿着曲线保持适当的方向. 指标 $i_0$ 保证对其他分量线性系统的可解性允许存在. 等价地, 可以求解 $(n+1)$ 维附加系统

$$\begin{pmatrix} J \\ (v^{j-1})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} v^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $v^{j-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是曲线上前面一个点 $y^{j-1}$ 的切向量. 如果点 $y^j$ 和 $y^{j-1}$ 充分接近, 这个系统对正则曲线 $M$ 是非奇异的. 解向量 $v^j$ 在点 $y^j$ 切于这曲线并满足标准化条件

$$\langle v^{j-1}, v^j \rangle = 1,$$

由此沿着这条曲线保持方向.

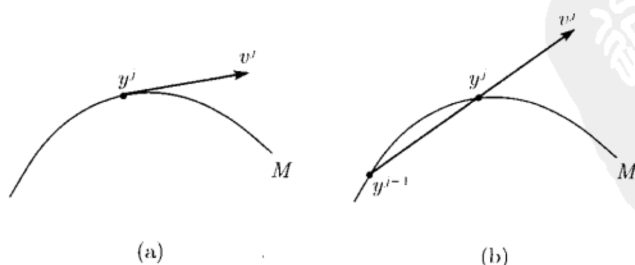



图 10.5　(a) 切线预测; (b) 割线预测

① 基本上 $M$ 的正则性等价于在每一点 $y \in M$ 唯一切方向的存在性.

另一个流行的预测方法是**割线预测**. 它要求在曲线上有两个先前 (不同) 的点 $y^{j-1}$ 和 $y^j$. 于是, 由 (10.29) 给出这个预测, 这里

$$v^j = \frac{y^{j-1} - y^j}{\|y^{j-1} - y^j\|} \tag{10.31}$$

(见图 10.5(b)). 这个方法不能用在曲线上的第一点 $y^1$.

2. 校正

有了可能接近于这条曲线的预测点 $\tilde{y}^{j+1}$, 需要在一定的精度内定位这条曲线上的下一点 $y^{j+1}$. 这个校正通常是由某个拟 Newton 迭代来完成. 而标准的 Newton 迭代只能用于方程的个数等于未知数的个数的系统. 因此, 额外的数量条件

$$g^j(y) = 0$$

必须附加到 (10.28), 以便应用 Newton 法于系统

$$\begin{cases} F(y) = 0, \\ g^j(y) = 0. \end{cases} \tag{10.32}$$

几何上这意味着要找曲线 $M$ 与 $\tilde{y}^{j+1}$ 附近的某个曲面的交点. 自然, 假设校正点 $\tilde{y}^{j+1}$ 属于这个曲面 (即 $g^j(\tilde{y}^{j+1}) = 0$), 存在几个不同的方法指定函数 $g^j(y)$.

(自然延拓) 最简单的方法是取一个通过点 $\tilde{y}^{j+1}$ 的超平面, 它与一个坐标轴垂直, 即令

$$g^j(y) = y_{i_0} - \tilde{y}^{j+1}_{i_0}. \tag{10.33}$$

显然, $i_0$ 的最佳选择是使得 $v^j$ 的分量具有最大绝对值的指标 (见图 10.6(a)). 在这情形, 坐标 $y_{j_0}$ 沿着 $M$ 局部地以最快的速度改变. 显然指标 $i_0$ 是逐点不同.

(伪弧长延拓) 另一个可能是选择通过点 $\tilde{y}^{j+1}$ 而与向量 $v^j$ 垂直的超平面 (见图 10.6(b))

$$g^j(y) = \langle y - \tilde{y}^{j+1}, v^j \rangle = \langle y - y^j, v^j \rangle - h_j. \tag{10.34}$$

如果曲线是正则 (秩 $J(y) = n$) 的, 且步长 $h_j$ 充分小, 可以证明, 对这两种方法 (10.32) 的 Newton 迭代将在曲线 $M$ 上从预测点 $\tilde{y}^{j+1}$ 向点 $y^{j+1}$ 收敛. 注意, 可以在最后一个 Newton 迭代, 从计算 (10.32) 的 Jacobi 矩阵中提取 (10.30) 中所需要的矩阵 $J(y^{j+1})$. 此外, 在自然延拓的流动步中所用的指标 $i_0$ 可应用来确定 (10.30) 中 $v^{j+1}_{i_0} = 1$ 的下一个切向量 $v^{j+1}$.

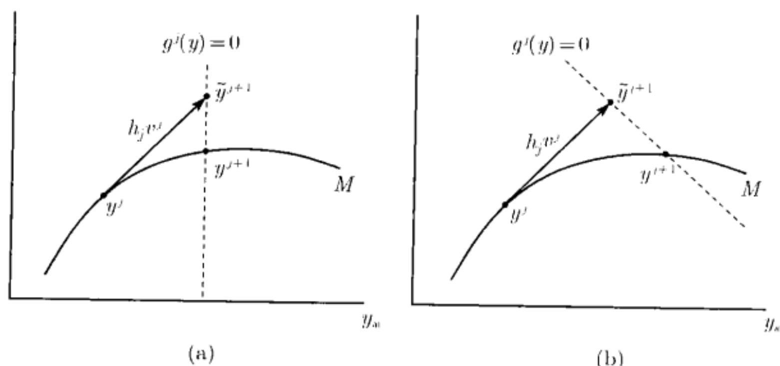



图 10.6 (a) 自然延拓; (b) 伪弧长延拓

(Moore-Penrose 延拓) (10.32) 中的函数 $g^j(y)$ 在 Newton 迭代过程中可能是合适的. 例如, 其上发生流动迭代的平面可以使得与满足 $J(Y^{k-1})V^k=0$ 的标准化向量 $V^k$ 垂直, 这里 $Y^{k-1}$ 是上一个 Newton 迭代所得的点, 因此 (见图 10.7)

$$g_k^j(y)=\langle y-Y^{k-1},V^k\rangle.$$

对第一个迭代, $Y^0=y^j+hv^j, V^1=v^j$. 注意, 向量 $V^k, k\geqslant 2$, 切于 "扰动曲线" $F(Y)=F(Y^{k-1})$ 上点 $Y^{k-1}$. 可以证明, 这个修改迭代在正则性条件下局部收敛. 练习 13 解释这个延拓方法和 Moore-Penrose 矩阵逆 之间的关系.

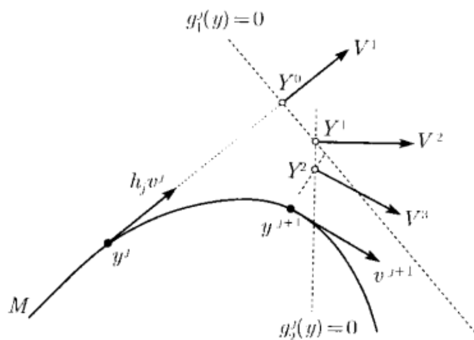



图 10.7 Moore-Penrose 延拓

3. 步长的控制

存在许多精致的算法去控制步长 $h_j$. 但是, 最简单的收敛性 - 相关控制被证明是可靠且容易使用. 就是说. 如果在规定次数的迭代后仍未出现收敛性, 就得减小步长并重复校正; 如果仅在几次迭代后达到收敛性要求, 就增大关于 $h^j$ 的步长 $h^{j+1}$; 如果在 "适当" 次数迭代后收敛性发生, 就将保持流动步长为 $h^{j+1}=h^j$.

**注**　(1) 上面叙述的延拓方法显然可以应用到计算离散 - 时间系统

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^1$$

的*不动点曲线*. 事实上, 对应的方程

$$f(x,\alpha) - x = 0$$

具有 (10.28) 形式.

(2) 单参数系统中的极限环延拓也可化为延拓问题 (10.28), 即把环延拓的周期边值问题

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) - Tf(u(\tau),\alpha) = 0, \\ u(1) - u(0) = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \langle u(\tau), \dot{u}_0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0 \end{cases}$$

离散化, 其中, 最后一个方程是参考解 $u_0(\tau)$ 的积分相条件. 所得的有限维系统有形式

$$\mathcal{F}(\xi,\alpha) = 0, \quad \mathcal{F}: \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N,$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 包含对应于 $u(\cdot)$ 和环周期 $T$ 的离散化数据, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ 是系统的自由参数. 例如, $\xi \in \mathbb{R}^N$ 可由出现在正交配置中的插值系数 $\{u^{j,i}\}$ 和 $T$ 组成. 这个延拓问题在 $\xi$ 空间和参数轴的直积中定义了一条曲线. 包含在相条件中的参考周期解 $u_0$ 通常取为上一步沿着这曲线所得到的对应于环的解. ◇

### 10.2.2　余维 1 分支的探测和定位

在连续 - 时间系统, 沿着平衡点曲线存在的两类一般余维 1 分支可被探测, 它们是折分支和 Hopf 分支.

下面的主要思想是定义某些光滑纯量函数, 它们在分支点有正则零点. 这样的函数称为*测试函数*或*分支函数*. 在曲线

$$F(y) = 0, \quad F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

上两个相继点 $y^k$ 和 $y^{k+1}$ 之间的分支点称为*探测点*, 如果测试函数在这些点有相反的符号

$$\psi(y^k)\psi(y^{k+1}) < 0. \tag{10.35}$$

于是, 可尝试*定位*一个点, 在此点 $\psi$ 如正则点一样更精确地为零, 即对系统

$$\begin{cases} F(y) = 0, \\ \psi(y) = 0, \end{cases} \tag{10.36}$$

例如, 以 $y^{(0)} = y^k$ 为初始点, 用拟 Newton 法. 显然, 应用 Newton 法测试函数 $\psi$ 在平衡点曲线的邻域内必须得确定并可微. 也许发生测试函数使得 (10.36) 的 Jacobi 矩阵在曲线 $\psi = 0$ 上的点是奇异的. 在这一情形, 标准的 Newton 法是不合适的, 代之可以用一维割线法沿着此曲线定位 $\psi = 0$.

下面描述两个简单的测试函数去探测和定位连续–时间系统的折分支点和 Hopf 分支点. 考虑对应于系统 (10.26) 的平衡点曲线

$$f(x,\alpha) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{10.37}$$

1. 折点的探测和定位

显然, 函数

$$\psi_t(x,\alpha) = \lambda_1(x,\alpha)\lambda_2(x,\alpha)\cdots\lambda_n(x,\alpha) \tag{10.38}$$

是折分支测试函数, 其中 $\lambda_j(x,\alpha)$ 是 Jacobi 矩阵 $A(x,\alpha) = f_x(x,\alpha)$ 的特征值, 此函数光滑且在一般折分支点有正则零点 (验证). 此外, (10.36) 在点 $y = (x,\alpha)$ 的 Jacobi 矩阵是非奇异的, 故可用 Newton 法定位. 如果 Newton 迭代收敛, 它就是具零特征值的平衡点的坐标且临界参数值在此点存在.

为计算测试函数 (10.38), 形式上要求知道 $A$ 的所有特征值. 这些特征值在曲线上的每一点可用标准的程序之一数值地找到. 但是, 有一个明显的方法避免特征值的计算. 注意, (10.38) 右端的乘积只不过是 $A(x,\alpha)$ 的行列式, 它可有效的计算而不用考虑其特征值 (例如用 Gauss 消去法). 因此, 对折分支通用的测试函数是

$$\psi_t(x,\alpha) = \det\left(\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\right). \tag{10.39}$$

另一个定位折点的方法是监控平衡点曲线上关于参数的*绝值点*. 显然, 在一般的折点切向量 $v$ 的 $\alpha$ 分量改变符号.

2. Hopf 点的探测和定位

考虑函数

$$\psi_H(x,\alpha) = \prod_{i>j}(\lambda_i(x,\alpha) + \lambda_j(x,\alpha)), \tag{10.40}$$

其中用了前面的记号. 这个函数在 Hopf 分支点为零, 因为存在一对乘子 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. 显然, 如果存在一对实特征值

$$\lambda_1 = \kappa, \quad \lambda_2 = -\kappa.$$

也有 $\psi_H = 0$. 因此, 在寻找 Hopf 分支时要小心避免这种点. 函数 $\psi_H$ 是实的且光滑并在 Hopf 分支点有正则零点. 此外, (10.36) 的 Jacobi 矩阵在这种点是非奇异的, Newton 法可应用.

如在前一情形, 存在避免明显计算 $A$ 所有特征值的方法, 尽管这比较困难. 如第 8 章指出的可用 **双交错积**计算 $\psi_H$.

设 $A$ 和 $B$ 分别是以 $\{a_{ij}\}$ 和 $\{b_{ij}\}$ 为元素的 $n\times n$ 矩阵, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 令 $m=\frac{1}{2}n(n-1)$.

**定义 10.1**　$A$ 和 $B$ 的双交错积是一个 $m\times m$ 矩阵, 记为 $A\odot B$, 它的行用二重指标 $(p,q)(p=2,3,\cdots,n;\ q=1,2,\cdots,p-1)$ 表示, 它的列用二重指标 $(r,s)$ $(r=2,3,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,r-1)$ 表示, 它的元素由

$$(A\odot B)_{(p,q),(r,s)}=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps}\\ b_{qr} & b_{qs}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps}\\ a_{qr} & a_{qs}\end{vmatrix}\right\}$$

给出.

图 10.8 显示当 $A$ 和 $B$ 是两个 $4\times 4$ 矩阵时 $6\times 6$ 矩阵 $A\otimes B$ 元素的足标. 这个定义的起因在附录 $B$ 中给出. 在附录 $B$ 中有证明的下面的古典定理解释双交错积的重要性.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (2,1),(2,1) | (2,1),(3,1) | (2,1),(3,2) | (2,1),(4,1) | (2,1),(4,2) | (2,1),(4,3) |
| (3,1),(2,1) | (3,1),(3,1) | (3,1),(3,2) | (3,1),(4,1) | (3,1),(4,2) | (3,1),(4,3) |
| (3,2),(2,1) | (3,2),(3,1) | (3,2),(3,2) | (3,2),(4,1) | (3,2),(4,2) | (3,2),(4,3) |
| (4,1),(2,1) | (4,1),(3,1) | (4,1),(3,2) | (4,1),(4,1) | (4,1),(4,2) | (4,1),(4,3) |
| (4,2),(2,1) | (4,2),(3,1) | (4,2),(3,2) | (4,2),(4,1) | (4,2),(4,2) | (4,2),(4,3) |
| (4,3),(2,1) | (4,3),(3,1) | (4,3),(3,2) | (4,3),(4,1) | (4,3),(4,2) | (4,3),(4,3) |

图 10.8　$n=4$ 的矩阵的双交错积的元素的足标

**定理 10.3**(Stephanos, 1900)　设 $A$ 是 $n\times n$ 矩阵, 它有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 则

(i) $A\odot A$ 有特征值 $\lambda_i\lambda_j$;

(ii) $2A\odot I_n$ 有特征值 $\lambda_i+\lambda_j$,

其中 $i=2,3,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,i-1$ 以及 $I_n$ 是 $n\times n$ 单位矩阵. □

因此, 测试函数 (10.40) 可以表示为

$$\psi_H(x,\alpha)=\det\left(2\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\odot I_n\right). \tag{10.41}$$

由双交错积的定义得 $2A\odot I_n$ 的下面公式

$$(2A\odot I_n)_{(p,q),(r,s)}=\begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps}\\ \delta_{qr} & \delta_{qs}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \delta_{pr} & \delta_{ps}\\ a_{qr} & a_{qs}\end{vmatrix},$$

其中 $\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号①. 计算行列式得

$$(2A\odot I_n)_{(p,q),(r,s)}=\begin{cases}-a_{ps}, & 若\ r=q,\\ a_{pr}, & 若\ r\neq q\ 和\ s=q,\\ a_{pp}+a_{qq}, & 若\ r=p\ 和\ s=q,\\ a_{qs}, & 若\ r=p\ 和\ s\neq q,\\ -a_{qr}, & 若\ s=p,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此, $2A\odot I_n$ 的元素可由矩阵 $A$ 和有效的程序计算.

**例 10.1**　如果 $n=3$, 矩阵 $B=2A\odot I_3$ 是 $3\times 3$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{22}+a_{11} & a_{23} & -a_{13}\\ a_{32} & a_{33}+a_{11} & a_{12}\\ -a_{31} & a_{21} & a_{33}+a_{22}\end{pmatrix}.\qquad\diamond$$

下面构造测试函数去定位离散－时间系统的余维 1 分支. 假设有映射

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\in\mathbb{R}^1,$$

延拓它的平衡点曲线

$$f(x,\alpha)-x=0.$$

设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是在 $(x,\alpha)$ 的 Jacobi 矩阵 $A=f_x$ 的乘子. 下面的测试函数分别明显地定位折分支、翻转分支和 Neimark-Sacker 分支:

$$\varphi_t=\prod_{i=1}^{n}(\mu_i-1),\tag{10.42}$$

$$\varphi_f=\prod_{i=1}^{n}(\mu_i+1),\tag{10.43}$$

$$\varphi_{Ns}=\prod_{i>j}(\mu_i\mu_j-1),\tag{10.44}$$

要探测正确的 Neimark-Sacker 分支, 必须验证 $\varphi_{NS}=0$. 这是由于出现满足 $\mu_i\mu_j=1$ 的 非实乘子, 因而类似地, 对连续－时间情形, 可用 Jacobi 矩阵本身来表示测试函数 (10.42)~(10.44), 即

$$\varphi_t=\det(A-I_n),\tag{10.45}$$

① $\delta_{ii}=1,\delta_{ij}=0,i\neq j$.

$$\varphi_f = \det(A + I_n) \tag{10.46}$$

和

$$\varphi_{NS} = \det(A \odot A - I_m), \tag{10.47}$$

其中 $I_k$ 是 $k \times k$ 单位矩阵, $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. 从定理 10.3 的 (i) 得最后一个公式. 应用双交错积的定义, 得到

$$(A \odot A)_{(p,q),(r,s)} = \begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix}.$$

### 10.2.3　余维 1 分支分析

为了利用第 3~5 章介绍的理论去探测分支点, 必须验证满足适当的一般性条件. 关于参数的横截性条件的验证相当简单, 就不考虑了. 代之以将集中计算在临界参数值的有关规范形系数, 即验证非退化条件.

假设分支点 $(x^0, \alpha^0)$ 在分支曲线上已被探测.

1. 折分支

第 5 章 (见 5.4.1 节) 已经指出, 在折分支点, 系统 (10.26) 在它的一维中心流形上的限制可写为

$$\dot{u} = bu^2 + O(u^3),$$

其中

$$b = \frac{1}{2}\langle p, B(q,q)\rangle$$

(见公式 (5.23)). 这里 $q, p \in \mathbb{R}^n$ 是满足

$$Aq = 0, \quad A^{\mathrm{T}}p = 0$$

的特征向量, 它们彼此按

$$\langle p, q\rangle = 1$$

标准化. 为了完全地指定向量, 假定

$$\langle q, q\rangle = 1.$$

双线性函数 $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$B_i(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f_i(\xi,\alpha^0)}{\partial\xi_j \partial\xi_k}\right|_{\xi=x^0} x_j y_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{10.48}$$

只要用纯量函数的二阶导数的计算来求得 $b$. 事实上, 容易验证

$$B(q,q)=\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}f(x^0+\tau q,\alpha^0)\right|_{\tau=0},$$

因此

$$\langle p,B(q,q)\rangle=\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p,f(x^0+\tau q,\alpha^0)\rangle\right|_{\tau=0}. \tag{10.49}$$

(10.49) 中的二阶导数可用有限差分数值近似, 例如

$$\langle p,B(q,q)\rangle=\frac{1}{h^2}\left[\langle p,f(x^0+hq,\alpha^0)\rangle+\langle p,f(x^0-hq,\alpha^0)\rangle\right]+O(h^2),$$

其中 $h$ 是 增量, 并考虑到平衡点条件 $f(x^0,\alpha^0)=0$. 注意, 包含在 (10.49) 中所有对象都是在原来坐标系下表示. 因此, $b$ 的计算化为求特征向量 $q$ 和 $p$, 它们的标准化以及应用公式 (10.49) 或者类似的有限差分. 如果 $b\neq 0$, 一般的折分支发生, 它给出了关于参数的横截性条件.

2. Hopf 分支

按照公式 (5.39), 决定 Hopf 分支是亚临界还是超临界的 Lyapunov 第一系数是由

$$\begin{aligned}l_1(0)=\frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}\ &[\langle p,C(q,q,\bar q)\rangle-2\langle p,B(q,A^{-1}(q,\bar q))\rangle\\&+\langle p,B(\bar q,(2\mathrm{i}\omega_0I_n-A)^{-1}B(q,q))\rangle]\end{aligned} \tag{10.50}$$

给出, 其中 $q$ 和 $p$ 满足

$$Aq=\mathrm{i}\omega_0q,\quad A^{\mathrm{T}}p=-\mathrm{i}\omega_0p,$$

且由

$$\langle p,q\rangle=1$$

标准化. 也假设

$$\langle q,q\rangle=1,\quad \langle\mathrm{Re}\ q,\mathrm{Im}\ q\rangle=0.$$

双线性函数 $B(x,y)$ 由 (10.48) 给出, 函数 $C:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 由

$$C_i(x,y,z)=\sum_{j,k,l=1}^{n}\left.\frac{\partial^3 f_i(\xi,\alpha^0)}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{\xi=x^0}x_jy_kz_l,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{10.51}$$

定义. 如果使用的程序语言支持复数算法, 由 (10.48) 和 (10.51) 中的偏导数数值计算可直接用公式 (10.50). 但也存在执行实数计算且避免计算包含在 (10.48) 和 (10.51) 中的 $f$ 在 $(x^0,\alpha^0)$ 的所有二阶和三阶偏导数的算法.

首先注意, 可容易地用某些方向导数在任何一个重实向量变量集上计算多重线性函数 $B(x,y)$ 和 $C(x,y,z)$. 事实上, 对 $v \in \mathbb{R}^n$, 向量 $B(v,v)$ 可用公式

$$B(v,v) = \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} f(x^0 + \tau v, \alpha^0)\right|_{\tau=0} \tag{10.52}$$

计算, 这个已经用过. 对 $v \in \mathbb{R}^n$, 向量 $C(v,v,v)$ 可用类似的公式

$$C(v,v,v) = \left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3} f(x^0 + \tau v, \alpha^0)\right|_{\tau=0} \tag{10.53}$$

计算. 可以用有限差分来近似这些关于纯量变量 $\tau$ 的导数, 例如, 对 (10.52),

$$B(v,v) = \frac{1}{h^2}\left[f(x^0 + hv, \alpha^0) + f(x^0 - hv, \alpha^0)\right] + O(h^2)$$

以及对 (10.53),

$$\begin{aligned} C(v,v,v) = \frac{1}{8h^3}[&f(x^0 + 3hv, \alpha^0) - 3f(x^0 + hv, \alpha^0) \\ &+ 3f(x^0 - hv, \alpha^0) - f(x^0 - 3hv, \alpha^0)] + O(h^2), \end{aligned}$$

其中 $h \ll 1$ 是小增量. 由此, 借助于 (10.52) 和 (10.53) 可计算的表达式来重写 (10.50).

用 $q_R$ 和 $q_I$ 分别表示特征向量 $q$ 的实部和虚部

$$q = q_R + \mathrm{i}q_I, \quad q \in \mathbb{C}^n,\ q_R, q_I \in \mathbb{R}^n.$$

于是有

$$\begin{aligned} B(q,q) &= B(q_R,q_R) - B(q_I,q_I) + 2\mathrm{i}B(q_R,q_I), \\ B(q,\bar{q}) &= B(q_R,q_R) + B(q_I,q_I), \\ C(q,q,\bar{q}) &= C(q_R,q_R,q_R) + C(q_R,q_I,q_I) + \mathrm{i}C(q_R,q_R,q_I) + \mathrm{i}C(q_I,q_I,q_I). \end{aligned}$$

注意, 向量 $B(q_R,q_R), B(q_I,q_I), C(q_R,q_R,q_R)$ 和 $C(q_I,q_I,q_I)$ 可用 (10.52) 和 (10.53) 直接计算, $B(q_R,q_I), C(q_R,q_I,q_I)$ 和 $C(q_R,q_R,q_I)$ 要求更多的论述. 本质上, 对实向量 $v, w \in \mathbb{R}^n$, 用 (10.52) 和 (10.53) 可足够计算多重线性函数 $B(v,w)$ 和 $C(v,v,w)$.

用恒等式

$$\begin{aligned} B(v+w, v+w) &= B(v,v) + 2B(v,w) + B(w,w), \\ B(v-w, v-w) &= B(v,v) - 2B(v,w) + B(w,w) \end{aligned}$$

可以将向量 $B(v,w)$ 表示为 ("极化恒等式")

$$B(v,w) = \frac{1}{4}[B(v+w,v+w) - B(v-w,v-w)].$$

右端可用 (10.52) 计算.

类似地, 恒等式

$$C(v+w,v+w,v+w) = C(v,v,v) + 3C(v,v,w) + 3C(v,w,w) + C(w,w,w)$$

和

$$C(v-w,v-w,v-w) = C(v,v,v) - 3C(v,v,w) + 3C(v,w,w) - C(w,w,w)$$

导致下面关于 $C(v,v,w)$ 的表达式

$$C(v,v,w) = \frac{1}{6}(C(v+w,v+w,v+w) - C(v-w,v-w,v-w) - \frac{1}{3}C(w,w,w),$$

右端可用 (10.53) 计算.

仅包含实变量的线性系统

$$Ar = B(q,\bar{q})$$

可重写为

$$Ar = B(q_R,q_R) + B(q_I,q_I).$$

它的解 $r$ 是实向量. 由 (10.50), 数量积 $\langle p, B(q,r)\rangle$ 可变换成

$$\langle p, B(q,r)\rangle = \langle p_R, B(q_R,r)\rangle + \mathrm{i}\langle p_R, B(q_I,r)\rangle - \mathrm{i}\langle p_I, B(q_R,r)\rangle + \langle p_I, B(q_I,r)\rangle,$$

故

$$\mathrm{Re}\ \langle p, B(q,r)\rangle = \langle p_R, B(q_R,r)\rangle + \langle p_I, B(q_I,r)\rangle.$$

右端数量积内的所有双线性函数都是 $B(v,w)$ 的形式, 因此它们可由极化恒等式简化为用 (10.52) 可计算的量.

线性复系统

$$(2\mathrm{i}w_0 I_n - A)s = B(q,q)$$

等价于二重维数的实系统

$$\begin{cases} -A_{S_R} - 2\omega_0 s_I = B(q_R,q_R) - B(q_I,q_I), \\ 2\omega_0 s_R - A s_I = 2B(q_R,q_I), \end{cases}$$

其中 $s_R$ 和 $s_I$ 是 $s$ 的实部和虚部. 于是, 由 (10.50), 数量积 $\langle p, B(\bar{q},s)\rangle$ 可写为

$$\langle p, B(\bar{q},s)\rangle = \langle p_R, B(q_R,s_R)\rangle + \mathrm{i}\langle p_R, B(q_R,s_I)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{i}\langle p_R, B(q_I, s_R)\rangle + \langle p_R, B(q_I, s_I)\rangle \\
&- \mathrm{i}\langle p_I, B(q_R, s_R)\rangle + \langle p_I, B(q_R, s_I)\rangle \\
&- \langle p_I, B(q_I, s_R)\rangle - \mathrm{i}\langle p_I, B(q_I, s_I)\rangle,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \langle p, B(\bar{q}, s)\rangle = &\langle p_R, B(q_R, s_R)\rangle + \langle p_R, B(q_I, s_I)\rangle \\
&+ \langle p_I, B(q_R, s_I)\rangle - \langle p_I, B(q_I, s_R)\rangle,
\end{aligned}
$$

其中所有的双线性函数都是 $B(v, w)$ 形式, 从而可化为 (10.52).

由 (10.48), 数量积 $\langle p, C(q, q, \bar{q})\rangle$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
\langle p, C(q, q, \bar{q})\rangle = &\langle p_R, C(q_R, q_R, q_R)\rangle + \langle p_R, C(q_R, q_I, q_I)\rangle \\
&+ \mathrm{i}\langle p_R, C(q_R, q_R, q_I)\rangle + \mathrm{i}\langle p_R, C(q_I, q_I, q_I)\rangle \\
&- \mathrm{i}\langle p_I, C(q_R, q_R, q_R)\rangle - \mathrm{i}\langle p_I, C(q_R, q_I, q_I)\rangle \\
&+ \langle p_I, C(q_R, q_R, q_I)\rangle + \langle p_I, C(q_I, q_I, q_I)\rangle,
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \langle p, C(q, q, \bar{q})\rangle = &\langle p_R, C(q_R, q_R, q_R)\rangle + \langle p_R, C(q_R, q_I, q_I)\rangle \\
&+ \langle p_I, C(q_R, q_R, q_I)\rangle + \langle p_I, C(q_I, q_I, q_I)\rangle.
\end{aligned}
$$

这个表达式可变换成仅包含 (10.53) 形式的方向导数的公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \langle p, C(q, q, \bar{q})\rangle = &\frac{2}{3}\langle p_R, C(q_R, q_R, q_R)\rangle + \frac{2}{3}\langle p_I, C(q_I, q_I, q_I)\rangle \\
&+ \frac{1}{6}\langle p_R + p_I, C(q_R + q_I, q_R + q_I, q_R + q_I)\rangle \\
&+ \frac{1}{6}\langle p_R - p_I, C(q_R - q_I, q_R - q_I, q_R - q_I)\rangle.
\end{aligned}
$$

下面总结一下计算 $l_1(0)$ 所需的步骤.

第零步. 计算 (10.26) 在临界参数值 $\alpha^0$ 有 Hopf 分支的平衡点 $x^0$ 的 Jacobi 矩阵

$$
A = f_x(x^0, \alpha^0).
$$

第一步. 求四个满足

$$
\begin{cases}
Aq_R + \omega_0 q_I = 0, \\
-\omega_0 q_R + Aq_I = 0
\end{cases}
$$

和

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} q_R + \omega_0 q_I = 0, \\ \omega_0 p_R + A^{\mathrm{T}} q_I = 0, \end{cases}$$

并按

$$\begin{aligned} &\langle q_R, q_R\rangle + \langle q_I, q_I\rangle = 1, \quad \langle q_R, q_I\rangle = 0, \\ &\langle p_R, q_R\rangle + \langle p_I, q_I\rangle = 1, \quad \langle q_R, q_I\rangle - \langle p_I, q_R\rangle = 0. \end{aligned}$$

标准化的向量：$q_R, q_I, p_R, p_I \in \mathbb{R}^n$.

第二步. 用方向导数计算下面的向量

$$a = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} f(x^0 + \tau q_R, \alpha^0)\bigg|_{\tau=0},$$

$$b = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} f(x^0 + \tau q_I, \alpha^0)\bigg|_{\tau=0},$$

以及

$$c = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}[f(x^0 + \tau(q_R + q_I), \alpha^0) - f(x^0 + \tau(q_R - q_I), \alpha^0)]\bigg|_{\tau=0}.$$

第三步. 对 $r$ 和 $(s_R, s_I)$ 求解线性系统

$$Ar = a + b$$

和

$$\begin{cases} -As_R - 2\omega_0 s_I = a - b, \\ 2\omega_0 s_R - As_I = 2c. \end{cases}$$

第四步. 计算下面的数

$$\sigma_1 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_R, f(x^0 + \tau(q_R + r), \alpha^0) - f(x^0 + \tau(q_R - r), \alpha^0)\rangle\bigg|_{\tau=0},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_I, f(x^0 + \tau(q_I + r), \alpha^0) - f(x^0 + \tau(q_I - r), \alpha^0)\rangle\bigg|_{\tau=0},$$

并计算它们的和

$$\Sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

第五步. 计算数

$$\delta_1 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_R, f(x^0 + \tau(q_R + s_R), \alpha^0) - f(x^0 + \tau(q_R - s_R), \alpha^0)\rangle\bigg|_{\tau=0},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_R, f(x^0 + \tau(q_I + s_I), \alpha^0) - f(x^0 + \tau(q_I - s_I), \alpha^0)\rangle\bigg|_{\tau=0},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_I, f(x^0+\tau(q_R+s_I),\alpha^0) - f(x^0+\tau(q_R-s_I),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

$$\delta_4 = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\langle p_I, f(x^0+\tau(q_I+s_R),\alpha^0) - f(x^0+\tau(q_I-s_R),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

并计算

$$\Delta_0 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - \delta_4.$$

第六步. 计算数

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\langle p_R, f(x^0+\tau q_R),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

$$\gamma_2 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\langle p_I, f(x^0+\tau q_I),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

$$\gamma_3 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\langle p_R+p_I, f(x^0+\tau(q_R+q_I),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

$$\gamma_4 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\langle p_R-p_I, f(x^0+\tau(q_R-q_I),\alpha^0)\rangle\Big|_{\tau=0},$$

并取

$$\Gamma_0 = \frac{2}{3}(\gamma_1+\gamma_2) + \frac{1}{6}(\gamma_3+\gamma_4).$$

第七步. 最后, 计算

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}(\Gamma_0 - 2\Sigma_0 + \Delta_0).$$

若 $l_1(0) \neq 0$ 且特征值以非零速度穿过虚轴, 则在参数 $\alpha$ 变化下出现唯一极限环. 要完成对 Hopf 分支的分析, 需推导一个算法, 可以用上面所述方法之一, 从离开 Hopf 分支点的分支极限环开始**延拓**. 因此, 必须求得周期解, 从它可初始化环延拓. 回忆在一般 Hopf 点附近的环在相–参数空间中组成拟抛物面, 它与平面

$$x = zq + \bar{z}\,\bar{q}$$

**相切**, 其中 $z \in \mathbb{C}^1$, $q$ 是适当标准化了的临界特征向量. 系统在中心流形上的限制的线性部分简单地为

$$\dot{z} = \mathrm{i}\omega_0 z,$$

它有解 $z(t) = z_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$. 因此, 具 "振幅" $z_0 = \varepsilon$ 的分支极限环的线性近似由

$$x_\varepsilon(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}q + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\bar{q})\varepsilon = 2\varepsilon \mathrm{Re}\,[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}q]$$

给出, 其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ 是使用者定义的小数. 所得的开始解可以表示为实形式

$$x_\varepsilon(t) = 2\varepsilon(q_R \cos\omega_0 t - q_I \sin\omega_0 t), \tag{10.54}$$

其中 $q_R, q_I$ 是复特征向量 $q$ 的实部和虚部. 可以在 Hopf 分支附近推导环的二次近似. 但是, 在大多数情形用公式 (10.54) 开始作环的延拓已够精度.

### 10.2.4　分枝点

一般地, 平衡点曲线 (10.27) 有分枝点.

**定义 10.2**　*点 $y^*$ 称为延拓问题*

$$F(y) = 0, \quad \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \tag{10.55}$$

*的分枝点, 如果 $F(y^*) = 0$, 且至少存在两条不同的满足 (10.55) 并通过 $y^*$ 的光滑曲线.*

对 $n = 1$ 的分枝的两个例子如图 10.9 所示. 可以视图中的曲线为依赖于一个参数的某个纯量系统的平衡点曲线, $y = (x, \alpha)$.

**注**　(1) 若曲线组成一闭曲线且在 $y^*$ 自身相交, 则分枝点也会出现. 这就是为什么分枝点通常称为 *自交点*.

(2) 有时候, 分枝点就简单地称为 *分支点*. 如果仅仅研究平衡点, 后一术语才适用, 但一般会引起误解. 事实上, 非退化折分支点和 Hopf 分支点都不是平衡点曲线的分枝点. ◇

读者应该理解分枝点的出现是一个 *非一般现象*: 由隐函数定理, 一般曲线 (10.55)(沿着这条曲线秩 $F_y = n$) 没有分枝点. 此外, 如果延拓问题 (10.55) 有分枝点, $C^1$ 接近问题一般根本就没有分枝点 (见图 10.10).

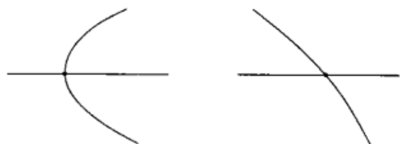


图 10.9　分枝点



图 10.10　在一般扰动下分枝点消失

但是, 若出现某个*对称性*, 则分枝点容易出现. 事实上, 如同在第 7 章看到的, 一般发生在 $\mathbb{Z}_2$ 对称系统的*叉分支*是分枝点. 另一个重要例子是由离散 - 时间系统提供的 *翻转分支*. 假设映射

$$x \mapsto f(x, \alpha) = f_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}^1$$

的不动点 $x^{(1)}(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 有一般翻转分支. 以 $x^{(2)}_{1,2}(\alpha)$ 记在 $\alpha = 0$ 从 $x^{(1)}(\alpha)$ 分支出组成周期 2 环的点. 由于 $x^{(1)}(\alpha)$ 是映射 $f_\alpha$ 的 *第二次迭代* $f^2_\alpha$ 的不动点, 翻转点

$(x^{(1)}(0),0)$ 是周期 2 环延拓问题

$$f_\alpha^2(x)-x=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\in\mathbb{R}^1$$

的分枝点.

因此, 当延拓由 (10.55) 定义的曲线, 并开始从每一个定位点出发对其他分枝延拓时, 需要能够去探测和定位分枝点. 下面来处理这些问题. 下面的讨论包含有 $F$ 的二次项. 设 $y^*=0$ 是 (10.55) 的分枝点. 将 $F(y)$ 在 $y=0$ 的 Taylor 展开式写为

$$F(y)=J(0)y+\frac{1}{2}B(y,y)+O(\|y\|^3),$$

其中 $J(y)=F_y(y)$ 是 (10.55) 的 $n\times(n+1)$ Jacobi 矩阵, $B:\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ 是 $F(y)$ 在分枝点的双线性部分

$$B_i(x,y)=\sum_{j,k=1}^{n+1}\left.\frac{\partial^2F_i(\xi)}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\right|_{\xi=x^0}x_jy_k,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{10.56}$$

设 $y(s)$ 是通过点 $y=0$ 的光滑分枝, 并由满足 $y(0)=0$ 的弧长 $s$ 参数化. 以 $v$ 记在 $y=0$ 与这个分枝相切的向量: $v=\dot{y}(0)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 如已经指出的, 向量 $v$ 满足方程

$$J(0)v=0 \tag{10.57}$$

(这是由 $F(y(s))=0$ 关于 $s$ 微分并在 $s=0$ 取值所得到). 以 $\mathcal{K}$ 记由所有满足 (10.57) 的向量所组成的 $J(0)$ 的零空间

$$\mathcal{K}=\{v\in\mathbb{R}^{n+1}:J(0)v=0\}.$$

所有通过点 $y=0$ 切于分枝的向量属于 $\mathcal{K}$. 若 $y=0$ 是正则点, 在此点秩 $J(0)=n$, 则 $\dim\mathcal{K}=1$. 若 (10.55) 的两个分枝在 $y=0$ 横截相交, 则 $\dim\mathcal{K}=2$, 因为它们在分枝点各自的切向量 $v_1$ 和 $v_2$ 都满足 (10.57)(见图 10.11).

仅考虑 $\mathcal{K}$ 是由两个线性无关向量 $q_1$ 和 $q_2$ 所张成, 并推导切向量满足的另外方程. $F(y(s))=0$ 关于 $s$ 在 $s=0$ 微分两次, 得

$$J(0)\ddot{y}(0)+B(\dot{y}(0),\dot{y}(0))=0,$$

或者, 等价地

$$J(0)\ddot{y}(0)+B(v,v)=0. \tag{10.58}$$

现在考虑 $(n+1)\times n$ 转置矩阵 $J^{\mathrm{T}}(0)$. 由于 $\dim\mathcal{K}=2$, 存在满足

$$J^{\mathrm{T}}(0)\varphi=0 \tag{10.59}$$

的唯一向量 (直到数量乘数).

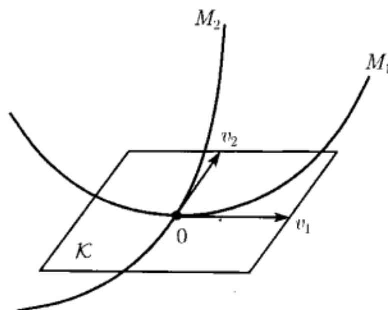



图 10.11　通过分枝点的两条相交曲线

计算 (10.58) 的左端与 $\mathbb{R}^n$ 中 $\varphi$ 的数量积, 并考虑到

$$\langle \varphi, J(0)\ddot{y}(0)\rangle = \langle J^{\mathrm{T}}(0)\varphi, \ddot{y}(0)\rangle = 0,$$

得到

$$\langle \varphi, B(v,v)\rangle = 0. \tag{10.60}$$

左端是定义在向量 $v \in \mathcal{K}$ 上的二次型, 它有明显的表达式

$$\langle \varphi, B(v,v)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n+1} \varphi_i \left.\frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right|_{\xi=0} v_j v_k.$$

因任何向量 $v \in \mathcal{K}$ 可表示为

$$q = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

故二次型 $\langle \varphi, B(v,v)\rangle$ 可考虑为 $(\beta_1, \beta_2)$ 平面上的二次型

$$b(\beta) = \langle \varphi, B(\beta_1 q_1 + \beta_2 q_2, \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2)\rangle = b_{11}\beta_1^2 + 2b_{12}\beta_1\beta_2 + b_{22}\beta_2^2,$$

其中 $b_{ij} = \langle \varphi, B(q_i, q_j)\rangle,\ i,j = 1,2$.

**定义 10.3**(简单分枝点)　一个分枝点称为简单的, 如果下面两个条件满足:

(i) $\dim \mathcal{K} = 2$;

(ii) $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} > 0$.

从第二个条件得知, 二次型的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

有一个正的和一个负的特征值.

下面的引理完全刻画了简单分枝点.

**引理 10.1**　设 $y^*=0$ 是 (10.55) 的一个简单分枝点. 则恰好存在两条通过 $y^*$ 满足 (10.55) 的光滑曲线. 此外, 它们在 $y^*$ 的切向量 $v_k$ 线性无关, 且都满足 (10.60). □

用方程 (10.60) 可以计算第二个分枝的方向 $v_2$, 只要在 (10.55) 的分枝点切于第一个解曲线的向量 $v_1$ 已知. 事实上, 设 $q_1=v_1$, 而令 $q_2\in\mathcal{K}$ 是与 $q_1$ 正交的向量 $\langle q_2,q_1\rangle=0$. 于是, 对 $\beta_1^{(1)}=1$, $\beta_2^{(1)}=0$,

$$v_k=\beta_1^{(k)}q_1+\beta_2^k q_2,\quad k=1,2.$$

因此, "代数分枝方程"

$$b_{11}\beta_1^2+2b_{12}\beta_1\beta_2+b_{22}\beta_2^2=0$$

的解①已知. 由此得 $b_{11}=0$. 因此, 第二个分枝的方向 $(\beta_1^{(2)},\beta_2^{(2)})$ 满足

$$2b_{12}\beta_1^{(2)}+b_{22}\beta_2^{(2)}=0,$$

由于分枝点的简单性, 这里必有 $b_{12}\neq 0$. 从而

$$\beta_1^{(2)}=-\frac{b_{22}}{2b_{12}}\beta_2^{(2)}.$$

上面所述的结果解决了在分枝点的分枝开关问题. 但是, 应该能够探测这种点并精确地对它们定位. 当延拓由 (10.55) 定义的曲线时, 用下面的引理提供的测试函数来定位分枝点.

**引理 10.2**　设 $y_{(1)}(s)$ 对应于由 (10.55) 定义的曲线. 考虑 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵

$$D(s)=\begin{pmatrix} J(y_{(1)}(s)) \\ \dot{y}_{(1)}^{\mathrm{T}}(s)\end{pmatrix},\tag{10.61}$$

其中 $J(y)$ 是 (10.55) 的 Jacobi 矩阵. 则纯量函数

$$\psi(s)=\det D(s)\tag{10.62}$$

在 $s=0$ 有正则零点.

① 事实上是解的线段 $(\gamma,0)$.

**注**　矩阵 $D$ 与包含在求解 (10.55) 的伪弧长延拓法 (10.34) 的 Newton 校正中的 Jacobi 矩阵稍有不同. 如果迭代收敛于这条曲线上的点, 函数 $\psi$ 在这一点容易用 Newton 矩阵的行列式以及与前一计算得的点的比较来近似. ◇

**证明**　矩阵 $D(0)$ 有单零特征值. 事实上

$$D(0)q_2 = 0, \tag{10.63}$$

其中 $q_2$ 是上面定义的 $\mathcal{K}$ 平面内在分枝点与 $q_1 = v_1$ 正交的向量. 因此, 零是 $D(0)$ 的特征值. 此外, $D(0)q_1 \neq 0$, 所以零特征值是单的. 因此, 对所有充分小 $|s|$, 存在 $D(s)$ 的依赖于参数的单特征值 $\lambda(s)$,

$$D(s)u(s) = \lambda(s)u(s),$$

使得 $\lambda(0) = 0$, $u(0) = q_2$. 关于 $s$ 在 $s = 0$ 微分上面方程得

$$\begin{pmatrix} B(q_1, q_2) \\ \ddot{y}_{(1)}^{\mathrm{T}}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(0) \\ q_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \dot{u}(0) = \dot{\lambda}(0) q_2. \tag{10.64}$$

现在注意, 转置矩阵 $D^{\mathrm{T}}(0)$ 的零特征向量 $p$,

$$D^{\mathrm{T}}(0)p = 0$$

有形式

$$p = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\varphi$ 是由上面的 $J^{\mathrm{T}}(0)\varphi = 0$ 定义 (见 (10.59)). 此外, 由于 $\lambda = 0$ 是单的, 有 $\langle p, q_2 \rangle \neq 0$. 取 (10.64) 的两端关于 $p$ 的数量积, 得到

$$\dot{\lambda}(0) = \frac{\langle \varphi, B(q_1, q_2) \rangle}{\langle p, p_2 \rangle} = \frac{b_{12}}{\langle p, q_2 \rangle} \neq 0,$$

这是因为 $b_{12}$ 在简单分枝点必须不为零. 因此, 当 $s$ 穿过值 $s = 0$ 时 $D(s)$ 的单实特征值 $\lambda(s)$ 如同 $D(s)$ 的行列式有规律地改变符号. □

因此, 由 (10.62) 给出的 $\psi(s)$ 沿着曲线 (10.55) 可监控探测分枝点. 如果这个点被探测到, 就可定位它, 例如, 用弦方法

$$s^{j+1} = s^j - \frac{s^j - s^{j-1}}{\psi(s^j) - \psi(s^{j-1})} \psi(s^j), \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{10.65}$$

为了在定位简单分枝点时执行分枝开关, 需要求向量 $q_1, q_2$ 和 $\varphi$ 并数值计算 $b_{22}$ 和 $b_{12}$. 向量 $q_1$ 可从两点的切向量内插, 这两点之间的分枝点已被探测到. 向量

$q_2$ 和 $\varphi$ 可由解线性齐次系统 (10.59) 和 (10.63) 计算. 最后, $\varphi$ 和函数 $B$ 在 $q_{1,2}$ 的数量积可由上一节所叙述的方向导数技巧计算. 详细证明留给读者.

**注** (1) 存在另外有效的技巧去开关分枝, 称为 *同伦方法*. 它是基于延拓问题

$$F(y) = 0$$

的一般性扰动会破坏分枝的相交性, 使得它们都光滑 (见图 10.10) 的观察上. 因此, 可以引入一个人为的小扰动 $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, 而考虑延拓问题

$$F(y) - \varepsilon = 0.$$

取不同的 $\varepsilon$, $\|\varepsilon\|$ 充分小, 可以尝试从未被扰动问题的原来分枝上的点开始, 用计算扰动问题的分枝来开关分枝. 在开关过程中, 令 $\varepsilon$ 变回零而去掉扰动, 然后用所得的点作为新分枝延拓的初始点. 这个方法对相对低维的问题工作得较好.

(2) 用割线迭代 (10.65) 探测分枝点可能会有困难, 因为用来计算曲线 (10.55) 上的点的 Newton(或者拟 Newton) 校正的收敛性区域当趋于分枝点时会收缩. 这个困难可用考虑*扩展系统* (extended systems) 来避免. 例如, 平衡点曲线 (10.27) 的简单分枝点 $(x_0, \alpha_0)$ 对应于定义系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha) + \beta p = 0, \\ f_x^{\mathrm{T}}(x,\alpha)p = 0, \\ \langle p, f_\alpha(x,\alpha)\rangle = 0, \\ \langle p, p\rangle - 1 = 0 \end{cases} \tag{10.66}$$

的正则解 $(x,\alpha,\beta,p) = (x_0,\alpha_0,0,p_0)$, 其中 $p \in \mathbb{R}^n$ 和 $\beta \in \mathbb{R}^1$ 是额外未知量. 因此, 标准的 Newton 法可以直接应用于 (10.66) 来探测简单分枝点. ◇

## 10.3 双参数分支分析

从现在开始研究依赖于双参数的光滑系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{10.67}$$

系统分析的目的是构造它的双参数分支图. 这个图一般包含对应于余维 1 平衡点分支曲线、极限环分支和同宿轨道分支曲线. 在这些曲线的孤立点, 余维 2 分支出现. 正如在第 8, 9 章看到的, 这样的点是几个不同余维 1 边界的公共点. 因此, 问题是延拓余维 1 分支曲线, 在其上探测、定位, 并分析在它们上面的余维 2 奇异性, 然后在这些点开关分支分枝. 我们将主要处理余维 1 分支的延拓, 对余维 2 分支的定位和分析只给出一些说明.

### 10.3.1 平衡点与不动点的余维 1 分支的延拓

如第 8 章讨论的, 如果系统 (10.67) 在 $\alpha = \alpha^0$ 的平衡点有余维 1 分支, 于是, 一般地, 在 $\alpha$ 平面内存在分支曲线 $\mathcal{B}$, 沿着这条曲线系统有显示相关分支的平衡点. 曲线 $\mathcal{B}$ 可以作为定义在更高维的空间内的某曲线 $\Gamma$ 在 $\alpha$ 平面内的投影来计算. 因此, 必须对 $\Gamma$ 指定延拓问题, 就是说, 在确定这条曲线的空间内定义函数.

1. *最小增广系统* (minimally augmented systems)

平衡点余维 1 分支的这种类型的延拓问题已经在第 8 章引入过 (见 8.1.1 节). 在这个方法中, 仅仅添加有关测试函数到平衡点方程中, 由此得到一个在以 $(x, \alpha)$ 为坐标的 $n+2$ 维空间中 $n+1$ 个方程的系统. 更确切地说, 如果 $A(x, \alpha)$ 是 (10.67) 中 $f$ 在 $(x, \alpha)$ 的 Jacobi 矩阵, 则得折分支的延拓问题

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0, \\ \det A(x, \alpha) = 0 \end{cases} \tag{10.68}$$

和 Hopf 分支的延拓问题

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0, \\ \det(2A(x, \alpha) \odot I_n) = 0, \end{cases} \tag{10.69}$$

其中 $\odot$ 表示双交错积. 每一个系统是 $n+2$ 个纯量变量的 $n+1$ 个纯量方程的系统, 称为*最小增广系统*, 因为所得延拓问题的维数是关于平衡点延拓的维数扩大 1. 显然, 如果当延拓平衡点时分支点已经被探测到, 而对应的测试函数 $\psi_t$ 或 $\psi_H$ 的零点已经定位, 于是立刻就有延拓由 (10.68) 或 (10.69) 定义的分支曲线的所有必要的初始数据.

**引理 10.3** *如果 $(x, \alpha)$ 是对应于 (10.67) 任何平衡点的一般余维 1 或余维 2 分支点, 除了 Hopf-Hopf 奇异性, 则秩 $J = n+1$, 其中 $J$ 是对应最小增广系统 (10.68) 或 (10.69) 的 Jacobi 矩阵. 一般的 Hopf-Hopf 点是 (10.69) 的简单分枝点.*

□

由这条引理就可以用标准的预测校正延拓技巧来延拓由 (10.68) 或者 (10.69) 定义的分支曲线 $\Gamma$. 计算的曲线在 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面上的标准投影给出对应的有关分支的参数边界.

但是, 定义的系统 (10.68)(或者 (10.69)) 有下面的缺点. 一般, 它的 Jacobi 矩阵 $J$ 不可能借助于 $f(x, \alpha)$ 的偏导数明显表达, 因为行列式中含有测试函数. 因此, 必须在延拓曲线 $\Gamma$ 时依靠数值微分, 即使 $f$ 关于 $(x, \alpha)$ 的导数解析知道. 为了克服这个困难, 用函数 $g(x, \alpha)$ 代替 (10.68)(或者 (10.69)) 中的测试函数, 这个函数与对应的测试函数一起为零, 但它的导数可以解析地表示.

在折分支情形, 代替 (10.68), 引入修改的最小增广系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ g(x,\alpha)=0, \end{cases} \tag{10.70}$$

其中 $g=g(x,\alpha)$ 作为 $(n+1)$ 维 加边系统

$$\begin{pmatrix} A(x,\alpha) & p_0 \\ q_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.71}$$

的解向量的最后一个分量来计算. 其中 $q_0, p_0 \in \mathrm{R}^n$ 是某些向量. 我们已经在第 5 章用类似的系统计算在折分支的中心流形的二次近似 (见方程 (5.29)). 如果向量 $q_0$ 接近于 $A(x,\alpha)$ 的零向量, $p_0$ 接近于 $A^{\mathrm{T}}(x,\alpha)$ 的零向量, 则矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A(x,\alpha) & p_0 \\ q_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$$

在 $(x,\alpha)$ 是非奇异, 且 (10.71) 有唯一解. 在实际计算中, $q_0$ 和 $p_0$ 分别是 $A$ 和 $A^{\mathrm{T}}$ 在这条曲线上前一点的特征向量. 对 $g=0$, 由系统 (10.71) 得

$$Aw=0, \quad \langle q_0, w\rangle = 1,$$

这意味着 $w$ 是 $A(x,\alpha)$ 尺度化了的零向量, 且如在 (10.68), $\det A(x,\alpha)=0$. 事实上, $g$ 是与 $\det A(x,\alpha)$ 成比例. 且由 Cramer 法则

$$g(x,\alpha) = \frac{\det A(x,\alpha)}{\det M(x,\alpha)},$$

$g$ 关于 $(x,\alpha)$ 的导数可由微分 (10.71) 计算. 设 $z$ 表示 $x$ 或 $\alpha$ 的分量, 则

$$\begin{pmatrix} A(x,\alpha) & p_0 \\ q_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_z \\ g_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_z(x,\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以及 $(w_z, g_z)^{\mathrm{T}}$ 可由求解系统

$$\begin{pmatrix} A(x,\alpha) & p_0 \\ q_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_z \\ g_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_z(x,\alpha)w \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.72}$$

得到. 这个系统有与 (10.71) 相同的矩阵 $M$, 其右端包含有已知向量 $w$ 和 Jacobi 矩阵 $A$ 的导数 $A_z$. 如果引入 转置系统

$$M^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的解 $(v,h)^{\mathrm{T}}$, 导数 $g_z$ 可明显表示. 用 $(v^{\mathrm{T}},h)$ 左乘 (10.72), 并考虑到 $(v^{\mathrm{T}},h)\ M=(0,1)$, 得

$$g_z=-\langle v,A_z(x,\alpha)w\rangle.$$

在 Hopf 情形, 修改的最小增广系统看上去很像 (10.70), 函数 $g=g(x,\alpha)$ 由加边系统

$$\begin{pmatrix} 2A(x,\alpha)\odot I_n & P_0 \\ Q_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.73}$$

计算. 这是一个 $(m+1)$ 维系统, 其中 $2m=n(n-1)$, 且是非奇异的, 如果向量 $Q_0,P_0\in\mathbb{R}^m$ 在 Hopf 曲线的一般点附近分别是 $2A\odot I_n$ 和 $(2A\odot I_n)^{\mathrm{T}}$ 的零向量①. 偏导数 $g_z$ 可以如折分支情形用 $A_z$ 表示.

对离散–时间系统的余维 1 分支可类似处理. 考虑光滑的双参数映射

$$x\mapsto f(x,\alpha),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\in\mathbb{R}^2. \tag{10.74}$$

用系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det(A(x,\alpha)-I_n)=0 \end{cases} \tag{10.75}$$

延拓折分支. 用系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det(A(x,\alpha)+I_n)=0 \end{cases} \tag{10.76}$$

延拓翻转分支. 最后, 由系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ \det(A(x,\alpha)\odot A(x,\alpha)-I_m)=0 \end{cases} \tag{10.77}$$

延拓 Neimark-Sacker 分支. 对离散–时间情形, 可叙述类似于引理 10.3 的结论, 也可用修改的最小增广系统代替系统 (10.75)~(10.77), 最小增广系统的最后一个方程是由求解某个加边系统来定义.

**注**　当延拓由 (10.69) (或 (10.70) 和 (10.73)) 定义的 Hopf 曲线时, 可以通过这条曲线上失去如同 Hopf 分支曲线解释的点, 转入代替考虑对应于具实特征值 $\lambda_1+\lambda_2=0$(中性鞍点) 平衡点的曲线. 这明显发生在 Bogdanov-Takens 点. 类似现象发生在 Neimark-Sacker 曲线的 1:1 和 1:2 共振点上. 在这些点 Neimark-Sacker 分支曲线转为对应于具实乘子 $\mu_1\mu_2=1$ 的不动点的非分支曲线. ◇

① 注意, (10.73) 在 Hopf-Hopf 点是奇异的, 而不管 $Q_0$ 和 $P_0$ 的选择.

2. 标准的增广系统

若允许对延拓问题的维数扩大超过 1, 则有不同的定义系统用来计算余维 1 分支曲线.

$(x,q,\alpha)$ 的 $2n+2$ 个分量的 $2n+1$ 个纯量方程的系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ A(x,\alpha)q=0, \\ \langle q,q_0\rangle-1=0 \end{cases} \tag{10.78}$$

可用来计算折分支曲线. 这里 $q_0\in\mathbb{R}^n$ 是一个参考向量, 它不正交于 $A$ 的零空间. 在实际计算中, $q_0$ 通常是曲线上前一个找到的点上 $A$ 的零向量. 若 $\Gamma$ 是由 (10.78) 定义的曲线, 于是它在参数平面上的标准投影给出折分支边界 $\mathcal{B}$. 事实上, 若 $(x^0,q^0,\alpha^0)\in\mathbb{R}^{2n+2}$ 是 (10.78) 对固定的 $q_0$ 的解, 则系统 (10.67) 在参数值 $\alpha^0$ 有平衡点 $x^0$, 在此点有零特征值, 特征向量 $q^0$ 由 $\langle q^0,q_0\rangle=1$ 标准化. 为开始延拓 $\Gamma$, 显然不仅需要近似临界平衡点和临界参数值, 而且还要近似零向量 $q_0$.

**注**　(10.78) 中的最后一个方程可以用标准化条件 $\langle q,q\rangle-1=0$ 代替. ◇

接下来, 考虑下面 $(x,v,w,\alpha)$ 和 $\omega$ 的 $3n+2$ 个分量, $3n+2$ 个纯量方程的系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ A(x,\alpha)v+\omega w=0, \\ A(x,\alpha)w-\omega v=0, \\ \langle v,v_0\rangle+\langle w,w_0\rangle-1=0, \\ \langle v,w_0\rangle-\langle v_0,w\rangle=0, \end{cases} \tag{10.79}$$

这是定义 Hopf 分支的复系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ A(x,\alpha)q-\mathrm{i}\omega q=0, \\ \langle q,q_0\rangle_{\mathbb{C}^n}-1=0 \end{cases}$$

的实形式, 其中 $q=v+\mathrm{i}w\in\mathbb{C}^n$ 是临界复特征向量, 以及 $q_0=v_0+\mathrm{i}w_0\in\mathbb{C}^n$ 是与对应于 $\pm\mathrm{i}\omega$ 的临界复特征空间*不垂直*的向量, $\langle q,q_0\rangle_{\mathbb{C}^n}=\bar{q}^{\mathrm{T}}q_0$. 如在折分支情形, $q_0$ 通常是在曲线上前一个找到的点的特征向量 $q=v+\mathrm{i}w$. 系统 (10.79) 指定的曲线 $\Gamma$, 它在 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 平面上的投影给出 Hopf 分支边界. 若 $(x^0,v^0,w^0,\alpha^0,\omega_0)$ 是 $\Gamma$ 上的点, 则 (10.67) 在 $\alpha^0$ 有平衡点 $x^0$. 在这个平衡点的 Jacobi 矩阵 $A$ 有一对纯虚特征值 $\pm\mathrm{i}\omega_0$, $q=v^0+\mathrm{i}w^0$ 是对应的标准化了的复特征向量. 为了在平衡点曲线探测 Hopf 点, 即开始延拓由问题 (10.79) 定义的曲线 $\Gamma$. 还必须计算额外的 Hopf 频率 $\omega_0$ 以及两个实向量 $v_0$ 和 $w_0$.

**引理 10.4**　增广系统 (10.78) 的 Jacobi 矩阵在 (10.67) 的一般折分支点, Bogdanov-Takens 分支点或者尖分支点的秩是 $2n+1$, 增广系统 (10.79) 的 Jacobi 矩阵在 (10.67) 的一般的 Hopf, Bautin, 折 -Hopf, 或者 Hopf-Hopf 分支点的秩等于 $3n+2$ □

引理允许我们对给定的充分好的初始猜测, 用标准的延拓法计算由 (10.78) 和 (10.79) 给出的折分支曲线和 Hopf 分支曲线. 注意 (10.78) 和 (10.79) 的 Jacobi 矩阵容易由 $f(x,\alpha)$ 的偏导数来构造.

**注**　对 Hopf 延拓的增广系统 (10.79) 的维数可由消去 $w$ 而减少, 即用 (10.79) 中的第二个和第三个方程之间的隐含关系

$$A^2v+\omega^2v=0$$

来代替 (10.79) 中的第二个和第三个方程, 并考虑 $(2n+3)$ 个变量 $(x,v,\alpha,\kappa)$ 的 $2n+2$ 个纯量方程的增广系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ [A^2(x,\alpha)+\kappa I_n]v=0 \\ \langle v,v\rangle-1=0, \\ \langle v,l_0\rangle=0, \end{cases} \tag{10.80}$$

其中参考向量 $l_0\in\mathbb{R}^n$ 不与 $A$ 的满足 $\lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1\lambda_2=\kappa$ 的特征值对应的二维实特征空间垂直. (10.80) 的满足 $\kappa>0$ 的解对应于满足 $\omega^2=\kappa$ 的 Hopf 分支点, $\kappa<0$ 给定具两个实特征值 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\kappa}$ 的中性鞍点. 与 (10.79) 相反, 系统 (10.80) 也在 Bogdanov-Takens 点正则, 对此分两种情形, 其中 $\omega^2=\kappa=0$. ◇

留给读者去解释为什么下面的增广系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ A(x,\alpha)q-q=0, \\ \langle q,q_0\rangle-1=0, \end{cases} \tag{10.81}$$

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ A(x,\alpha)q+q=0, \\ \langle q,q_0\rangle-1=0, \end{cases} \tag{10.82}$$

以及

$$\begin{cases} f(x,\alpha)-x=0, \\ A(x,\alpha)v-v\cos\theta+w\sin\theta=0, \\ A(x,\alpha)w-v\sin\theta-w\cos\theta=0, \\ \langle v,v_0\rangle+\langle w,w_0\rangle-1=0, \\ \langle v,w_0\rangle+\langle v_0,w\rangle=0 \end{cases} \tag{10.83}$$

分别对在离散时间系统的折分支、翻转分支, 以及 Neimark-Sacker 分支的延拓是合适的, 其中 $q_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^n$ 是适当的参考向量. 注意, (10.83) 可用类似于 (10.80) 的系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ [A^2(x,\alpha)-2\cos\theta A(x,\alpha)+I_n]v=0, \\ \langle v,v\rangle -1=0, \\ \langle v,l_0\rangle =0 \end{cases}$$

代替, 其中 $l_0 \in \mathbb{R}^n$ 不与 $A$ 的对应于临界特征值 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ 的实二维特征空间垂直.

### 10.3.2　极限环余维 1 分支的延拓

(10.67) 的极限环余维 1 分支的延拓比平衡点的更棘手. 若研究的系统不是非常艰难, 则可以用数值积分计算与环相应的 Poincaré 映射以及它的 Jacobi 矩阵, 然后对不动点分支用上面所述的延拓方法计算. 这个方法在许多情形工作得还满意, 但是, 如果环有乘子 $|\mu| \gg 1$ 或者 $|\mu| \ll 1$, 它就失败. 在这种情况, BVP 方法被证明更有效. 即可以构造一个 *边值问题*, 它的解将定义有关的分支曲线. 于是, 可以将所得的 BVP 离散化, 再在通常的正则性条件和好的初始数据下应用标准的延拓技巧.

折分支情形的处理相对比较容易, 因为分支导致对环延拓对应的边值问题

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau)-Tf(u(\tau),\alpha)=0, \\ u(1)-u(0)=0, \\ \displaystyle\int_0^1 \langle u(\tau),\dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau =0 \end{cases} \tag{10.84}$$

的折奇异性, 其中最后一个方程是参考周期解 $u^0(\tau)$ 的积分相条件 (10.18). 一般在折点附近, BVP (10.84) 有两个解它们在临界参数值重合并消失. 如在有限维情形, 当 *线性化* BVP 有非平凡解 (零函数) 时这情况发生. (10.84) 围绕周期解关于 $(u(\cdot),T)$ 的线性化有形式

$$\begin{cases} \dot{v}(\tau)-Tf_x(u(\tau),\alpha)v(\tau)-\sigma f(u(\tau),\alpha)=0, \\ v(1)-v(0)=0, \\ \displaystyle\int_0^1 \langle v(\tau),\dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau =0, \end{cases}$$

以及它的非平凡解 $(v(\cdot),\sigma)$ 可尺度化以满足

$$\int_0^1 \langle v(\tau),v(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau +\sigma^2=1.$$

因此, 定义在 $[0,1]$ 上的函数 $u(\tau), v(\tau)$ 及纯量变量 $T$ 和 $\sigma$ 的周期 BVP 系统

$$
\begin{cases}
\dot{u}(\tau) - Tf(u(\tau),\alpha) = 0,\\
u(1) - u(0) = 0,\\
\int_0^1 \langle u(\tau), \dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0,\\
\dot{v}(\tau) - Tf_x(u(\tau),\alpha)v(\tau) - \sigma f(u(\tau),\alpha) = 0,\\
v(1) - v(0) = 0,\\
\int_0^1 \langle v(\tau), \dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0,\\
\int_0^1 \langle v(\tau), v(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau + \sigma^2 - 1 = 0
\end{cases}
\tag{10.85}
$$

可对环的一般折分支进行延拓. 这个问题适当的离散化将有形式 (参看 (10.78))

$$
\begin{cases}
\mathcal{F}(\xi,\alpha) = 0,\\
\mathcal{F}_\xi(\xi,\alpha)\eta = 0,\\
\langle \eta, \eta\rangle - 1 = 0,
\end{cases}
\tag{10.86}
$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 是 $(u(\cdot),T)$ 的有限维近似, $\eta$ 是 $(v(\cdot),\sigma)$ 的有限维近似. 这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的数量积. 注意, (10.86) 可以直接从 (10.84) 的 $\mathcal{F}(\xi,\alpha)=0$ 离散化推导出.

翻转 (倍周期) 情形较简单. 引入向量值函数 $v(\tau)$ 并在区间 $[0,1]$ 上考虑下面的 *非周期* BVP:

$$
\begin{cases}
\dot{u}(\tau) - Tf(u(\tau),\alpha) = 0,\\
u(1) - u(0) = 0,\\
\int_0^1 \langle u(\tau), \dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0,\\
\dot{v}(\tau) - Tf_x(u(\tau),\alpha)v(\tau) = 0,\\
v(1) + v(0) = 0,\\
\int_0^1 \langle v(\tau), v(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau - 1 = 0,
\end{cases}
\tag{10.87}
$$

如同在折分支情形, 前面三个方程给定对 (10.67) 的极限环的标准周期 BVP (10.84). 第四个方程是沿着周期解 $u(\tau)$, (10.67) 的线性化 (*变分方程*). 最后一个方程给出 $v(\tau)$ 的标准化, 边值条件

$$v(1) = -v(0)$$

对应翻转分支. 事实上, 如果 $(u^0(\tau), v^0(\tau), T_0)$ 是 (10.87) 在 $\alpha^0$ 的解, 则尺度化系统 $\dot{u} = T_0 f(u,\alpha)$ 有满足相条件的周期为 1 的极限环, 此外, 与 Poincaré 映射相应

的 Jacobi 矩阵 $\Lambda$ 有乘子 $\mu=-1$, 因为 $\Lambda v(0)=v(1)=-v(0)$. (10.87) 的离散化可用来计算 (10.67) 的一般翻转分支曲线.

最后, 考虑 Neimark-Sacker 分支的延拓. 在这里引入复特征函数 $w(\tau)$ 以及参数化临界乘子 $\mu_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ 的纯量变量 $\theta$. 延拓 Neimark-Sacker 分支的边值问题化为下面的系统

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{u}(\tau)-Tf(u(\tau),\alpha)=0,\\ u(1)-u(0)=0,\\ \displaystyle\int_0^1\langle w(\tau),\dot{u}^0(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau=0,\\ \dot{w}(\tau)-Tf_x(u(\tau),\alpha)w(\tau)=0,\\ w(1)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w(0)=0,\\ \displaystyle\int_0^1\langle w(\tau),w^0(\tau)\rangle_{\mathbb{C}^n}\mathrm{d}\tau-1=0,\end{array}\right. \tag{10.88}$$

其中 $u^0:[0,1]\to\mathbb{R}^n$, 和 $w^0:[0,1]\to\mathbb{C}^n$ 是参考函数 (参看 (10.83)). 系统 (10.88) 可以写为实数形式, 离散化后就可用来延拓一般 Neimark-Sacker 分支.

**注**　用叙述的 BVP 问题去延拓折分支、翻转分支以及环的 Neimark-Sacker 分支时含有两个或三个用于环的延拓的微分方程, 称为*扩展增广* (extended augmented) BVPs. 用类似于有限维情形的*加边系统*可以推导*最小增广*BVPs 去延拓这些分支. 下面对翻转分支来叙述这个方法. 延拓两个参数的翻转分支曲线可化为下面的在区间 $[0,1]$ 上周期边值问题的解的延拓:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{v}(\tau)-Tf(u(\tau),\alpha)=0,\\ u(1)-u(0)=0,\\ \displaystyle\int_0^1\langle u(\tau),\dot{u}^0(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau=0,\\ G[u,T,\alpha]=0,\end{array}\right. \tag{10.89}$$

其中泛函 $G$ 的值是由 $(v(\cdot),G)$ 和所给的*边函数* (bordering fuction) $\varphi^0,\psi^0$ 以及因子 $T$ 的线性 BVP:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{v}(\tau)-Tf_x(u(\tau),\alpha)v(\tau)+G\varphi^0(\tau)=0,\\ v(1)+v(0)=0,\\ \displaystyle\int_0^1\langle\psi^0(\tau),v(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau=0\end{array}\right. \tag{10.90}$$

来计算. 函数 $\varphi^0$ 和 $\psi^0$ 的选择使得 (10.90) 唯一可解. (10.89) 中前面三个方程是指定确定 (10.67) 的极限环的标准周期 BVP (10.84). 第四个方程等价于翻转分支条件. 事实上, 如果 $G=0$, (10.84) 中的第一个方程化为沿着周期解 $u(\tau)$ 的变分方程.

(10.90) 中的最后一个方程给出变分解 $v(\tau)$ 的标准化, 边值条件 $v(1)=-v(0)$ 对应于在翻转分支的乘子 $\mu=-1$. 为了应用标准的延拓技巧, 必须用它们的有限维近似代替 (10.89) 和 (10.90), 也可以有效地计算 $G$ 关于 $u, T$ 和 $\alpha$ 的导数.

类似的方法可用来延拓折分支和 Neimark-Sacker 分支. 例如, 用 (10.89), 其中的 $G$ 现在是对 $(v(\cdot), G, S)$ 的线性 BVP:

$$\begin{cases} \dot{v}(\tau) - Tf_x(u(\tau),\alpha)v(\tau) - Sf(u(\tau),\alpha) + G\varphi^0(\tau) = 0, \\ v(1) - v(0) = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \langle f(x(\tau),\alpha), v(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \langle \psi^0(\tau), v(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau + S = 1 \end{cases} \tag{10.91}$$

计算. 用它可延拓双参数环的折分支 (参看 (10.85)). Neimark-Sacker 分支的延拓更棘手 (见附录 D).

◇

### 10.3.3　余维 1 同宿轨道的延拓

这一节处理同宿于具单零特征值的双曲平衡点或者非双曲平衡点的同宿轨道的延拓. 如同在第 6, 7 章中看到的, 出现这种轨道 $\Gamma_0$ 是余维 1 现象: 在一般的双参数系统 (10.67) 中, 它是沿着 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面内的曲线存在. 因此这个问题是延拓这条曲线, 只要在这条曲线上的初始点和对应的同宿解已知.

假设在 $\alpha_0$ 系统 (10.67) 有 **双曲平衡点** $x_0$. 以 $A(x,\alpha)$ 记 Jacobi 矩阵 $f_x(x,\alpha)$. 于是, 假设 $A(x_0,\alpha_0)$ 有 $n_+$ 个不稳定特征值 $\lambda_i$, $i=1,2,\cdots,n_+$ 和 $n_-$ 个稳定特征值 $\mu_i$, $i=1,2,\cdots,n_-$, 使得 $n_-+n_+=n$, 且

$$\mathrm{Re}\,\mu_{n_-} \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\mu_2 \leqslant \mathrm{Re}\,\mu_1 < 0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\mu_{n_+}.$$

(10.67) 的同宿解 $x(t)$ 满足条件

$$x(t) \to x_0, \quad 当\ t \to \pm\infty, \tag{10.92}$$

其中 $x_0$ 是平衡点,

$$f(x_0, \alpha) = 0. \tag{10.93}$$

注意, 条件 (10.92) 和 (10.93) 并不完全给定同宿解. 事实上, (10.67), (10.92) 和 (10.93) 的解的任何一个时间移位仍是同宿解. 因此, 类似于极限环的情况, 要有固定的相条件. 如对环, 下面的**积分相条件**可被应用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x(t) - x^0(t), \dot{x}^0(t)\rangle \mathrm{d}t = 0, \tag{10.94}$$

其中 $x^0(t)$ 是参考解, 假定是已知的. 方程 (10.94) 是两点 $x$ 和 $x^0$ 之间在时间移位下 $L_2$ 距离局部极小值的必要条件. 通常, 在延拓的设置中 $x^0$ 是上一个在曲线上找到的点的同宿解.

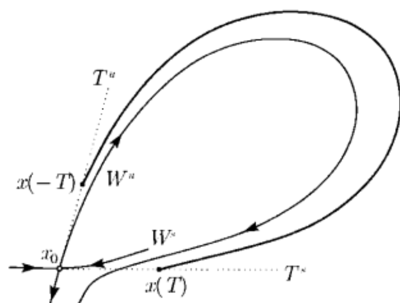



图 10.12　当 $x_0$ 是双曲点时, 边界条件的投影: $x(-T)-x_0 \in T^u, x(T)-x_0 \in T^s$

定义在无穷时间区间上的问题 (10.67), (10.92)~(10.94) 必须用截断有限区间, 例如, $[-T,T]$ 来近似, 并用适当的边值条件来说明. 例如, 可以将解的两个端点放在 $A(x_0,\alpha)$ 的稳定和不稳定特征空间上, 它们提供 $W^{s,u}(x_0)$ 的线性近似 (图 10.12)①. 用 **边界条件的投影**

$$L_s(x_0,\alpha)(x(-T)-x_0)=0, \quad L_u(x_0,\alpha)(x(T)-x_0)=0 \tag{10.95}$$

代替 (10.92) 就可做到这一点. 这里 $L_s(x_0,\alpha)$ 是 $(n_- \times n)$ 矩阵, 它的行组成 $A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)$ 的稳定特征空间的基. 因此, $L_u(x_0,\alpha)$ 是 $(n_+ \times n)$ 矩阵, 它的行组成 $A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)$ 的不稳定特征空间的基. 例如, 若 $n=3$, 矩阵 $A$ 有实特征值 $\mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1$(鞍点情形), 则 $L_u=(p_1^u)^{\mathrm{T}}$, 其中 $p_1^u$ 是 $A^{\mathrm{T}}$ 对应于 $\lambda_1$ 的特征向量 $A^{\mathrm{T}}p_1^u=\lambda_1 p_1^u$,

$$L_s = \begin{pmatrix} (p_1^s)^{\mathrm{T}} \\ (p_2^s)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

而 $A^{\mathrm{T}}p_k^s=\mu_k p_k^s$, $k=1,2$. 存在构造 $L_s$ 和 $L_u$ 的方法使得它们光滑地依赖于 $\alpha$ (见文献评注).

最后, 把相条件 (10.94) 在区间 $[-T,T]$ 上截断得

$$\int_{-T}^{+T} \langle x(t)-x^0(t), \dot{x}^0(t)\rangle \mathrm{d}t = 0. \tag{10.96}$$

合并上面的方程给出对同宿延拓的 BVP:

① 注意, 一般地, (10.67) 有满足这些边界条件的轨道, 其参数值接近于但不等于发生同宿轨道的参数值.

$$
\begin{cases}
f(x_0,\alpha)=0,\\
\dot{x}(t)-f(u(t),\alpha)=0,\\
L_s(x_0,\alpha)(x(-T)-x_0)=0,\\
L_u(x_0,\alpha)(x(T)-x_0)=0,\\
\displaystyle\int_{-T}^{T}\langle x(t)-x^0(\tau),\dot{x}^0(t)\rangle \mathrm{d}t-1=0,
\end{cases}
\tag{10.97}
$$

已经证明 (见文献评注), (10.67) 中*正则同宿轨道*的存在性导致截断 BVP (10.97) 解的存在性. 此外, 当 $T\to\infty$ 时, (10.97) 的解收敛于限制在适当有限区间上的同宿解. 收敛率对参数值和解都是指数式.

可试图用打靶法解 (10.97)(即计算在 $W^s(x_0)$ 和 $W^u(x_0)$ 上的轨道, 并估计这些流形之间的距离, 目的是使得当参数变化时这个距离变为零), 但是较好的结果可借助正交配置法的帮助来近似达到 (见 10.1.4 节). 所得系统在有限维空间定义了一条曲线, 它可用标准方法延拓. 这条曲线在 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 平面上的投影给出同宿分支曲线的近似.

为了开始进行延拓, 必须知道*初始同宿解*. 这个解可用打靶法或者用长周期轨道 (因为按照第 6 章叙述的 Shil′nikov 定理, 这样的长周期轨道在同宿轨道附近是存在的) 得到. 对开始延拓存在另外的可能性, 包括开关在 Bogdanov-Takens 分支的同宿曲线.

一个方便的方法是将在 (10.97) 中的时间区间尺度化到 $[0,1]$, 并考虑代替的 BVP:

$$
\begin{cases}
f(x_0,\alpha)=0,\\
\dot{u}(\tau)-2Tf(u(\tau),\alpha)=0,\\
L_s(x_0,\alpha)(u(0)-x_0)=0,\\
L_u(x_0,\alpha)(u(1)-x_0)=0,\\
\displaystyle\int_{0}^{1}\langle u(\tau)-u^0(\tau),\dot{u}^0(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau-1=0,
\end{cases}
$$

其中 $u^0$ 是单位区间上的参考解.

**注**　若 $x_0$ 的不稳定流形是一维, 则边值问题可稍作简化. 就是说, 假定永远只有一个特征值具正实部 $\lambda_1>0$. 于是, 左边的边值条件可明显地写为

$$
x(-T)=x_0+\varepsilon q_1^u,
\tag{10.98}
$$

其中 $q_1$ 是 Jacobi 矩阵的特征值向量 $A(x_0,\alpha)q_1^u=\lambda_1 q_1^u$, 以及 $\varepsilon>0$ 是使用者定义的小常数. 因此没有积分相条件要求. 在右边端点有单个纯量方程

$$
\langle p_1^u, x(T)-x_0\rangle=0,
$$

其中 $p_1^u$ 是伴随特征向量 $A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)p_1^u=\lambda_1 p_1^u$. 注意, 特征向量 $q_1^u$ 和 $p_1^u$ 可通过附加它们的定义方程和延拓问题的标准化条件去计算. 由 (10.98) 给的点 $x(-T)$ 也可用作初始点去数值积分 $W^u(x_0)$, 目的是为了用打靶法寻找初始同宿轨道①. ◇

如果 $x_0$ 有单零特征值 (即 $x_0$ 是鞍-结点或鞍-鞍点), 投影 (10.95) 仅仅给出 $n_-+n_+=n-1$ 个边值条件. 换句话说, 边值条件 (10.95) 将解的两个端点放在 $A(x_0,\alpha)$ 的中心不稳定和中心稳定特征空间上, 如果它们存在 (见图 10.13). 因此要求有额外的方程, 即如果确定折分支, 则有

$$\det A(x_0,\alpha)=0. \tag{10.99}$$

可以证明 (见文献评注)(10.97), (10.99) 的解存在, 且 $T\to\infty$ 时收敛于同宿解, 只要 (10.67) 中一般的鞍-结点同宿分支 (见第 7 章) 发生. 收敛率对参数保持指数式但对同宿解只有 $O(T^{-2})$. 显然, 由 (10.97), (10.99) 定义的曲线在 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 平面上的投影与折分支边界

$$\begin{cases} f(x_0,\alpha)=0,\\ \det A(x_0,\alpha)=0 \end{cases}$$

重合, 它可如 10.3.1 节叙述的方法计算, 但是求解 (10.97), (10.99) 也给出同宿解.

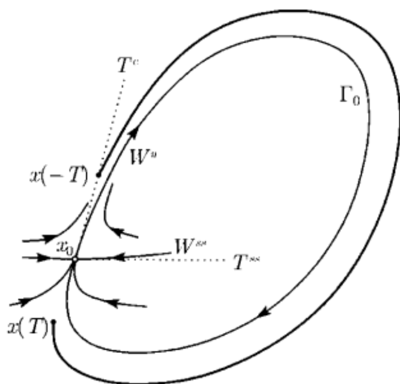



图 10.13　$x_0$ 是鞍结点时边界条件的投影: $x(-T)-x_0\in T^c$; 没有条件加在 $x(T)$ 上

### 10.3.4　余维 2 分支的探测、定位与分析

在跟随对应于余维 1 分支的分支曲线时, 应该能够探测和定位可能的余维 2 分支. 因此必须推导特殊的测试函数. 这里将集中探测余维 2 平衡点分支. 用测试函数去探测余维 2 同宿分支将在附录 C 中讨论.

注意, 按照引理 10.3 和引理 10.4, 在延拓余维 1 曲线的过程中可以计算高阶奇异性. 如果奇异性起因于额外的线性退化 (即 $\dim W^c$ 发生变化), 则问题最

① $W^u$ 的高阶近似, 如在 10.3.1 节中推导的二阶近似也可应用.

容易在最小增广法内解决. 假设用增广系统 (10.68) 延拓折分支曲线. 则对 Hopf 分支 (10.41) 沿着这条曲线追踪测试函数 $\psi_H$, 可探测到 Bogdanov-Takens 分支和折 -Hopf 分支. 类似地, 沿着 Hopf 曲线 (10.69) 计算由 (10.39) 给出的折分支测试函数 $\psi_t$ 提供的交替方法可去探测相同的分支. 正如已经指出的, Hopf-Hopf 分支点可以作为 Hopf 延拓问题 (10.69) 的分枝点来探测. 也可限制在特征空间的补空间去追踪 Hopf 测试函数 $\psi_H$ 来探测这个奇异性.

要探测由非线性项带来的奇异性, 需计算对应的规范形系数. 因为对这些计算要求某些伴随特征向量, 可附加适当的标准化了的伴随特征向量方程来扩展标准的增广系统. 例如, 为探测平衡点折曲线的尖分支, 必须追踪数量积 $\langle p, B(q,q)\rangle$, 其中 $p$ 是转置 Jacobi 矩阵零特征向量. 可以用定义系统

$$\begin{cases} f(x,\alpha)=0, \\ A(x,\alpha)=0, \\ A^{\mathrm{T}}(x,\alpha)p-\varepsilon p=0, \\ \langle q,q\rangle-1=0, \\ \langle p,p\rangle-1=0, \end{cases} \tag{10.100}$$

在 $(x,\alpha,q,p,\varepsilon)$ 空间中作为折曲线延拓的的一部分来得到标准化了的伴随特征向量 $p$, 其中 $\varepsilon$ 是人为参数, 沿着折曲线它等于零. 注意, 跟随曲线 (10.100), 作为测试函数 $\psi_{BT}=\langle p,q\rangle$ 的正则零点可探测 Bogdanov-Takens 奇异性 (证明). 对 Hopf 分支的延拓与伴随特征向量 (它的实部和虚部) 的标准化同时计算的类似系统可以推导, 这要求计算 Lyapunov 第一系数 $l_1$, 并探测它的零点 (Bautin 点). 为了沿着由增广系统 (10.80) 定义的 Hopf 曲线, 探测 Bogdanov-Takens 点可以追踪函数 $\tilde{\psi}_{BT}=\kappa$.

附加测试函数到追踪适当的延拓问题中, 就可通过某些迭代法定位对应的余维 2 分支点. 使第三个参数自由就可延拓三参数的余维 2 点 (见文献评注). 所述的所有构造可在离散 – 时间系统中实现. 留给读者作为练习.

当余维 2 平衡点或不动点被定位了, 就应该分析它. 就是说, 如第 8, 9 章解释的, 必须计算 ODEs 和映射限制在对应的中心流形上的临界规范形系数. Bautin, Hopf-Hopf 以及其他余维 2 分支的规范形系数依赖于在临界点系统右端的四阶、五阶偏导数 (见 8.7 节和 9.7 节). 类似于折和 Hopf 情形, 它们的计算可化为某些方向导数的计算. 事实上, 下面的*极化恒等式*( polarization identity) 成立

$$\begin{aligned} C(u,v,w)=\frac{1}{24}\,[\,&C(u+v+w,\cdots)-C(u+v-w,\cdots) \\ &-C(u-v+w,\cdots)+C(u-v-w,\cdots)\,], \\ D(u,v,w,y)=\frac{1}{192}\,[\,&D(u+v+w+y,\cdots)-D(u+v+w-y,\cdots) \\ &+D(u+v-w-y,\cdots)-D(u+v-w+y,\cdots) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- D(u-v+w+y,\cdots)+D(u-v+w-y,\cdots)\\
&-D(u-v-w-y,\cdots)+D(u-v-w+y,\cdots)],\\
E(u,v,w,y,z)=&\frac{1}{1920}E(u+v+w+y+z,\cdots)-E(u+v+w+y-z,\cdots)\\
&+E(u+v+w-y-z,\cdots)-E(u+v+w-y+z,\cdots)\\
&-E(u+v-w+y+z,\cdots)+E(u+v-w+y-z,\cdots)\\
&-E(u+v-w-y-z,\cdots)+E(u+v-w-y+z,\cdots)\\
&-E(u-v+w+y+z,\cdots)+E(u-v+w+y-z,\cdots)\\
&-E(u-v+w-y-z,\cdots)+E(u-v+w-y+z,\cdots)\\
&+E(u-v-w+y+z,\cdots)-E(u-v-w+y-z,\cdots)\\
&+E(u-v-w-y-z,\cdots)-E(u-v-w-y+z,\cdots),
\end{aligned}
$$

这里的点表示重复变量. 这些公式可以与四阶和五阶方向导数的标准有限差分近似一起应用.

用讨论在余维 2 点的分枝开关问题来结束这一节. 仅考虑连续－时间系统的平衡点分支. 在一般的尖分支点不存在分枝开关问题, 因为只存在单个折曲线通过而没有任何几何奇异性. 反之, Hopf-Hopf 点却提供最小增广系统的分枝点. 因此, 可以用上一节阐明的分枝技巧初始化其他 Hopf 分枝. 在一般的 Bogdanov-Takens 或者折 -Hopf 点从折曲线开关 Hopf 曲线是没有困难的, 因为这些点在各自的曲线上是正则点: 余维 2 点自己就可作为初始点. 正如在第 8 章看到的, 在某些分支曲线上, 极限环和同宿分支从某些余维 2 点发生. 开关这些分枝需要特殊的技巧 (见文献评注).

## 10.4　延拓策略

分析一个给定的动力系统要求清晰的策略, 这种策略由分支理论提供. 形式上, 在分析时, 总是在某个空间延拓某些曲线并追踪几个测试函数去探测和定位这些曲线上的特殊点. 分支的理论分析建议那些高余维分支可期望沿着迹曲线产生, 因此那些测试函数必须被追踪以去探测和定位这些点. 也预言在探测点出发的相同余维的分支曲线是哪一些. 有被定位的特殊点, 或者开关这些出发曲线之一, 或者 “激活” 更多参数去延拓, 如果可能, 在多个参数定位点. 当然, 也可以仅延拓原来的分枝而远离特殊点.

任何一个系统的分析通常是从某些固定参数值至少定位一个平衡点开始. 然后 “激活” 系统的一个参数, 并延拓所得的关于这个参数的平衡点. 在延拓过程中有些折点或 Hopf 点可以被探测到. 一般地, 这些点是非退化的. 因此, 从 Hopf 点

分支出的极限环分支的方向是由第一个 Lyapunov 系数的符号所确定. 延拓环可从 Hopf 点开始, 当参数变化时可能的余维 1 分支被探测和定位. 开关倍周期环可在翻转点进行.

将第二个参数自由化并应用增广系统之一, 可以计算平面上由这两个激活参数定义的分支曲线. 通常, 探测连接原来分离的余维 1 点的余维 2 点. 例如, 在单参数分析中找到的两个折点, 可属于当两个参数变化时通过尖点的相同折分支曲线. 因此, 高阶分支对附近的分支图起着 "组织中心" 的作用. 这个作用甚至很显著, 因为某些余维 1 极限环分支曲线可从余维 2 点出发. 最简单的例子是环的折曲线从一般的 Bautin 点出发, 鞍点同宿分支曲线从一般的 Bogdanov-Takens 点出发. 它们的延拓可从这些点开始. 更加困难的问题是从折 -Hopf 和 Hopf-Hopf 点开始的大范围分支曲线.

极限环余维 1 分支的延拓通常显示它们自己的余维 2 分支点 (强共振等). 对平衡点, 环和同宿轨道所得分支边界的交叠, 提供系统分支图的某些知识, 可能给出其他分支的某些信息, 这些信息包括更加复杂的不变集, 例如环面. 虽然, 形式化了的特殊动力系统的分析将永远是一门艺术, 其中相互影响的计算机工具 (见文献评注) 是必需的.

## 10.5　练　　习

下面练习的大多数要求利用计算机, 有些软件工具在文献评注中有说明.

1. 通过 Newton 法的 Feigenbaum 普适映射 (先参看第 4 章的附录 A).

(a) 假设二重算子

$$(Tf)(x) = -\frac{1}{a}f(f(-ax)), \quad a = -f(1)$$

的不动点 $\varphi(x)$ 有多项式形式

$$\varphi_0(x) = 1 + b_1x^2 + b_2x^4,$$

其中 $b_{1,2}$ 为某些未知系数. 将 $\varphi_0$ 代入不动点方程 $\varphi - T\varphi = 0$ 并忽略所有 $o(x^4)$ 项以截断它. $x^2$ 项和 $x^4$ 项的系数定义了 $(b_1, b_2)$ 的两个方程的多项式系统. 用 Newton 法从 $(b_1^{(0)}, b_2^{(0)}) = (-1.5, 0.0)$ 开始数值求解这个系统. 验证: 迭代收敛于

$$(b_1, b_2) \approx (-1,5222, 0.1276),$$

它是真实系数值的好近似.

(b) 现在取

$$\varphi_0(x) = 1 + b_1x^2 + b_2x^4 + b_3x^6,$$

这给出 $\varphi$ 的下一个近似, 并重复这个步骤, 现在去掉 $o(x^6)$ 项. (提示: 符号操作程序可以应用) 解释为何引入 $b_3x^6$ 会改变系数 $b_{1,2}$ 所得的值.

(c) 描述一个算法可以计算 $\varphi$ 的近似到给定的精度. 能否用于其他异于 $\{1, x^2, x^4, \cdots\}$ 的基上. 它有任何什么优点吗? 提示: 参见文献 (Babenko, Petrovich, 1983, 1984).

(d) 如何近似 Feigenbaum 常数?

2. Broyden 与 Newton 法比较 (Dennis, Schnabel, 1983). 两个方程的系统

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ \mathrm{e}^{x_1-1} + x_2^3 - 2 = 0 \end{cases}$$

有解 $x_1^0 = x_2^0 = 1$.

(a) 解析推导 Jacobi 矩阵 $A(x)$ 的表达式, 再用 Newton 法程序求解这个系统. 也用 Broyden 法于此系统, 其中 $A^{(0)} = A(x^{(0)})$, $x^{(0)}$ 是两个方法的初始点.

(b) 从同一个初始点 $x_1^{(0)} = 1.5$, $x_2^{(0)} = 2$ 出发, 按精度 $10^{-13}$ 用每个方法定位指定的解, 实验比较要求迭代的次数.

(c) 对矩阵 $A(x^{(0)})$, 在所有迭代中, 对 Broyden 法和 Newton 法进行同样的比较.

(d) 在 Newton 法中修改程序, 用有限差分按精度 $10^{-6}$ 近似计算 Jacobi 矩阵. 如 (b) 中按相同的精度从同一个初始点出发求收敛的解, 用所得的算法比较迭代次数和右端所需计算的次数,

3. (积分相条件) 求证: 条件

$$\int_0^1 \langle u(\tau), \dot{v}(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0$$

是两个 (光滑) 周期 1 函数 $u$ 和 $v$ 之间的 $L_2$ 距离

$$\rho(\sigma) = \int_0^1 \|u(\tau+\sigma) - v(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau$$

关于可能的移位 $\sigma$ 达到局部绝值的必要条件.

4. Gauss 点. (a) 应用 Gramm-Schmit 正交化程序

$$\psi_0 = \varphi_0, \quad \psi_n = \varphi_n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle \varphi_n, \psi_j\rangle}{\langle \varphi_j, \psi_j\rangle}\psi_j, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中数量积

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{+} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in [-1, 1],$$

置函数 $\varphi_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, \cdots$. 所得到的正交多项式是 Legendre 多项式. 验证:

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= 1,\\
\psi_1(x) &= x,\\
\psi_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\\
\psi_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2 - 3x),\\
\psi_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\\
\psi_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}$$

(b) 用 Newton 法求上面多项式 $\psi_j(x)$, 对 $j = 1, 2, \cdots, 5$ 的所有根 (Gauss 点), 精度为 $\varepsilon = 10^{-13}$.

5. 分枝点. (a) 证明: $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 是延拓问题

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2^2 + x_2^3 = 0,$$

简单分枝点, 并计算通过它们的分枝切向量.

(b) 沿着平衡点分枝 $x_2 = x_1$ 计算测试函数 (10.62), 并验证在分枝点它改变符号.

(c) 对几个小 $|\varepsilon|$, 延拓通过点 $x = (-2, 2)$ 附近的扰动问题 $f(x) - \varepsilon = 0$ 的分枝. 应用这个结果延拓原来问题的第二个分枝.

6. (广义翻转延拓) 指定一个扩展系统允许对离散时间系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}^3$$

的广义翻转分支进行延拓.

7. (Hassel-Lawton-May 模型的不动点和周期轨道) 考虑递推关系

$$x_{k+1} = \frac{rx_k}{(1 + x_k)^\beta},$$

其中 $x_k$ 是种群在 $k$ 年的密度, $r$ 和 $\beta$ 是增长参数.

(a) 引入新变量和新参数: $y = \ln x$, $R = \ln r$, $b = \ln \beta$. 把这个模型写为一维动力系统

$$y \mapsto R + y - \mathrm{e}^b \ln(1 + \mathrm{e}^y), \tag{E.1}$$

(b) 令 $R = 3.0$, $b = 0.1$ 并计算 (E.1) 从 $y_0 = 0$ 出发的轨道. 观稳定不动点 $y^{(0)} \approx 2.646$ 的轨道的收敛性.

(c) 在区间 $0 \leqslant b \leqslant 3$ 内关于参数 $b$ 延拓所得的平衡点 $y^{(0)}$. 在 $b_1 \approx 1.233$ 探测超临界翻转分支.

(d) 在翻转点开关周期 2 环分支, 并关于 $b$ 延拓, 直到在 $b_2 \approx 2.1937$ 发生下一个倍周期.

(e) 在翻转点开关周期 2 环分支, 并关于 $b$ 延拓, 直到在 $b_4 \approx 2.5691$ 发生下一个倍周期.

(f) 在区域 $0 \leqslant b \leqslant 3$, $0 \leqslant R \leqslant 10.0$ 内关于双参数 $(b, R)$ 延拓周期 1, 2, 和 4 环的翻转分支. 验证 Feigenbaum 普适性. 在什么地方可能会出现混沌?

8. (扰动时迟逻辑映射中的 Arnold 舌) 考虑下面的递推关系 (见例 7.2)

$$x_{k+1} = r x_k (1 - x_{k-1}) + \varepsilon, \tag{E.2}$$

其中 $x_k$ 是种群在 $k$ 年的密度, $r$ 为增长率, $\varepsilon$ 是移民率.

(a) 引入 $y_k = x_{k-1}$, 并把 (E.2) 重写为平面动力系统

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx(1-y)+\varepsilon \\ x \end{pmatrix}. \tag{E.3}$$

(b) 令 $r = 1.9$, $\varepsilon = 0$ 并从 $(x_0, y_0) = (0.5, 0.2)$ 开始迭代 (E.3) 的轨道, 直到它收敛于 (近似地) 不动点.

(c) 激活参数 $r$ 并继续定位不动点. 验证在 $r = 2$ 发生 Neimark-Sacker 分支, 验证临界乘子有形式

$$\mu_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_0},\ \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

这是不是强共振?

(d) 对 $r = 2.01, 2.05, 2.10$ 和 $2.15$ 采用不同的初始数据迭代映射 (E.3). 验证迭代收敛于闭不变曲线, 此曲线给出拟周期序列 $\{x_k\}$.

(e) 令 $r = 2.177$ 并从 (d) 步中得到的最后一点开始迭代轨道. 观察这个轨道收敛于周期 7 环. 在环上选择点使得它具有最大的 $x$ 坐标.

(f) 对 $r$ 延拓这个周期 7 环 (见图 7.23). 解释在 $(r, x)$ 平面上所得的闭曲线. 提示: 周期 7 轨道上每一点是映射 (E.3) 第七次迭代的不动点. 验证: 周期 7 环在 $r_1 < r < r_2$ 内存在, 其中 $r_1 \approx 2.176$ 和 $r_2 \approx 2.201$ 是折分支点.

(g) 从 (e) 关于 $\varepsilon$ 延拓周期 7 环, 并求它在 $\varepsilon \approx 0.0365$ 的超临界倍周期 (翻转) 分支.

(h) 在 $(r, \varepsilon)$ 平面内延拓第 (c) 中得到的 Neimark-Sacker 分支并求得图 7.24 所示的曲线 $h^{(1)}$.

(i) 从 (f) 得到的两个分支点开始令 $(r, \varepsilon)$ 变化延拓对周期 7 轨道的折曲线 (见图 7.24 中的曲线 $t_{1,2}^{(7)}$). Neimark-Sacker 曲线上哪一点趋于这折曲线? 求对应的 $\theta_0$. 是否符合 Neimark-Sacker 分支理论和锁相理论? 哪里是周期 6 环?

(j) 在 $(r,\varepsilon)$ 平面从 (g) 中得到的点开始延拓翻转分支曲线 $f^{(7)}$, 由此划定周期 7 环的存在性区域 (见图 7.24). 验证 $f^{(7)}$ 与折分支曲线 $t_{1,2}^{(7)}$ 有两个公共点 (在图 7.24 所描述的区域之外). 在那里周期 7 环有乘子 $\mu_{1,2}^{(7)}=\pm 1$(余维 2 分支).

9. (捕食 – 被捕食模型的平衡点和极限环) 考虑下面的 ODEs 系统 (Bazykin, 1985)

$$\begin{cases} \dot{x}=x-\dfrac{xy}{1+\alpha x}, \\ \dot{y}=-\gamma y+\dfrac{xy}{1+\alpha x}-\delta y^{2}, \end{cases}$$

其中 $x$ 和 $y$ 分别是被捕食者和捕食者的密度, $\alpha$ 是捕食者功能性反应的饱和参数, $\gamma$ 刻画捕食者自然死亡率, 以及 $\delta$ 是捕食者对某个外部资源的竞争率. 当 $\alpha=\delta=0$ 时得到古典的 Volterra 系统.

(a) 令 $\alpha=0,\gamma=2,\delta=0.5$, 从 $(x_0,y_0)=(1,1)$ 开始对系统的轨道数值积分. 验证: 这个轨道收敛于稳定平衡点 $(x,y)=(2.5,1.0)$. 尝试用几个不同的初始点.

(b) 关于参数 $\alpha$ 延拓找到的平衡点, 并探测和定位折分支点. 激活参数 $\delta$, 在 $(\alpha,\delta)$ 平面内计算折分支曲线 $t$(见图 10.14). 在这条折曲线上寻找 Bogdanov-Takens 点 $B=(\alpha_0,\delta_0)\approx(0.2808,0.171)$.

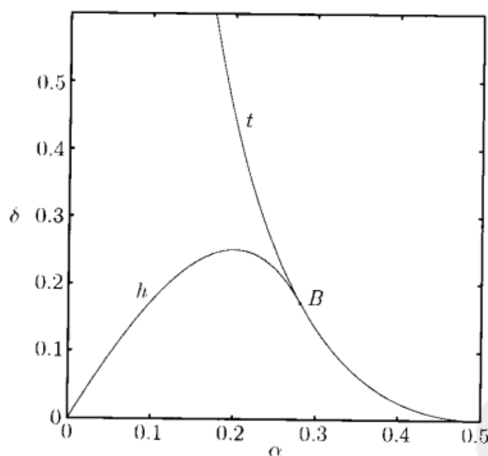



图 10.14 捕食 – 被捕食模型的折曲线 ($t$) 和 Hopf 曲线 ($h$); Bogdanov-Takens 点标为 $B$

(c) 从 Bogdanov-Takens 点开始, 延拓从这点出发的 Hopf 分支曲线 $h$(见图 10.14). 预报在点 $B$ 附近穿过 Hopf 曲线产生的极限环的稳定性.

(d) 在 Hopf 分支曲线上, 在它关于参数 $\delta$ 的绝大点 $(\alpha_1,\delta_1)\approx(0.199586,0.2499)$ 附近选择一点. 减少小增量 $\delta$(例如令 $\delta=0.229$), 并用系统的数值积分求由 Hopf 分支所产生的稳定极限环. 尝试用不同的初始值但不要离开环太远并验证它的稳定性.(近似地) 确定环的周期.

(e) 从 (d) 关于参数 $\delta$ 沿着两个可能的方向延拓环. 追踪环的周期 $T_0$ 以及它的乘子. 注意, 当 $\delta$ 趋于 $\delta_0 \approx 0.177$ 时环周期 $T_0$ 迅速增长 (见图 10.15). 猜测此环具有什么分支. 增加 $T_0$ 的值描绘环, 当它趋于同宿轨道时追踪它形状的变化.

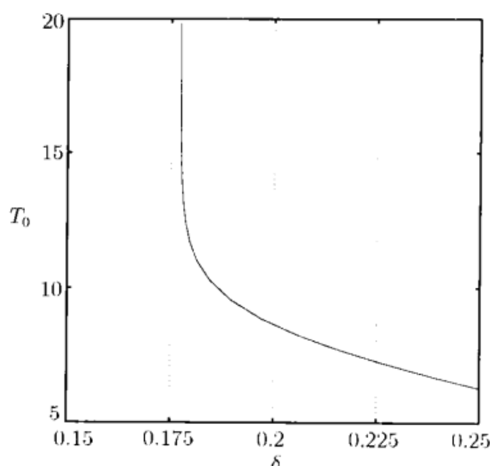



图 10.15　环周期 $T_0$ 关于 $\delta$ 的依赖性; $\delta_0 \approx 0.177$ 对应于同宿分支

(f) 在 $(\alpha, \delta)$ 平面内延拓同宿分支曲线, 确信它趋于 Bogdanov-Takens 点 $B$.

10. (Lorenz-84 模型) 考虑下面的系统 (Lorenz, 1984; Shil′nikov et al., 1995)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} = bxy + xz - z, \end{cases}$$

其中 $(a, b, F, G)$ 是参数. 固定 $a = 0.25,\ b = 4$.

(a) 验证这个系统在 $ZH = (G_0, F_0) \approx (1.682969, 1.684052)$ 有折 -Hopf 分支 $(\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}\omega_0)$. 提示：见第 8 章练习 12.

(b) 从折 -Hopf 点 $ZH$ 开始延拓这个系统的折分支曲线 $(t)$ 和 Hopf 分支曲线 $(h)$. 在折曲线上寻找尖分支点 $C = (G_c, F_c) \approx (0.292, 0.466)$ (见图 10.16).

11. (捕食–两个被捕食系统的极限环和异宿轨道) 考虑描述两个被捕食者被一个捕食者侵袭的系统 (参见文献 (Bazykin, 1985))

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - x - 6y - 4z), \\ y = y(\beta - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z). \end{cases}$$

(a) 固定 $\alpha = 2.4, \beta = 1.77$. 从 $(x_0, y_0, z_0) = (0.9, 0.6, 0.001)$ 出发积分这个系统, 并观察这条轨道向稳定平衡点 $(x_0, y_0, z_0) \approx (0.6919, 0.228, 0.085)$ 收敛.

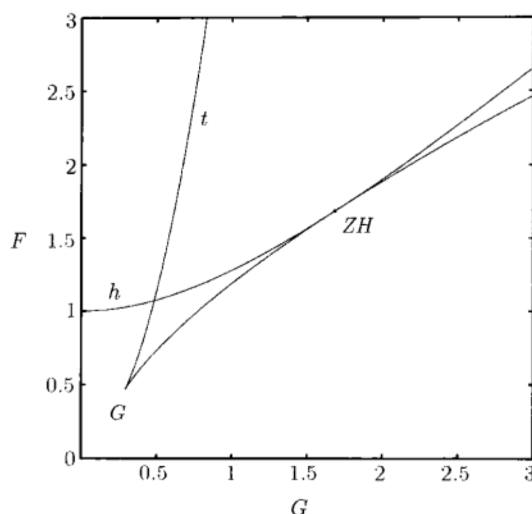



图 10.16　Lorenz-84 模型的折曲线 ($t$) 和 Hopf 分支曲线 ($H$); 余维 2 分支点: $ZH$- 折 -Hopf, $C$ 尖分支点

(b) 从 (a) 关于参数 $\beta$ 延拓平衡点, 求证在 $\beta_H = 1.7638\cdots$ 它产生超临界 Hopf 分支.

(c) 取 $\beta = 1.76$ 并用数值积分求系统的稳定极限环. 验证这个环的周期 $T_0 \approx 26.5$.

(d) 对参数 $\beta$ 延拓极限环并追踪它的周期 $T_0$ 关于 $\beta$ 的依赖性 (见图 10.17). 对不同的 $T_0$ 描绘环并尝试理解当 $\beta \to \beta_0 \approx 1.7353$ 时 $T_0 \to \infty$ 的极限位置. 提示: 极限环趋于异宿环, 这个异宿环是由连接鞍点的三个轨道所组成, 两条轨道属于不变相坐标轴并且在参数变化时保持 (见图 10.18).

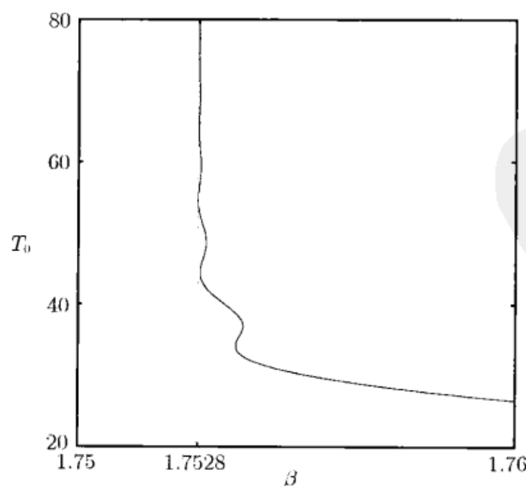



图 10.17　环周期 $T_0$ 关于 $\beta$ 的依赖性; $\beta_0 \approx 1.75353$ 对应于异宿分支

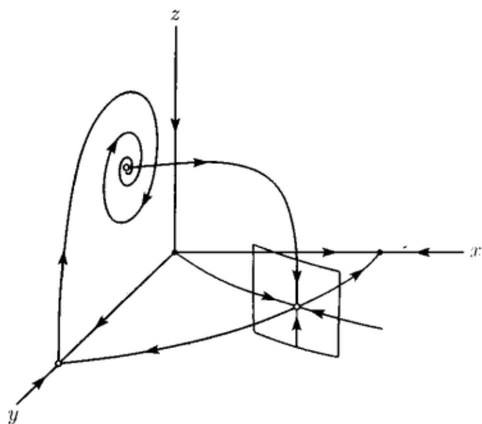



图 10.18　异宿连接

(e) 分析在环曲线上探测的分支, 变化参数 $(\alpha, \beta)$ 延拓几条翻转分支曲线和折分支曲线.

12. (周期性强迫捕食–被捕食系统) 对例 9.3 所述的周期性强迫捕食–被捕食系统再画参数图.

13. (Moore-Penrose 延拓)

**定义 10.4**　设 $A$ 是秩为 $n$ 的 $n\times(n+1)$ 矩阵. $A$ 的 Moore-Penrose 逆是 $(n+1)\times n$ 矩阵

$$A^{+}=A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

(a) 考虑线性系统

$$Ay=a,\quad y\in\mathbb{R}^{n+1}, a\in\mathbb{R}^{n}.$$

证明: $y=A^{+}$ 是这个系统满足正交性条件 $\langle v,y\rangle=0$ 的解, 其中 $v\in\mathbb{R}^{n+1}$ 是使得 $Av=0$ 的非零向量.

(b) 考虑光滑的延拓问题

$$F(y)=0,\quad F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n}.$$

设 $y^{0}\in\mathbb{R}^{n+1}$ 是充分接近于由延拓问题定义的曲线上的正则点. 记 $A(y)=F_{y}(y)$ 并定义 Gauss-Newton 校正

$$y^{j+1}=y^{j}-A^{+}(y^{j})F(y^{j}),\quad j=0,1,2,\cdots.$$

解释为何这些迭代渐近等价于图 10.7 所示的几何结构.

(c) 作出有效的 Moore-Penrose 延拓工具, 其中曲线上下一个点的切向量的计算并入到校正中去. 提示: 参见文献 (Allgower, Georg, 1990).

## 10.6　附录 A：Newton 法的收敛性定理

这个附录叙述关于 Newton 法和 Newton 弦法的两条收敛性定理, 但不给出证明. 为了给出 Newton 法收敛性定理, 将 $f(\xi)$ 在点 $x$ 附近展开成 Taylor 级数, 并明显地写出二次项:

$$f(\xi)=f(x)+A(x)(\xi-x)+\frac{1}{2}B(x;\xi-x,\xi-x)+O(\|\xi-x\|^3),$$

其中

$$B_j(x;h,h)=\sum_{k,l=1,\cdots,n}\left.\frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{\xi=x}h_kh_l,\quad j=1,2,\cdots,n$$

是 $f$ 在 $x$ 的 双线性部分. 以 $T(x,r)$ 记中心在点 $x\in\mathbb{R}^n$ 半径为 $r$ 的球:

$$T(x,r)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\|\xi-x\|\leqslant r\}.$$

**定理 10.4**(Kantorovich)　设

$$\sup_{\xi\in T(x^{(0)},r_0)}\sup_{\|h\|\leqslant 1}\|A^{-1}(x^{(0)})B(\xi;h,h)\|=M<\infty,$$

且令

$$\delta=\|A^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})\|.$$

假设 $2\delta M<1$ 且

$$\delta\leqslant\frac{r_0}{2}(1+\sqrt{1-2\delta M}).$$

则迭代 (10.3), (10.4) 收敛于系统 (10.2) 的解 $x^0\in T(x^{(0)},r_0)$, 此外

$$\|x^{(j)}-x^0\|\leqslant M^{-1}2^{-j}(2\delta M)^{2^j},\quad j=0,1,\cdots.\qquad\square$$

**定理 10.5**　在定理 10.4 的条件下, Newton 弦法 (10.5), (10.6) 收敛于系统 (10.2) 的解 $x^0\in T(x^{(0)},r_1)$, 其中 $r_1=\min(r_0,M^{-1})$, 此外,

$$\|x^{(j)}-x^0\|\leqslant\delta(1-2\delta M)^{-1/2}\left[1-(1-2\delta M)^{1/2}\right]^j,\quad j=0,1,\cdots.\qquad\square$$

## 10.7　附录 B：双交错矩阵积

我们已经在 10.2.2 节和 10.3.1 节看到, 双交错积在对 Hopf 分支和 Neimark-Sacker 分支的探测和延拓中起着重要作用. 由于这个课题在标准的线性代数中没有介绍, 在这里证明几个关于双交错积的基本事实, 包括定理 10.3.

考虑 $3 \times 3$ 实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

它的特征值满足特征方程

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \rho\lambda - \Delta = 0,$$

其中 $\sigma = \mathrm{tr}(A)$, $\Delta = \det(A)$ 且

$$\rho = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}.$$

如果 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$, $\omega \neq 0$, 则 (Hurwitz 条件)

$$\sigma\rho - \Delta = 0$$

这个条件的左端可重新写为某个 $3 \times 3$ 矩阵的行列式, 它的元素是矩阵 $A$ 的元素 $a_{ij}$ 的简单线性组合:

$$\sigma\rho - \Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix},$$

右端的矩阵是 $2A \odot I_3$, 其中 $\odot$ 是定义 10.1 中形式引入的**双交错矩阵积**. 如何想到这个定义的?

**定义 10.5**　指标偶 $(i, j)$, $(m, n)$ 称为按字典式次序排列, 如果 $i < m$ 或者 $(i = m$, 且 $j < n)$.

例如, 三个偶 $(2,1), (3,1), (3,2)$ 是按字典次序排列的.

**定义 10.6**　$\mathbb{C}^n$ 中的两个向量

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}, \quad w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$$

的楔积是向量 $v \wedge w \in \mathbb{C}^m$, 其中 $m = \dfrac{1}{2}n(n-1)$, 它的分量

$$(v \wedge w)_{(i,j)} = v_i w_j - v_j w_i, \quad n \geqslant i > j \geqslant 1,$$

它们的指标偶按字典次序排列.

两个平面实向量

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

的楔积是实数 $(v \wedge w)_{(2,1)} = v_2 w_1 - v_1 w_2$. 它的绝对值等于平行四边形

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha v + \beta w,\ \alpha, \beta \in [0,1]\}$$

的面积.

$\mathbb{R}^3$ 中两个向量的楔积也与熟知的事实相关. 已知两个实向量

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

的楔积

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} (v \wedge w)_{(2,1)} \\ (v \wedge w)_{(3,1)} \\ (v \wedge w)_{(3,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_1 - v_1 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_3 w_2 - v_2 w_3 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量. 用 $u = v \wedge w$ 记这个向量, 有

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = w \times v,$$

这里 $\times$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量的标准交叉积.

叙述下面两条不给证明的引理.

**引理 10.5** 对任何 $v, w, w^{1,2} \in \mathbb{C}^n$ 以及 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

(i) $v \wedge w = -w \wedge v$;

(ii) $v \wedge (\lambda w) = \lambda (v \wedge w)$;

(iii) $v \wedge (w^1 + w^2) = v \wedge w^1 + v \wedge w^2$. □

**引理 10.6** 如果 $e^i \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant i \geqslant 1$, 组成 $\mathbb{C}^n$ 中的基, 则 $e^i \wedge e^j \in \mathbb{C}^m$, $n \geqslant i > j \geqslant 1$, 组成 $\mathbb{C}^m$ 的基. □

如果 $e^i (n \geqslant i \geqslant 1)$ 组成 $\mathbb{C}^n$ 中的标准基, $\mathbb{C}^m$ 中所得到的基也称为标准的.

**引理 10.7** 固定基 $e^i \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant i \geqslant 1$, 在 $\mathbb{C}^n$ 中考虑两个向量 $v, w \in \mathbb{C}^n$,

$$v = \sum_i v_i e^i, \quad w = \sum_j w_i e^j$$

和向量 $u \in \mathbb{C}^m$:

$$u = \sum_{n \geqslant i > j \geqslant 1} u_{(i,j)} e^i \wedge e^j.$$

若 $u = v \wedge w$, 则 $u_{(i,j)} = v_i w_j - v_j w_i$, $n \geqslant i > j \geqslant 1$.

**证明** 对 $n \geqslant i, j \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
v \wedge w &= \left(\sum_i v_i e^i\right) \wedge \left(\sum_j w_j e^j\right) = \sum_{i,j}^{n} v_i w_j (e^i \wedge e^j) \\
&= \sum_{i>j} v_i w_j (e^i \wedge e^j) + \sum_{j>i} v_i w_j (e^i \wedge e^j) \\
&= \sum_{i>j} v_i w_j (e^i \wedge e^j) - \sum_{j>i} v_i w_j (e^j \wedge e^i) \\
&= \sum_{i>j} v_i w_j (e^i \wedge e^j) - \sum_{i>j} v_j w_i (e^i \wedge e^j) \\
&= \sum_{i>j} (v_i w_j - v_j w_i)(e^i \wedge e^j) = \sum_{i>j} u_{(i,j)} e^i \wedge e^j.
\end{aligned}
$$

□

考虑 $\mathbb{C}^n$ 中的两个线性变换

$$
v \mapsto Av, \quad w \mapsto Bw,
$$

其中 $A$ 和 $B$ 是 $n \times n$ 复矩阵, 它们的元素分别是 $a_{pq}$ 和 $b_{rs}$.

**定义 10.7** $\mathbb{C}^m$ 中由

$$
(v \wedge w) \mapsto (A \odot B)(v \wedge w) = \frac{1}{2}(Av \wedge Bw - Aw \wedge Bv)
$$

定义的变换称为上面变换的双交错积.

特别, 有

$$
(A \odot A)(v \wedge w) = Av \wedge Aw
$$

和

$$
(2A \odot I_n)(v \wedge w) = Av \wedge w + v \wedge Aw.
$$

**定理 10.6** 双交错积是 $\mathbb{C}^m$ 中的线性变换, 它的矩阵 $A \odot B$ 在标准基 $e^i \wedge e^j$, $n \geqslant i \geqslant j \geqslant 1$ 下有元素

$$
(A \odot B)_{(p,q),(r,s)} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix} \right\},
$$

其中 $n \geqslant p > q \geqslant 1$ 以及 $n \geqslant r > s \geqslant 1$.

**证明**

$$
\begin{aligned}
(A \odot B)(e^r \wedge e^s) &= \frac{1}{2}(Ae^r \wedge Be^s - Ae^s \wedge Be^r) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_p a_{pr} e^p \wedge \sum_q b_{qs} e^q - \sum_p a_{ps} e^p \wedge \sum_q b_{qr} e^q\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{p,q} a_{pr}b_{qs}(e^p \wedge e^q) - \sum_{p,q} a_{ps}b_{qr}(e^p \wedge e^q)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{p>q} a_{pr}b_{qs}(e^p \wedge e^q) - \sum_{p<q} a_{pr}b_{ps}(e^p \wedge e^q)\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{p>q} a_{ps}b_{qr}(e^p \wedge e^q) - \sum_{p<q} a_{qs}b_{pr}(e^p \wedge e^q)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p>q} (a_{pr}b_{qs} - a_{ps}b_{qr} + a_{qs}b_{pr} - a_{qr}b_{ps})(e^p \wedge e^q) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p>q} \left\{ \begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix} \right\}(e^p \wedge e^q).
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
(A \odot B)(e^r \wedge e^s) = \sum_{p>q} (A \odot B)_{(p,q),(r,s)}(e^p \wedge e^s). \qquad \square
$$

定理 10.6 的叙述用了定义 10.1. 表达式 $2A \odot I_n$ 有一个特殊名称称为 $A$ 的**双积**. 有

$$
(2A \odot I_n)_{(p,q),(r,s)} = \begin{cases} -a_{ps}, & r = q, \\ a_{pr}, & r \neq p \text{ 和 } s = q, \\ a_{pp} + a_{qq}, & r = p \text{ 和 } s = q, \\ a_{qs}, & r = p \text{ 和 } s = q, \\ -a_{qs}, & s = p, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}
$$

对 $n = 2, 3$ 和 4, 这给出 $2A \odot I_2 = a_{11} + a_{22}$,

$$
2A \odot I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}
$$

和

$$
2A \odot I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} & a_{24} & -a_{14} & 0 \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} & a_{34} & 0 & -a_{14} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} & 0 & a_{34} & -a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & 0 & a_{11} + a_{44} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{41} & 0 & a_{43} & a_{21} & a_{22} + a_{44} & a_{23} \\ 0 & -a_{41} & -a_{42} & a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{44} \end{pmatrix}.
$$

下面的三个引理直接由定义 10.7 就可得到.

**引理 10.8**　对任何复 $n\times n$ 矩阵 $A, B, B_{1,2}$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$:

(i) $A\odot B = B\odot A$;

(ii) $A\odot(\lambda B) = \lambda(A\odot B)$;

(iii) $A\odot(B_1+B_2) = A\odot B_1 + A\odot B_2$. □

**引理 10.9**　对任何复 $n\times n$ 矩阵 $A$ 和 $B$:

$$(A\odot A)(B\odot B) = (AB\odot AB). \quad □$$

**引理 10.10**　对任何复 $n\times n$ 矩阵 $A$ 和任何非奇异复 $n\times n$ 矩阵 $P$:

(i) $(P\odot P)^{-1} = P^{-1}\odot P^{-1}$;

(ii) $(PAP^{-1})\odot(PAP)^{-1} = (P\odot P)(A\odot A)(P\odot P)^{-1}$;

(iii) $2(PAP^{-1})\odot I_n = (P\odot P)(2A\odot I_n)(P\odot P)^{-1}$. □

现在可以证明这一节的中心结果.

**定理 10.3**(Stephanos, 1990)　若复 $n\times n$ 矩阵 $A$ 有特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$, 则

(i) $A\odot A$ 有特征值 $\mu_i\mu_j$;

(ii) $2A\odot I_n$ 有特征值 $\mu_i+\mu_j$,

其中 $n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1$.

**证明**　假设所有的 $\mu_i$ 是单的. 则对应的特征向量 $v^i$, $n\geqslant i\geqslant 1$ 组成 $\mathbb{C}^n$ 的基. 因此, $v^i\wedge v^j$, $n\geqslant i>j\geqslant 1$ 组成 $\mathbb{C}^m$ 的基. 特别, 它们是非零向量.

计算

$$(A\odot A)(v^i\wedge v^j) = Av^i\wedge Av^j = \mu_i v^i\wedge\mu_j v^j = \mu_i\mu_j(v^i\wedge v^j).$$

这意味着 $v^i\wedge v^j$ 是 $A\odot A$ 对应于特征值 $\mu_i\mu_j$ 的特征向量. 类似地,

$$(2A\odot I_n)(v^i\wedge v^j) = Av^i\wedge v^j + v^i\wedge Av^j = \mu_i v^i\wedge v^j + \mu_j v^i\wedge v^j = (\mu_i+\mu_j)(v^i\wedge v^j).$$

这意味着 $v^i\wedge v^j$ 是 $2A\odot I_n$ 对应于特征值 $\mu_i+\mu_j$ 的特征向量.

当出现重特征值时, 定理可从上面的结果以及特征值作为矩阵元素的的连续函数得到. □

下面两条引理在沿着 Neimark-Sacker 分支曲线和 Hopf 分支曲线的余维 2 分支构造测试函数时是重要的.

**引理 10.11**　假设 $n\times n$ 实矩阵 $A$ 有单对满足 $\mu_1\mu_2=1$ 的特征值. 则

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \frac{\langle v,v\rangle\langle w,Aw\rangle + \langle w,w\rangle\langle v,Av\rangle - \langle v,w\rangle\langle w,Av\rangle - \langle w,v\rangle\langle v,Aw\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2},$$

其中 $(A\odot A - I_m)(v\wedge w) = 0$, □

如果 $\mu_{1,2} = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$, 则 $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) = \cos\theta$. 可用这个函数探测沿着 Neimark-Sacker 曲线的强共振.

**引理 10.12** *假设 $n \times n$ 实矩阵 $A$ 有单对满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 的特征值. 则*

$$-\lambda_1\lambda_2 = \frac{\langle v, Av\rangle\langle w, Aw\rangle - \langle w, Av\rangle\langle v, Aw\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2},$$

*其中 $(2A \odot I_n)(v \wedge w) = 0$.* □

如果 $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\omega$, 则 $-\lambda_1\lambda_2 = \omega^2$. 当 $\omega = 0$ 时, Bogdanov-Takens 分支一般地是所期望的.

## 10.8 附录 C: 余维 2 同宿分支的探测

当跟随双参数余维 1 同宿轨道时, 可以期望在所得曲线的某一点有余维 2 奇异性. 由定义, 在这种点上 Shil′nikov 非退化条件之一 (见 6.4.3 节的 (H.0)~(H.3) 以及 7.1.2 节的 (SNH.1)~(SNH.3) 遭到破坏. 首先, 同宿轨道趋于的平衡点 $x_0$ 由于折分支或 Hopf 分支可失去双曲性. 这些点是正则同宿轨道轨迹的端点. 对应在折参数值出发的鞍–结点/鞍–鞍点同宿轨道的曲线, 还存在其他类型的端点, 即对应于同宿轨道 "收缩" 的端点 (如在 Bogdanov-Takens 以及其他局部余维 2 分支) 或者轨道 "破裂" 成由几个轨道和几个平衡点的连接组成的异宿环的一部分. 我们不将考虑这些情形. 代之以集中余维 1 情形, 那里存在唯一同宿于双曲平衡点或者鞍–结点平衡点的同宿轨道. 余维 2 同宿分支点的出现导致系统动力学的生动内容 (关于这些点各自的的双参数分支图的评论见文献 (Champney, Kuznetsov, 1994)).

余维 2 同宿分支是沿着余维 1 同宿曲线的分枝探测的, 而它是由某个适当的截断边值问题所一般定义的*测试函数* $\psi_i$ 的零点定位. 在最简单的情形, 测试函数可通过平衡点的特征值或者它们的特征向量从同宿解的端点计算. 在其他情形, 必须扩大边值问题并同时求解满足相关边值条件的变分方程. 测试函数被称为是可定义, 如果对所有充分大的 $T > 0$, 沿着截断问题的解曲线是光滑函数, 且当 $T \to \infty$ 时有趋于临界参数值的正则零点. 事实上, 在下面所述的所有情形, 有较强的性质, 即测试函数的极限存在, 并给出原来问题在无穷区间内存在的正则测试函数.

如同 10.3.3 节, 将 $A(x_0, \alpha) = f_x(x_0, \alpha)$ 具非零实部的特征值表示为

$$\mathrm{Re}\,\mu_{n_-} \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\mu_1 < 0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_{n_+}.$$

按照第 6 章, 具零实部的特征值称为*临界的*, 最靠近零的具实部的稳定 (不稳定) 特征值称为*主稳定 (不稳定) 特征值*. 在这个附录里, 假设 $A(x_0, \alpha)$ 所有的特征值以及 (和它的转置 $A^{\mathrm{T}}(x_0, \alpha)$) 必要的特征向量沿着同宿曲线都可精确地计算.

### 10.8.1 通过特征值可探测的奇异性

下面的测试函数可用来沿着对应双曲平衡点的同宿曲线追踪探测对原来问题和截断问题 (10.97) 都有定义的余维 2 奇异性:

中性鞍点

$$\psi_1 = \mu_1 + \lambda_1.$$

二重实稳定主特征值

$$\psi_2 = \begin{cases} (\mathrm{Re}\,\mu_1 - \mathrm{Re}\,\mu_2)^2, & \mathrm{Im}\,\mu_1 = 0, \\ -(\mathrm{Im}\,\mu_1 - \mathrm{Im}\,\mu_2)^2, & \mathrm{Im}\,\mu_1 \neq 0. \end{cases}$$

二重实不稳定主特征值

$$\psi_3 = \begin{cases} (\mathrm{Re}\,\lambda_1 - \mathrm{Re}\,\lambda_2)^2, & \mathrm{Im}\,\lambda_1 = 0, \\ -(\mathrm{Im}\,\lambda_1 - \mathrm{Im}\,\lambda_2)^2, & \mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0. \end{cases}$$

注意, $\psi_{2,3}$ 的正则性可从它们代表的对应于这对特征值的特征多项式的二次因子的判别式得知.

中性鞍点、鞍 – 焦点或者焦 – 焦点

$$\psi_4 = \mathrm{Re}\,\mu_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_1.$$

中性发散鞍 – 焦点

$$\psi_5 = \mathrm{Re}\,\mu_1 + \mathrm{Re}\,\mu_2 + \mathrm{Re}\,\lambda_1, \quad \psi_6 = \mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 + \mathrm{Re}\,\mu_1.$$

三个主特征值

$$\psi_7 = \mathrm{Re}\,\mu_1 - \mathrm{Re}\,\mu_3, \quad \psi_8 = \mathrm{Re}\,\lambda_1 - \mathrm{Re}\,\lambda_3.$$

在延拓双曲同宿的轨迹时, 为了探测同宿于非双曲平衡点的轨道, 截断问题 (10.97) 应该可以通过退化点延拓的方法来叙述. 为此目的, 必须逐个给特征值修改其标签. 如对 $\mu_i$, 最左边的特征值为 $n_-$, 对 $\lambda_i$, 最右边的特征值为 $n_+$, 而不考虑它们关于虚轴的位置. 因此, 修改了在 (10.95) 中投影矩阵 $L_{u,s}$ 中的术语 “稳定” 和 “不稳定” 的意义. 用了这个修改, 可以简单地定义下面的测试函数.

非双曲平衡点

$$\psi_9 = \mathrm{Re}\,\mu_1, \quad \psi_{10} = \mathrm{Re}\,\lambda_1.$$

$\psi_{9,10}$ 的零点对应于延拓平衡点 $x_0$ 的折分支或者 Hopf 分支. 在第一个情形分支称为*非中心鞍 – 结点同宿分支* (见下面), 第二个情形通常涉及 Shil′nikov-Hopf 分支. 一般地, 这些奇异性是同宿于双曲平衡点的同宿轨道轨迹的端点. 但是, 存在截断边值问题 (10.97) 解曲线的连续延展通过这两个奇异性. 远离 Shil′nikov-Hopf 余维 2 点存在解曲线 $\tilde{\mathcal{H}}$, 它是由在 $x_0$ 与由 Hopf 分支而出现的极限环 $C$ 之间的异宿连

接 $\Gamma_1$ 近似 (图 10.19). 类似的性质对鞍 – 结点分支也成立. 假定对 $x_0$ 的折分支延拓鞍点同宿曲线 $\mathcal{H}$, 这意味着一个额外的平衡点趋于 $x_0$. 假设在鞍 – 结点不稳定特征值趋于零. 远离余维 2 点, 截断边值问题 (10.97) 有近似异宿轨道的解, 这个异宿轨道是沿着非主稳定流形连接两个平衡点且沿着 $\tilde{\mathcal{H}}$ 存在 (见图 10.20 显示的平面情形). 更确切地, 延拓算法从原来的平衡点开关到近似点[①], 投影边值条件将解的端点放到新 $x_0$ 的 "稳定" 和 "不稳定" 特征空间上. 接近于余维 2 的点后来给出原来平衡点的不稳定特征空间的好近似.

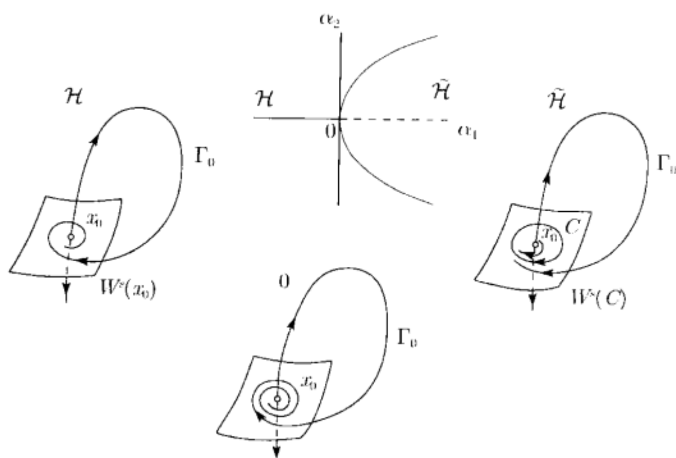



图 10.19　$n=3$ 时通过 Shil′nikov-Hopf 的延拓: 同宿轨迹由 $\mathcal{H}$ 表示, 点 – 周期异宿曲线用 $\tilde{\mathcal{H}}$ 表示

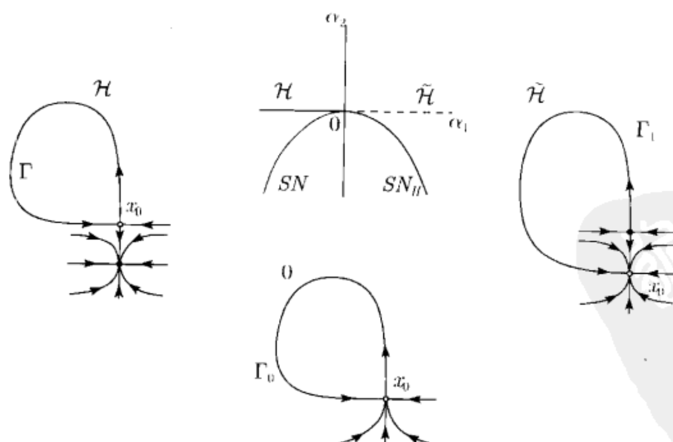



图 10.20　通过非中心鞍 – 结点同宿分支的延拓: 双曲同宿曲线表示为 $\mathcal{H}$, 非中心异宿曲线用 $\tilde{\mathcal{H}}$ 表示, 折曲线用 $SN$ 表示. 沿着折曲线的右边分枝 $SN_H$ 也存在中心鞍结点同宿

① 远离临界点是趋于平衡点的就标记为 $x_0$.

### 10.8.2　轨道翻转与倾角翻转

现在考虑沿着鞍点同宿轨道曲线大范围退化的两种形式的测试函数, 即轨道分支和倾角翻转分支. 因此, 另外要假设 $A(x_0,\alpha)$ 没有零实部的特征值, 而主特征值是实且是单的, 即

$$\mathrm{Re}\,\mu_{n-} \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1 < \mathrm{Re}\,\lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_{n+}.$$

于是. 可选择 $A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)$ 的已标准化了的特征向量 $p_1^s$ 和 $p_1^u$, 它们光滑依赖于 $(x_0,\alpha)$ 且满足

$$A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)p_1^s = \mu_1 p_1^s, \quad A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)p_1^u = \lambda_1 p_1^u.$$

这里以及下面为简单起见, 特征值和特征向量关于 $x_0$ 和 $\alpha$ 的依赖性没有标出. 由此, $A(x_0,\alpha)$ 的标准化了的特征向量 $q_1^s$ 和 $q_1^u$ 选择光滑依赖于 $(x_0,\alpha)$ 且满足

$$A(x_0,\alpha)q_1^s = \mu_1 q_1^s, \quad A(x_0,\alpha)q_1^u = \lambda_1 q_1^u.$$

当同宿轨道在主特征向量的两个分量之间趋于鞍点时改变它的方向, 这时产生轨道翻转分支. 定义轨道翻转分支的方程 (关于稳定流形) 可写为

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle p_1^s, x(t)-x_0\rangle = 0, \tag{C.1}$$

其中 $x(t)$ 是同宿解, 且当 $t\to\infty$ 时指数因子的增长平衡 $\|x(t)-x_0\|$ 的衰减. 类似地, 轨道翻转分支关于不稳定流形的方程由

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle p_1^u, x(t)-x_0\rangle = 0 \tag{C.2}$$

给出. 在满足条件 (C.1) 或者 (C.2) 的点同宿轨道沿着它的非主特征空间 (按一个时间方向) 趋于鞍点 (三维中见图 10.21). 由此沿着 (10.97) 的解曲线计算的截断测试函数应该由下面的函数给出:

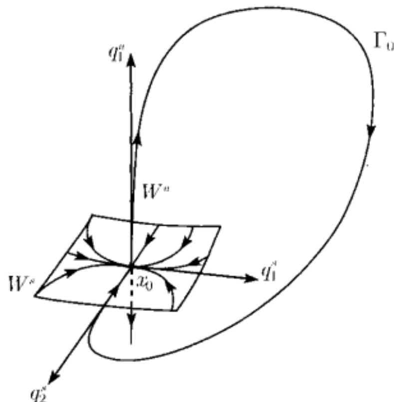



图 10.21　$\mathbb{R}^3$ 中关于稳定流形的翻转轨道

**轨道–翻转** (关于稳定流形)

$$\psi_{11} = \mathrm{e}^{-\mu_1 T}\langle p_1^s, x(+T) - x_0\rangle.$$

**轨道–翻转**(关于不稳定流形)

$$\psi_{12} = \mathrm{e}^{\lambda_1 T}\langle p_1^u, x(-T) - x_0\rangle.$$

倾角翻转分支是与鞍点 $x_0$ 的稳定流形和不稳定流形 $W^{s,u}(x_0)$ 围绕它的同宿轨道的大范围扭转性有关. 由第 6 章, 在同宿轨道上的每一点 $x(t)$, 切空间的和

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

有定义, 其中

$$X(t) = T_{x(t)}W^s(x_0), \quad Y(t) = T_{x(t)}W^u(x_0).$$

一般地, codim $Z(t) = 1$, 即 $X(t) \cap Y(t) = \mathrm{span}\{\dot{x}(t)\}$. 在三维情形, 空间 $Z(t)$ 只不过与在 $\Gamma$ 上点 $x(t)$ 与 $W^s(x_0)$ 相切的平面 $X(t)$ 重合 (见图 10.22). 为了刻画倾角翻转分支的方程, 必须引入伴随变分问题

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -A^{\mathrm{T}}(x(t), \alpha)\varphi(t), \\ \varphi(t) \to 0, \quad t \to \pm\infty, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi(t) - \varphi^0(t), \varphi^0(t)\rangle \mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{C.3}$$

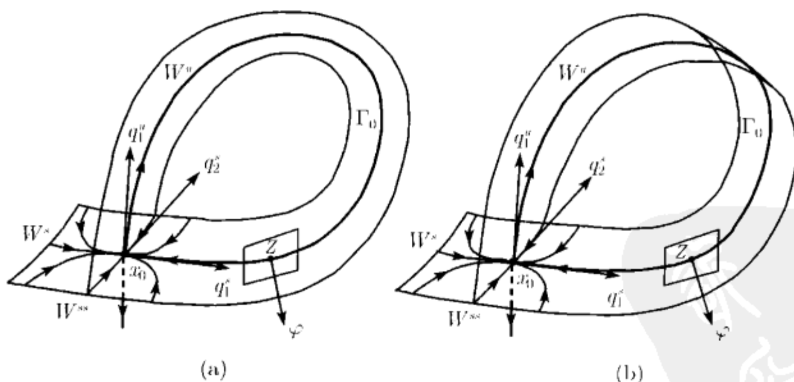



图 10.22　(a) 单同宿轨道; (b) 扭转同宿轨道

其中 $A(x, \alpha) = f_x(x, \alpha)$. (C.3) 中的第一个方程是 6.4.1 节所引入的伴随变分方程. 积分相条件中的参考向量–函数 $\varphi^0(\cdot)$ 可从函数族 $c\varphi(t)$ 中选择一个解, $c \in \mathbb{R}^1$. 对每个 $t$, 解 $\varphi(t)$ 都与上面定义的子空间 $Z(t)$ 正交, 因此, 当 $t \to \pm\infty$ 时, 它的极限性态决定围绕同宿轨道空间 $Z(t)$ 的扭转性. 倾角翻转分支出现在沿着同宿曲线的

点, 这个扭转性的改变在那里没有出现轨道翻转. 关于稳定流形的倾角翻转分支方程由

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{\mu_1 t}\langle q_1^s, \varphi(t)\rangle = 0, \tag{C.4}$$

给出, 关于不稳定流形的倾角翻转分支方程由

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\langle q_1^u, \varphi(t)\rangle = 0 \tag{C.5}$$

给出, 其中 $t \to \pm\infty$ 时指数因子中和 $\|\varphi(t)\|$ 的衰减性. 如果 (C.4) 或 (C.5) 成立. 鞍点 $x_0$ 的稳定 (不稳定) 流形围绕同宿轨道中性扭转 (图 10.23 显示的是三维情形).

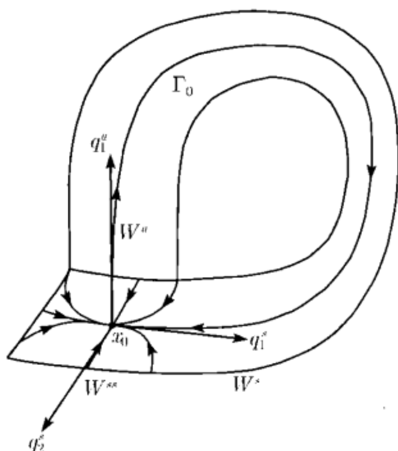



图 10.23　$\mathbb{R}^3$ 中关于稳定流形的倾角翻转

接下来定义 $P_s(x_0,\alpha)$ 为 $(n_- \times n)$ 矩阵, 它的行组成 $A(x_0,\alpha)$ 的稳定特征空间的基. 类似地, $P_u(x_0,\alpha)$ 为 $(n_+ \times n)$ 矩阵, 它的行组成 $A(x_0,\alpha)$ 的不稳定特征空间的基. 现在代替 (C.3) 考虑截断方程组

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) + A^{\mathrm{T}}(x(t),\alpha)\varphi(t) + \varepsilon f(x(t),\alpha) = 0, \\ P_s(x_0,\alpha)\varphi(+T) = 0, \\ P_u(x_0,\alpha)\varphi(-T) = 0, \\ \displaystyle\int_{-T}^{T} \langle \varphi(t) - \varphi^0(t), \varphi^0(t)\rangle \mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{C.6}$$

其中, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ 是人为自由参数, 它使得 (C.6) 变成适定形式的边值问题, 沿着系统的解曲线它几乎保持为零. 计算 (C.4) 和 (C.5) 中在 $t = \pm T$ 时的极限, 得下面的测试函数:

**倾角 – 翻转**(关于稳定流形)

$$\psi_{13} = \mathrm{e}^{-\mu_1 T}\langle q_1^s, \varphi(-T)\rangle.$$

倾角 - 翻转(关于不稳定流形)

$$\psi_{14} = \mathrm{e}^{\lambda_1 T}\langle q_1^u, \varphi(-T)\rangle.$$

为实际计算沿着同宿曲线的截断测试函数 $\psi_{13,14}$, 必须延拓由 (10.97) 和 (C.6) 组成的扩展 BVP 问题的解

$$\begin{cases} f(x_0,\alpha) = 0, \\ \dot{x}(t) - f(x(t),\alpha) = 0, \\ L_s(x_0,\alpha)(x(-T) - x_0) = 0, \\ L_u(x_0,\alpha)(x(T) - x_0) = 0, \\ \displaystyle\int_{-T}^{T} \langle x(t) - x^0(t), \dot{x}^0(t)\rangle \mathrm{d}t - 1 = 0, \\ \dot{\varphi}(t) + A^{\mathrm{T}}(x(t),\alpha)\varphi(t) + \varepsilon f(x(t),\alpha) = 0, \\ P_s(x_0,\alpha)\varphi(+T) = 0, \\ P_u(x_0,\alpha)\varphi(-T) = 0, \\ \displaystyle\int_{-T}^{T} \langle x(t) - \varphi^0(t), \varphi^0(t)\rangle \mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

这同时产生 (近似于) 同宿解 $x(t)$ 和伴随变分方程的有界解 $\varphi(t)$.

测试函数 $\psi_{11,12,13,14}$ 对原来问题和截断边值问题都有定义.

### 10.8.3 沿着鞍–结点同宿曲线的奇异性

假设一般的鞍 - 结点同宿轨道已经被延拓. 回忆在这情形截断边值问题是由方程 (10.97) 和 (10.99) 的方程所组成. 设 $p_0$ 是 $A^{\mathrm{T}}(x_0,\alpha)$ 的零 - 向量, 由

$$\langle p_0, p_0\rangle = 1$$

标准化, 且沿着鞍 - 结点同宿曲线可微. 于是, 下面的测试函数将探测非中心鞍 - 结点同宿分支, 那里同宿轨道的闭包变成不光滑(即 7.1 节的条件 (SNH.1) 被破坏).

非中心鞍 - 结点同宿轨道

$$\psi_{15} = \frac{1}{T}\langle x(+T) - x_0), p_0\rangle, \tag{C.7}$$

$$\psi_{16} = \frac{1}{T}\langle x(-T) - x_0), p_0\rangle, \tag{C.8}$$

这些函数测量一维中心流形的分枝, 那里有近似同宿轨道的两个端点, 且沿着鞍 - 结点同宿分支曲线 (图 10.24) 有定义. 当 $T \to \infty$ 时, 沿着中心鞍 - 结点同宿轨

道的曲线,$\psi_{15}$ 和 $\psi_{16}$ 都收敛于光滑函数. 测试函数 (C.7), (C.8) 的极限的消失取决于临界同宿轨道是中心–稳定连接, 还是不稳定–中心连接.

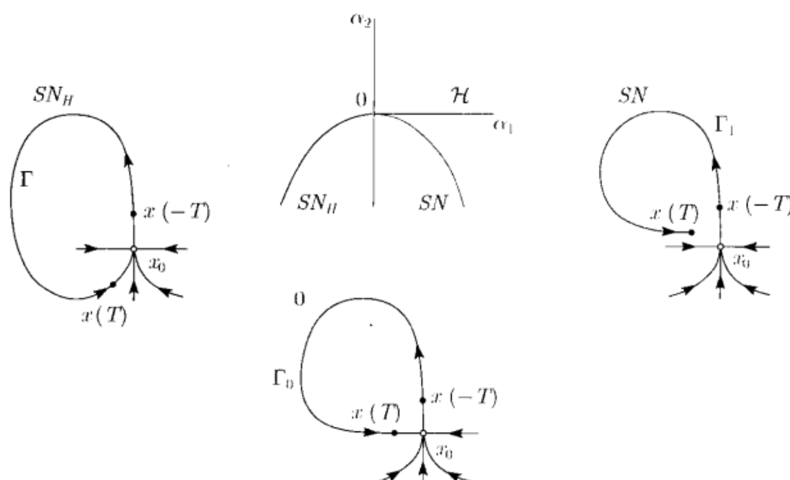



图 10.24 沿着中心鞍–结点同宿曲线通过非中心鞍结点同宿分支的延拓

**注** (1) 测试函数 $\psi_{9,10}$ 和 $\psi_{15,16}$ 为探测非中心鞍–结点同宿轨道提供了两个不同的策略. 这允许我们在这种点开关鞍点同宿轨道和中心鞍–结点同宿轨道之间的延拓.

(2) **非横截鞍–结点同宿分支** (被 7.1 节的条件 (SNH.3) 破坏) 可以作为沿着中心鞍–结点同宿分支曲线关于参数的极限点来探测. ◇

## 10.9 附录 D: 文献评注

有关分支的数值分析以及连同支持对动力系统分析的计算机软件一起的文献很广, 并且发展很快. 我们推荐 Beyn (1991) 的讲义, 及 Doedel, Keller 和 Kernevez (1991a, 1991b) 的两篇指导性文章作为动力系统数值方法的好的一般性介绍 (也可看 Guckenheimer 和 Worfolk (1993), 特别是 Guckenheimer (2002)). 比较高等的读者会欣赏文献 (Govaerts, 2000). 关于分支数值分析的综合性文章见文献 (Beyn, Champneys, Doedel, Govaerts, Kuznetsov, Sandstede, 2002).

用 Newton 法理论定位非线性系统的解, 在文献 (Kantorovich, Akilov, 1964) 中有丰富的叙述. Broyden (1965) 在拟 Newton 迭代中第一个用最少条件引入秩 1 更新以改进 Jacobi 矩阵近似迭代的质量. Broyden 法的详细收敛性分析可在 Dennis 和 Schnabel (1983) 中找到.

双曲平衡点的稳定和不稳定不变流形的 Taylor 展开的算法是由 Hassard (1980)

推导. 在 10.1.3 中所叙述的投影技巧是以 Kuznetsov (1983) 为基础. ODEs 中的大范围二维不变流形 (包括平衡点和极限环的稳定和不稳定不变流形以及不变环面) 的计算近来吸引很多人的注意, 见文献 (Homburg, Osinga, Vegter, 1995; Dieci, Lorenz, 1995, 1997; Kraauskopf, Osinga, 1999; Osinga, 2003).

Doedel (1981) 第一个提出极限环计算的积分相条件. 计算极限环的打靶法和多重打靶法是由 Khibnik (1979) 与 Holodniok 和 Kubicek (1984a) 提出. 打靶法和自动微分技巧的结合是由 Guckenheimer 和 Meloon (2000) 研究. 系统地使用正交配置来计算极限环是属于 Doedel 和 Kernevez (1986) (也可见 Doel, Jepson, Keller (1984)). 配置在 Gauss 点的一般收敛性定理是由 Boor 和 Swartz (1973) 建立的. 一个有效的算法, 考虑到应用正交配置离散化在 Newton 法中出现的矩阵的特殊结构是由 Doedel (1981) 实现的. 它允许同时计算极限环的乘子 (其改进见 Fairgrieve, Jepson (1991)).

由于平衡点计算和许多分支问题可化为隐式定义的曲线的延拓, 许多延拓包已经被开发. 它们都以预先校正法为基础并稍有变化. 早期标准的编码解延拓问题是由 Kubicek (1976)(DERPAR) 与 Balabaev 和 Lunevskaya (1978) (CURVE) 开发. 注意, Moore-Penrose 逆在 CURVE 中实现校正. 自那以后, 几个通用的延拓编码被发现. 我们提及 Kass-Peterson (1989) 的 PATH, Rheinbboldt 和 Burkardt (1983) 的 PITCON, Nikolaev (见 Khibnik, Kuznetsov, Levitin 和 Nikolaev (1989)) 的 BEETLE, Deuflhard, Fiedler 和 Kunkel (1987) 的 ALCON, Allgower 和 Georg (1990) 的书中叙述几个编码, 以及由 Doedel 和 Kernevez (1986) 的分支编码的延拓程序段的 AUTO86/97, Seydel (1991) 的 BIFPAKC 和 Kuznetsov 和 Levitin (1997) 的 CONTENT. 综合性文章由 Allgower 和 Georg (1993) 给出, 它包含有这些实用的编码和其他延拓编码的某些信息. 延拓的一般理论是由 Keller(1977) (他引入伪弧长延拓), Rheinboldt (1986), Seydel (1988, 1991) 以及 Allgower 和 Georg (1990) 叙述并发展.

基于追踪特征值 (乘子) 的分支点的探测和定位是由 AUTO86 执行. 用测试函数去定位 Hopf 分支和 Neimark-Sacker 分支是基于 Hurwitz 行列式的计算, 它是由 Khibnik (1990) 提出, 并在编码 LINLBF 中得到执行, 他们也用最小增广法延拓对应的分支. 借助于双交错矩阵积来探测 Hopf 分支是属于 Fuller (1968) (他甚至参考了 Stephanos (1900) 早期的贡献). Jury 和 Gutman (1975) 用双交错积探测映射的 Neimark-Sacker 分支. 这个方法在 Guckenheimer 和 Myers (1996) 以及 Govaerts, Guckenheimer 和 Khibnik (1997) 的分支/延拓构架中重新引入, 并成功地应用到一些问题中, 且在CONTENT 中得到执行. 附录 B 中介绍的双交错积是最直接的方式. 以张量矩阵积为基础的交错法可在文献 (Govaerts, 2000) 找到. 所得最小增广系统的正则性定理属于 Guckenheimer, Myers 和 Sturrmfels (1997). 对大系统的几

个适当的测试函数被 Moore, Garret 和 Spence (1990) 以及 Friedman (2001) 所发展. 后面的工作用了低维不变子空间的延拓 (Dieci, Friedman, 2001). 改进的最小增广系统其中对分支定义的函数是由求解加边线性系统来计算, 对折分支延拓是由 Griewank 和 Reddien (1984) 提出, 对 Hopf 延拓是由 Govaerts 等 (1997) 提出. 用加边系统延拓 Hopf 分支的其他方法有 Beyn (1991), Chu, Govaerts 和 Spence (1994) 以及 Werner(1996). 加边矩阵的一般性质是由 Govaerts 和 Pryce (1993) 建立, 在文献 (Govaerts, 2000) 中有详细叙述. 由扩展增广系统定位和延拓折点和 Hopf 点已经被多位作者所考虑, 包括 Moore 和 Spence(1980), Rheinboldt (1982), Roose 和 Hlavacek (1985) 以及 Holodniok 和 Kubicek (1984b). 这些方法在 AUTO86 (见 Doedel, Keller 和 Kernevez (1991a)) 和 CONTENT 得到执行. 出现在每个 Newton 校正中的线性系统的解可用它们的特殊结构有效求解.

探测和分析分枝点 (称为 "分支点") 可在 Allgower 和 Georg (1990) 中找到. 正则的扩展定义系统去定位分枝点是由 Moore (1980) 和 Mei (1989) 提出. Borisyuk (1981) 的程序 STAFF (以程序 CURVE 为基础) 探测分枝点并支持分支开关. 故程序AUTO86 和 CONTENT 以及其他几个分支编码可使用. 注意, 这些特性允许在翻转分支点开关倍周期环的延拓. AUTO86 和 CONTENT 以及其他的程序也可从 Hopf 点开始对环延拓.

对折分支的非退化条件的验证由 LINLBF 支持, 其中用了公式 (10.49). 用编码BIFOR2 执行对第一个 Lyapunov 系数的数值计算, 是由 Hassard, Kazarinoff 和 Wan (1981) 提出, 程序 LINBF 对应部分是由 Khibnik 提供. 两个程序用来求数值微分并计算中心流形中间的二次系数. 10.2.3 中叙述的算法不同于刚刚提及的用于 $l_1$ 的不变表达式, 而仅仅要求方向导数. 它在 CONTENT 中被执行.

所有平衡点、不动点、余维 1 环分支的双参数延拓以及许多三参数余维 2 分支的延拓由程序 LINLBF 以及它的变化所支持 (见 Khibnik (1990), Khibnik, Kuznetsov, Levitin, Nikolaev (1993)). 平衡点和环的余维 1 分支可用 AUTO86, CANDYS/QA (Feudel, Jansen, 1992), CONTENT 以及 MATCONT (Dhooge, Govaerts, Kuznetsov, 2003) 延拓. 此外, CONTENT 支持所有余维 2 平衡点分支的三参数延拓 (Govaerts, Kuznetsov, Sijnave, 2000a, 2000b). MATCONT 执行加边边值问题所有极限环余维 1 分支的延拓, 如 Doedel, Govaerts 和 Kuznetsov (2003) 建议的.

一个同宿轨道的数值定位方法是用大周期极限环来延拓 (Doedel, Kernevez, 1986). 对同宿轨道的定位和延拓的打靶法可在 Kuznetsov (1983) 的编码 LOOPLN 执行 (Kuznetsov, 1990, 1991). Rodriguez-Luis, Freire 和 Ponce (1990) 也发展基于打靶的同宿延拓法. 由于这些方法具有明显的局限性, 用边值法定位和延拓余维 1 同宿分支是由下面的学者提出并分析: Hassard (1980), Miura (1982), Beyn (1990b,1990a), Doedel 和 Friedman (1989),Friedman 和 Doedel (1991, 1993), Schecter

(1993), Bai 和 Champneys (1996), Sandstede (1997b), 以及 Demmel, Dieci 和 Friedman (2000). Champneys 和 Kuznetsov(1994) 以及 Champneys, Kuznetsov 和 Sandstede(1996) 扩充了这些 BVP 法以处理余维 2 同宿分支, 包括轨道翻转和倾角翻转 (见附录 C), 并对此问题写了标准的AUTO86 驱动程序 HomCont (Champneys, Kuznetsov, Sandstede, 1995). 存在一种用同伦法来求得同宿延拓好的初始解 (Doedel, Friedman, Monteiro, 1994; Champneys, Kuznetsov, 1994; Doedel, Friedman, Kunin, 1997). Beyn (1991, 1994) 发展了从同宿曲线的 Bogdanov-Takens 分支开始的算法, Gaspard(1993) 提出一种从这种曲线的折 -Hopf 点开始的算法.

映射的数值分支分析在这一章里没有考虑. 不动点分支的定位、分析和延拓非常类似于 ODEs 的平衡点 (并由 AUTO97, LOCBIF 和 CONTENT 支持 (Govaerts, Kuznetsov, Sijnave, 1999)). 其他问题要求特殊的算法. 这种算法在计算不动点的稳定和不稳定不变流形中得到发展, 这方面的工作有: You, Kostelich 和 York (1991), Lou, Kostelich 和 York (1992), Krauskopf 和 Osinga (1998) (在 DYNAMICS 中执行 (Nusse, Yorke, 1998)) 以及 DsTool 最后版本 (Back, Guckenheimer, Myers, Wicklin, Worfolk, 1992); 同宿轨道的延拓以及它们的切触是由 Beyn 和 Kleinkauf (1997) 提供; 通常的双曲不变流形 (即闭不变曲线) 的计算由 Broer, Osinga 和 Vegter (1997) 以及 Edoh 和 Lorenz (2001) 给出.

系统的分支分析要求重复延拓不同的相对象, 并对它们的奇异性和分枝开关进行探测分析. 这些计算产生的许多数据应该被分析且最后表示为图像形式. 因此, 延拓程序不仅应该数值有效而且应该允许交互组织并友好地给使用者一个图像界面. 这样的程序在迅猛地发展. 其中最通用的延拓/分支程序之一是 AUTO86, 它带有被称为 PLAUT 的简单的交互图像浏览器, 它允许有计算数据的图像表示. 存在被大多数分布广泛的工作站使用的 PLAUT 的版本以及由 O.De Feo 写的 MATLAB 的 mplayt 版本①. 有几个尝试去改进 AUTO 使用者的界面. AUTO86 的一个特殊的交互式的版本由 Taylor 和 Kevrekids (1990) 在 Princeton 为 SGI 工作站开发的. 为工作站和 PCs 的 XPPAUT 程序是另外一个例子②. 也可执行对平衡点的一维不变流形的模拟和计算 (XPPAUT 的新近的版本的描述见 Ermentrout (2002)). 一个为 UNIX 带 X11 的工作站工作的交互版本 AUTO94 已由 Doedel, Wang 和 Fairgrieve 设计. 这个版本扩大了数值容量, 包括不动点和极限环的所有余维 1 分支的延拓. 这个软件在 1997 已经升级, 现在用 HomCont 支持同宿轨道的延拓. 它称为 AUTO97 (Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede, Wang, 1997)③. 也有 c 版本, AUTO2000. 对 IBM-PC 兼容计算机, 交互式 DOS 程序

① 可在http://www.math.uu.nl/people/kuznet/cm上使用.

② XPPAUT 可在http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp/.html.找到.

③ AUTO97 可在http://indy.cs.concordia.ca/auto/main.html.使用.

LOCBIF 由 Khibnik, Kuznetsov, Levitin & Nikolaev (1993) 开发. 程序的数值部分基于非交互式编码 LINILBF, 并允许延拓平衡点、不动点和极限环分支到余维 3. LOCBIF 支持 10.4 节描述的许多延拓策略①. 受大众欢迎的程序 DsTool② (Back et al., 1992) 与 LOCBIF 的数值部分和仿效它的界面合并使用.

新一代延拓/分支软件是由交互程序 CONTENT③来描述, 它是 Kuznetsov 和 Levintin 以及 O De Feo, Sijnave, Govaerts, Doedel, Skovoroda 等的贡献. 它通常在大部分工作站在 UNIX/X11/(开放) Motif 下以及在 PC 上在 Linux 或 MS-Windows 95/NT/98/2000/ME/XP 运行并支持轨道的数值计算, 平衡点 (不动点) 以及环的延拓, 局部分支的探测和规范形分析, 它们的双参数和三参数延拓以及分枝开关, 如在这一章以及在 Kuznetsov, Levitin 和 Skovoroda (1996) 以及 Govaerts, Kuznetsov 和 Sijnave (1999, 2000a, 2000b) 描述的. 两个新软件计划以 CONTENT 为基础: (1) MATCONT (Dhooge, et al., 2003), MATLAB 对 ODEs 的延拓和分支分析交互工具箱; (2) WEBCONT, 一个网上用户的应用软件起源于阿姆斯特丹大学的 J. Val..

计算机代数的发展对动力系统的研究产生影响 (见由 Tournier (1994) 编辑的关于计算机代数和微分方程的论文集). 人们可以尝试用计算代数工具在受欢迎的符号操作系统例如 MAPLE 定位多项式系统的平衡点 (Char, Geddes, Connet, Leong, Monagan, Watt 1991a), (Char, Geddes, Gonnet, Leong, Monagan, Watt, 1991b), Mathemaica (Wolfram, 1991), 或 REDUCE (Hearn, 1993). 有关概念 (思想、簇、Groebner 基等) 的一个非常好的叙述以及算法由 Cox, Little 和 O'Shea (1992) 给出. 符号操作系统另一个重要应用领域是规范形理论 (Chow, Drachman, Wang, 1990; Sanders, 1994; Murdock, 2003). 事实上, 在这本书中大部分规范形系数的复表达式是由 MAPLE 得到的. 最后让我们注意对由 Gatermann 和 Hohmann (1991) 给出的对称 ODEs 系统平衡点的延拓 / 分支分析的交互系统 SYMCON, 其中执行符号与数值方法的结合, 以及由 Levitin (1995) 给出的在 CONTENT 中执行的自动微分的另一种形式.

① LOCBIF 可在 http://ftp.cwi.nl/pub/yuri/LOCBIF 自由应用但不长期支持.
② DsTool 在http://www.cam.cornell.edu/~gucken/dstool. 可使用.
③ CONTENT 在 http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT 上可使用.

# 附录　代数、分析和几何的基本概念

为方便阅读, 在这个附录里概述一些在主要教科书中所熟悉的基本数学结果. 当然, 阅读这个附录不能代替标准教科书中对应内容的系统学习.

## A.1　代　　数

### A.1.1　矩阵

设 $A$ 是以 $a_{j\ k} \in \mathbb{C}^1$ 为复元素的 $n \times m$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

$A^{\mathrm{T}}$ 表示它的转置矩阵

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

$n \times m$ 矩阵 $A$ 和 $m \times l$ 矩阵 $B$ 的积是 $n \times l$ 矩阵 $C = AB$, 其元素是

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, l.$$

下面性质成立:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

$n \times n$ 方阵 $A$ 的行列式是由

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n \in S_n} (-1)^{\delta(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

定义的复数. 其中 $S_n$ 是 $n$ 个指标所有排列的集合, 当多重指标 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 可从多重指标 $(1, 2, \cdots, n)$ 经偶数次单步排列得到, 则 $\delta = 0$, 其他情况 $\delta = 1$. 一个

方阵 $A$ 称为是非奇异的, 如果 $\det A \neq 0$. 对非奇异矩阵 $A$, 存在逆矩阵 $A^{-1}$, 使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, 这里 $I$ 是 $n \times n$ 单位 (恒同) 矩阵

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果 $A$ 和 $B$ 是 $n \times n$ 矩阵, 则

$$\det(AB) = \det A \ \det B.$$

$n \times m$ 矩阵 $A$ 的最大非奇异方子矩阵的阶数称为它的秩, 记为 $\operatorname{rank}(A)$.

$n \times n$ 方阵 $A$ 的迹是它的对角线元素之和

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

两个 $n \times m$ 矩阵 $A$ 和 $B$ 之和是 $n \times m$ 矩阵 $C = A + B$, 其元素是

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \ j = 1, 2, \cdots, m.$$

复数 $\lambda$ 和 $n \times m$ 矩阵 $A$ 的积是 $n \times m$ 矩阵 $B = \lambda A$, 其元素为

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \ j = 1, 2, \cdots, m.$$

考虑由收敛级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

(解析函数) 定义的函数 $x \mapsto f(x)$. 给了方阵 $A$, 可由

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k$$

引入矩阵 $f(A)$, 其中 $A^0 = I_n$, $A^k = AA^{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots$. 例如

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

### A.1.2　向量空间与线性变换

一个复 $n\times 1$ 矩阵

$$v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$$

称为**向量**. 所有这些向量的集合是一个**线性空间**, 它与 $\mathbb{C}^n$ 等同. 在这个空间内, 两个元素之和以及复数与元素的积可由其分量 - 方式定义.

子集 $X\subset\mathbb{C}^n$ 称为 $\mathbb{C}^n$ 的**线性子空间** (**超平面**), 如果由 $x\in X$ 和 $y\in X$ 得 $x+y\in X$, 且对任何 $\lambda\in\mathbb{C}^1$ 有 $\lambda x\in X$. 线性子空间 $Z$ 称为两个线性子空间 $X$ 和 $Y$ 的**和**, 如果任何向量 $z\in Z$ 可以表示为 $z=x+y$, 对某向量 $x\in X$, $y\in Y$. 记为 $Z=X+Y$. 如果这个表达式对每个 $z$ 都是唯一, 那么称 $Z$ 为 $X$ 和 $Y$ 的直和, 并表示为 $Z=X\oplus Y$.

$\mathbb{C}^n$ 中的向量 $\{a^1,a^2,\cdots,a^k\}$ 称为**线性无关**, 如果

$$\alpha_1a^1+\alpha_2a^2+\cdots+\alpha_ka^k=0,$$

当且仅当对一切 $j=1,2,\cdots,k$ 有 $\alpha_j=0$. 集合

$$L=\mathrm{span}\{a^1,a^2,\cdots,a^k\}=\left\{v\in\mathbb{C}^n:v=\sum_{i=1}^k\alpha_ia^i,\ \alpha\in\mathbb{C}^1\right\}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间. 如果 $\{a^1,a^2,\cdots,a^k\}$ 线性无关, $\dim L=k$. $n$ 个线性无关的向量的集合称为**基**. 单位向量集合

$$e^1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e^2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e^n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 的**标准基**. 任何向量 $v\in\mathbb{C}^n$ 可唯一表示为

$$v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=v_1e^1+v_2e^2+\cdots+v_ne^n.$$

如果 $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n\}$ 是另一个基, 任何向量 $v \in \mathbb{C}^n$ 可表示为

$$v = u_1\varepsilon^1 + \cdots + u_n\varepsilon^n,$$

其中 $u_k \in \mathbb{C}^1$ 是 $v$ 在这个基下的分量. 记 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$. 那么

$$v = Cu,$$

其中 $n \times n$ 矩阵 $C$ 非奇异, 且其元素 $c_{ij}$ 是基向量 $\varepsilon_j$ 在标准基下的分量

$$\varepsilon^j = c_{1j}e^1 + c_{2j}e^2 + \cdots + c_{nj}e^n, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

一个 $n \times n$ 矩阵 $A$ 可与空间 $\mathbb{C}^n$ 中的**线性变换**

$$v \mapsto Av$$

等同.

在基 $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n\}$ 下, 这个变换将取形式

$$u \mapsto Bu,$$

其中矩阵 $B$ 为

$$B = C^{-1}AC.$$

矩阵 $A$ 和 $B$ 称为**相似**. 相似矩阵的秩相同.

### A.1.3　特征向量与特征值

非零复向量

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$$

称为 $n \times n$ 矩阵 $A$ 的**特征向量**, 如果对某个 $\lambda \in \mathbb{C}^1$,

$$Av = \lambda v,$$

复数 $\lambda$ 称为 $A$ 对应于特征向量 $v$ 的**特征值**. $A$ 的特征值是**特征多项式**

$$h(\lambda) = \det(A - \lambda_n)$$

的根, 且每一个根都是特征值. 因此, 如果 $h(\lambda)$ 的根计及它们的重次, 则它有 $n$ 个特征向量. 特征值是矩阵元素的连续函数. 如果以 $A$ 的任何一个与之相似的矩阵代替 $A$, 多项式 $h(\lambda)$ 的系数并不改变. 因为

$$h(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}\ A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det A,$$

相似矩阵的行列式和迹是相同的.

### A.1.4　不变子空间、广义特征向量与 Jordan 标准型

线性子空间 $X \subset \mathbb{C}^n$ 称为矩阵 $A$ 的不变子空间, 如果 $AX \subset X$, 即如果 $w \in X$, 那么 $Aw \in X$.

如果 $\lambda$ 是特征多项式的根, 那么存在 $A$ 的不变子空间 (特征空间), 它是由与 $\lambda$ 相应的特征向量 $v \in \mathbb{C}^n$ 所张成:

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n : x = \omega v,\ \omega \in \mathbb{C}^1\}.$$

如果 $\lambda$ 是特征多项式的重根, 重次为 $m$, 那么可以求得 $1 \leqslant l \leqslant m$ 个与 $\lambda$ 对应的线性无关的特征向量 $v^1, v^2, \cdots, v^l$. 对每个特征向量 $v^j$ 存在复向量 $\{w^{(j,1)}, w^{(j,2)}, \cdots, w^{(j,k_j)}\}$ 的最大链, 使得

$$\begin{aligned} Aw^{(j,1)} &= \lambda w^{(j,1)}, \\ Aw^{(j,2)} &= \lambda w^{(j,2)} + w^{(j,1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Aw^{(j,k_j)} &= \lambda w^{(j,k_j)} + w^{(j,k_j-1)}. \end{aligned}$$

这个链可以只由一个向量 $w^{(j,1)}$ 组成, 即特征向量 $v^j$. 向量 $w^{(j,k)}$, $k \geqslant 2$, 称为 $A$ 对应于特征值 $\lambda$ 的广义特征向量. 它们并不是唯一确定的. 子空间

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n : x = \omega_1 w^{(j,1)} + \omega_2 w^{(j,2)} + \cdots + \omega_k w^{(j,k)}, \omega_i \in \mathbb{C}^1\}$$

是 $A$ 的不变子空间.

对应于不同特征值的特征向量和广义特征向量是线性无关的. 对应于重特征值 $\lambda$ 的组成链的向量 $\{w^{(j,1)}, w^{(j,2)}, \cdots, w^{(j,k_j)}\}$ 也是线性无关.

**定理 A.1**(Jordan 标准型)　空间 $\mathbb{C}^n$ 可以分解为对应于矩阵 $A$ 的特征向量和广义特征向量的线性不变子空间. 在由所有特征向量和广义特征向量给的基下, 矩阵 $A$ 具下面方块的分块对角形

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

方块的维数等于链的长度.　□

这个形式称为Jordan 标准型或者Jordan 典范型. 注意, 一个特征值可对应几个维数 $m \geqslant 1$ 的 Jordan 块. 它们的个数 $N(m,\lambda)$ 可由公式

$$N(m,\lambda) = r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}$$

计算, 其中 $r_0 = n$ 且 $r_k = \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)^k$.

从定理 A.1 也得到矩阵 $A$ 所有特征值的积等于它的行列式

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

它们的和等于迹:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

如果 $A$ 是实矩阵, 则它有对应于实特征值的特征向量和广义特征向量所张成的 $\mathbb{R}^n$ 的线性不变子空间, 也有对应于它的复特征值的复特征向量的实部和虚部, 譬如说正虚部的不变子空间. 这样的子空间称为 $A$ 的 (实) 广义特征空间.

如果 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值, 那么 $\mu = f(\lambda)$ 是 $B = f(A)$ 的特征值, 其中 $f$ 是解析函数.

### A.1.5　Fredholm 交替定理

设 $A$ 是实 $n \times m$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$ 是实向量. $A$ 的零 - 空间是 $\mathbb{R}^m$ 的线性子空间, 它是由满足 $Ax = 0$ 的所有向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 所组成. $A$ 的值域是对某个 $y \in \mathbb{R}^m$ 满足 $Ay = x$ 的一切 $x \in \mathbb{R}^n$ 的集合.

**定理 A.2**(Fredholm 交替定理)　*方程 $Ax = b$ 有解当且仅当对满足 $A^{\mathrm{T}}v = 0$ 的每一个向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 有 $b^{\mathrm{T}}v = 0$.* □

注意, $b^{\mathrm{T}}v = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准数量积. 定理意味着 $A^{\mathrm{T}}$ 的零 - 空间是 $A$ 的值域的正交补, 它们一起张成整个 $\mathbb{R}^n$. 换句话说, 任何向量 $b \in \mathbb{R}^n$ 可唯一分解为 $b = b_r + b_0$, 其中 $b_r$ 在 $A$ 的值域内, $b_0$ 在 $A^{\mathrm{T}}$ 的零 - 空间内, $b_r$ 正交于 $b_0$.

设 $A$ 是复矩阵, $b$ 是复向量, 如果以复共轭和转置的合成代替转置, 定理 A.2 仍保持有效.

### A.1.6　群

集合 $G$ 是一群, 如果用 "$\circ$": $G \times G \to G$ 定义的积满足下面的性质:

(i) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 对所有 $f, g, h \in G$;

(ii) 存在单位元素 $e \in G$, 使得 $g \circ e = e \circ g = g$, 对一切 $g \in G$;

(iii) 对每一个 $g \in G$, 存在唯一元素 $g^{-1} \in G$ 使得 $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$.
所有实非奇异 $n \times n$ 矩阵按矩阵乘法和单位矩阵 $I_n$ 构成**一般线性群**, 记为 $GL(n)$. 所有满足 $A^{\mathrm{T}}A = I$ 的 $n \times n$ 矩阵构成它的**正交子群** $O(n)$.

## A.2 分　　析

如果 $y = g(x)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和 $z = f(y)$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ 是两个映射, 那么它们的**合成** $h = f \circ g$ 是映射 $z = h(x)$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 由公式

$$h(x) = f(g(x))$$

定义. 设 $f_y(y)$ 为 $f$ 在 $y \in \mathbb{R}^m$ 计算的 Jacobi 矩阵:

$$f_y(y) = \left(\frac{\partial f_i(y)}{\partial y_j}\right),$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, k$, $j = 1, 2, \cdots, m$. 类似地, 如果定义 $h_x(x)$ 和 $g_x(x)$, 那么有 (**链规则**)

$$h_x(x) = [f_y(y)]|_{y=g(x)}[g_x(x)].$$

### A.2.1　隐函数定理和反函数定理

考虑映射

$$(x, y) \mapsto F(x, y),$$

其中

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

是定义在 $(x, y) = (0, 0)$ 的邻域内的光滑映射使得 $F(0, 0) = 0$. 设 $F_y(0, 0)$ 表示 $F$ 关于 $y$ 在 $(0, 0)$ 的一阶偏导数构成的矩阵:

$$F_y(0, 0) = \left(\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j}\right)\Bigg|_{(x,y)=(0,0)},$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, m$.

**定理 A.3**(隐函数定理)　*若矩阵 $F_y(0, 0)$ 是非奇异的, 则存在唯一光滑局部定义的函数 $y = f(x)$,*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

*使得对 $\mathbb{R}^n$ 的原点的某个邻域内的所有 $x$, 有*

$$F(x, f(x)) = 0.$$

此外

$$f_x(0) = -[F_y(0,0)]^{-1}F_x(0,0). \qquad \square$$

$f$ 的光滑性次数与 $F$ 的相同.

现在考虑映射

$$y = g(x),$$

其中

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

是定义在 $x=0$ 的邻域内的光滑函数且满足 $g(0)=0$. 下面的定理是隐函数定理的推论.

**定理 A.4**(反函数定理)　*若矩阵 $g_x(0)$ 非正则, 则存在唯一光滑局部定义的函数 $x=f(y)$,*

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

*使得对 $\mathbb{R}^n$ 中原点的某个邻域内的一切 $y$ 有*

$$g(f(y)) = y. \qquad \square$$

函数 $f$ 称为 $g$ 的反函数, 并记为 $f=g^{-1}$.

### A.2.2　Taylor 展开

设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点 $x=0$ 的区域. 用 $C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ 表示映射 $y=f(x)$(向量值函数) 集合, $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 具有直到包括 $k\geqslant 0$ 阶连续可微的分量. 如果 $f\in C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $k$ 充分大, 函数 $f$ 称为光滑. $C^\infty$ 函数有任何阶的连续偏导数. 任何函数 $f\in C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ 在 $x=0$ 附近可以表示为形式 (Taylor 展开)

$$f(x) = \sum_{|i|=0}^{k} \frac{1}{i_1!i_2!\cdots i_n!} \left.\frac{\partial^{|i|}f(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\right|_{x=0} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} + R(x),$$

其中 $|i| = i_1+i_2+\cdots+i_n$ 和 $R(x) = O(\|x\|^{k+1}) = o(\|x\|^k)$, 即

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|^k} \to 0,$$

当 $\|x\|\to 0$. 这里 $\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$.

$C^\infty$ 函数 $f$ 称为是原点附近的解析函数, 如果对应的 Taylor 级数

$$\sum_{|i|=0}^{\infty} \frac{1}{i_1!i_2!\cdots i_n!} \left.\frac{\partial^{|i|}f(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\right|_{x=0} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

在充分接近于 $x=0$ 的任何点 $x$ 都收敛于 $f(x)$.

### A.2.3　距离空间、赋范空间与其他空间

集合 $X$ 是距离空间, 如果函数 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}^1$ 有定义且满足:

(i) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, 对一切 $x,y\in X$;

(ii) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, 对一切 $x,y,z\in X$.

函数 $\rho$ 称为度量 (距离). 元素 $x_k\in X$ 的序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有极限 $x^0\in X$(收敛), 如果对任何 $\varepsilon>0$ 存在整数 $N(\varepsilon)$, 使得对一切 $k\geqslant N(\varepsilon)$ 有

$$\rho(x_k,x_0)<\varepsilon.$$

记 $x^0=\lim_{k\to\infty}x_k$. 函数 $f:X\to X$ 在 $x^0$ 连续, 如果对所有满足 $\lim_{k\to\infty}x_k=x^0$ 的序列 $x_k$ 有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(x^0),$$

函数 $g:X\to X$ 称为在 $x^0$ 是 Holder 连续, 如果存在常数 $L_0$ 和指标 $0<\beta\leqslant 1$ 使得对充分接近于 $x_0$ 的所有 $x$ 有

$$\rho(g(x),g(x_0))\leqslant L_0[\rho(x,x_0)]^{\beta}.$$

集合 $S\subset X$ 称为闭的, 如果它包含对任何有限的 $k, x_k\in S$ 的所有收敛序列的极限. 元素 $x_k\in X$ 的序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列, 如果对任何 $\varepsilon>0$ 存在整数 $N(\varepsilon)$, 使得对每一个 $n,m\geqslant N$ 有

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

如果序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有极限, 它是一个 Cauchy 序列. 如果任何 Cauchy 序列有极限在 $X$ 中, 空间 $X$ 称为完备的.

设 $X$ 是一元素集, 其中加法和与数 (复数) 相乘满足标准的公理已定义. $X$ 可以是由函数组成, 例如, $X=C^k(\Omega,\mathbb{C}^m)$.

集合 $X$ 是赋范空间, 如果函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}^1$ 有定义且满足:

(i) $\|x\|\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0$ 导致 $x=0$;

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, 对任何 (复) 数 $\alpha$;

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, 对一切 $x,y\in X$.

函数 $\|\cdot\|$ 称为范数. 任何赋范空间是距离空间, 距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$. 如果 $X$ 在这个距离下是完备的, 就称它为Banach 空间. 连续函数空间 $C^0(\Omega,\mathbb{C}^m)$ 在范数

$$\|f\|=\max_{i=1,2,\cdots,m}\sup_{\xi\in\Omega}|f_i(\xi)|$$

下是 Banach 空间. 集合 $S \subset X$ 有界, 如果 $\|x\| < C$, 对一切 $x \in S$ 和某个 $C > 0$.

集合 $X$ 是具数量积的空间, 如果对每一对 $(x, y) \in X$ 定义一个复数 $\langle x, y\rangle$(数量积) 使得下面的性质成立:

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, 对一切 $x, y \in X$;

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, 对一切 $x, y \in X$ 和任何复数 $\alpha$;

(iii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, 对一切 $x, y, z \in X$;

(iv) $\langle x, y\rangle \geqslant 0$, 以及 $\langle x, x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

任何一个具数量积的空间是赋范空间, 范数为 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. 如果它在这个范数下是 Banach 空间, 就称为 Hilbert 空间. 空间 $\mathbb{C}^n$ 是 Hilbert 空间, 其数量积为

$$\langle x, y\rangle = \bar{x}^{\mathrm{T}} y = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k..$$

因此, 它也是 Banach 空间, 是完备的距离空间. 注意, 对任何 $(x, y) \in \mathbb{C}^n$ 和复矩阵 $A$,

$$\langle x, A\rangle = \langle \bar{A}^{\mathrm{T}} x, y\rangle.$$

空间 $C^0(\Omega, \mathbb{C}^m)$ 是具数量积

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} \bar{f}^{\mathrm{T}}(x) g(x) \mathrm{d}x$$

的空间, 但它不是 Hilbert 空间.

## A.3　几　　何

### A.3.1　集合

记 $x$ 为集合 $X$ 的元素, 写为 $x \in X$. 集合 $A$ 是 $X$ 的子集 $(A \subset X)$, 如果 $x \in A$ 隐含 $x \in X$. 如果 $A$ 和 $B$ 是两个集合, 则 $A \cup B$ 是所有属于 $A$ 或 $B$ 的元素组成的集合, $A \cap B$ 是所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素所组成的集合. 所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的集合记作 $A \backslash B$. 所有使得 $a \in A$ 和 $b \in B$ 的有序对 $(a, b)$ 的集合称为 $A$ 与 $B$ 的直积, 记作 $A \times B$.

下面的记号是用于标准集合:

$\mathbb{R}^1$: 所有实数 $-\infty < x < +\infty$ 的集合; $\mathbb{R}^1_+$: 所有非负实数 $x \geqslant 0$ 的集合;

$\mathbb{R}^n$: $n$ 个集合 $\mathbb{R}^1$ 的直积; 元素 $x \in \mathbb{R}^n$ 视为向量 (单列矩阵) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$;

$\mathbb{C}^1$: 所有复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的集合, 其中 $x, y \in \mathbb{R}^1, \mathrm{i}^2 = -1$. 任何 $z \in C^1$ 可表示为 $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, 其中 $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z$; $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$;

$\mathbb{C}^n$: $n$ 个集合 $\mathbb{C}^1$ 的直积; 元素 $z \in \mathbb{C}^n$ 视为向量 (单列矩阵) $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$;

$\mathbb{Z}$: 所有整数 $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$; $\mathbb{Z}_+$ 表示所有非负整数 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 的集合;

$\mathbb{S}^1$: 单位圆: $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;

$\mathbb{T}^2$: 二维环面: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

### A.3.2 映射

设 $X$ 和 $Y$ 是两个任意集合. (单值) 映射 (或函数)

$$f : X \to Y$$

称为是从 $X$ 到 $Y$ 定义的, 如果对任何元素 $x \in X$, 元素 $y \in Y$ 被确定. 写为

$$y = f(x),$$

或者

$$x \mapsto f(x).$$

映射 $f : X \to X$ 称为 $X$ 的*变换*. 映射 $f : X \to X$ 可只对子集 $D \subset X$ 的元素有定义, 这时称 $D$ 为 $f$ 的*定义域*.

对某个 $x \in X_0$ 使得 $y = f(x)$ 的所有 $y \in Y$ 的集合 $f(X_0)$ 称为 $X_0 \subset X$ 的*象*. 象 $f(X)$ 认为是 $f$ 的*值域*. 使得 $f(x) \in Y_0$ 的所有 $x \in X$ 的集合 $f^{-1}(Y_0)$ 称为 $Y_0 \subset Y$ 的*原象*.

映射 $f$ *可逆*, 如果 $f^{-1}(Y) = X$, 且对任何 $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ 正好由一个元素 $x \equiv f^{-1}(y)$ 组成. 在这情形, 使得对所有的 $x \in X$ 有 $f^{-1}(f(x)) = x$, 且对所有 $y \in Y$ 有 $f^{-1}(f(y)) = y$ 的*逆映射* $f^{-1} : Y \to X$ 有定义.

### A.3.3 流形

为了我们的目的, 把*流形* $M \subset \mathbb{R}^n$ 考虑为 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $m$ 个纯量方程

$$F(x) = 0$$

的点集就够了, 这里 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 对 $m \leqslant n$. 流形 $M$ *光滑* (*可微*), 如果 $F$ 光滑且 Jacobi 矩阵 $F_x$ 在每一点 $x \in M$ 的秩等于 $m$. 在光滑流形 $M$ 上的每一点 $x$, $(n-m)$ 维*切空间* $T_xM$ 有定义. 这个空间是由所有可表示为 $v = \dot{\gamma}(0)$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 所组成, 其中 $\gamma : \mathbb{R}^1 \to M$ 是流形上满足 $\gamma(0) = x$ 的光滑曲线. 另外, $T_xM$ 也可由

$$\operatorname{span}\{\nabla F_1, \nabla F_2, \cdots, \nabla F_m\}$$

的正交补来刻画, 其中

$$\nabla F_k = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \frac{\partial F_k}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

是在点 $x$ 上的线性无关的梯度向量. 在每一点 $x \in M$ 附近可用它们到 $T_xM$ 的投影引入 $n-m$ 个坐标, 因此, 光滑流形 $M$ 局部等价于 $\mathbb{R}^{n-m}$.

**区域** $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由逐片光滑的 $(n-1)$ 维流形所界定的闭点集.



# 参 考 文 献


Afraimovich V S & Shil′nikov L P. 1972. Singular trajectories of dynamical systems. *Uspekhi. Mat. Nauk*, **27**: 189–190. In Russian.

Afraimovich V S & Shil′nikov L P. 1974. The attainable transitions from Morse-Smale systems to systems with several periodic motions. *Math. USSR-Izv*, **8**: 1235–1270.

Afraimovich V S & Shil′nikov L P. 1982. Bifurcation of codimension 1, leading to the appearance of a countable set of tori. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **262**: 777–780. In Russian.

Allgower E & Georg K. 1990. *Numerical Continuation Methods: An Introduction.* New York: Springer-Verlag.

Allgower E & Georg, K. 1993. Continuation and path following//*Acta Numerica.* Cambridge: Cambridge University Press, 1–64.

Andronov A A. 1933. Mathematical problems of self-oscillation theory//*I All-Union Conference on Oscillations.* November 1931'. GTTI. Moscow-Leningrad, 32–71. In Russian.

Andronov A A & Leontovich E A. 1939. Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters. *Uchen. Zap. Gork. Univ.*, **6**: 3–24. In Russian.

Andronov A A & Pontryagin L S. 1937. Systèmes grossières. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS (N. S.)*, **14**: 247–251.

Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I I & Maier A G. 1973. *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane.* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

Annabi H, Annabi M L & Dumortier F. 1992. Continuous dependence on parameters in the Bogdanov-Takens bifurcation//*Geometry and Analysis in Nonlinear Dynamics* (Groningen, 1989). *Vol. 222 of Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1–21.

Anosov D V. 1967. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90**: 1–212. In Russian.

Arnol'd V I. 1972. Lectures on bifurcations in versal families. *Russian Math. Surveys*, **27**: 54–123.

Arnol'd V I. 1973. *Ordinary Differential Equations.* Cambridge, MA: MIT Press.

Arnol'd V I. 1977. Loss of stability of self-induced oscillations near resonance, and versal deformations of equivariant vector fields. *Functional Anal. Appl.*, **11**: 85–92.

Arnol'd V I. 1983. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.*

New York: Springer-Verlag.

Arnol'd V I. 1984. *Catastrophe Theory.* New York: Springer-Verlag.

Arnol'd V I, Afraimovich V S, Il'yashenko Yu S & Shil′nikov L P. 1994. Bifurcation theory// Arnol'd V I ed.. *Dynamical Systems V. Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* New York: Springer-Verlag.

Arnol'd V I, Varchenko A N & Gusein-Zade S M. 1985. *Singularities of Differentiable Maps I.* Boston, MA: Birkhäuser.

Aronson D, Chory M, Hall G & McGehee R. 1982. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps on the plane: a computer assisted study. *Comm. Math. Phys.*, **83**: 303–354.

Arrowsmith D & Place C. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge: Cambridge University Press.

Arrowsmith D, Cartwright J, Lansbury A & Place C. 1993. The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **3**: 803–842.

Auchmuty J & Nicolis G. 1976. Bifurcation analysis of reaction-diffusion equations (III). Chemical oscillations. *Bull. Math. Biol.*, **38**: 325–350.

Babenko K I & Petrovich V Yu. 1983. Demonstrative computations on a computer, Preprint 83–133. *Institute of Applied Mathematics.* Moscow: USSR Academy of Sciences. In Russian.

Babenko K I & Petrovich V Yu. 1984. Demonstrative calculations in the problem of existence of the solution of the doubling equation. *Soviet Math. Dokl.*, **30**: 54–59.

Back A, Guckenheimer J, Myers M, Wicklin F & Worfolk P. 1992. DsTool:Computer assisted exploration of dynamical systems. *Notices Amer. Math. Soc.*, **39**: 303–309.

Bai F & Champneys A. 1996. Numerical detection and continuation of saddlenode homoclinic bifurcations of codimension one and two. *Dynam. Stability Systems*, **11**: 325–346.

Bajaj A. 1986. Resonant parametric perturbations of the Hopf bifurcation. *J. Math, Anal. Appl.*, **115**: 214–224.

Balabaev N K & Lunevskaya L V. 1978. Continuation of a curve in the $n$-dimensional space. FORTRAN Software Series, Vol. 1. Research Computing Centre. USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Balakrishnan A. 1976. *Applied Functional Analysis.* Berlin: Springer-Verlag.

Bautin N N. 1949. *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions.* OGIZ Gostexizdat, Leningrad. In Russian.

Bautin N N & Leontovich E A. 1976. *Methods and Rules for the Qualitative Study of Dynamical Systems on the Plane.* Moscow: Nauka. In Russian.

Bautin N N & Shil′nikov L P. 1980. Supplement I: Behavior of dynamical systems close

to the boundaries of domains of stability of equilibrium states and periodic motions ('dangerous' and 'safe' boundaries)//*The Limit Cycle Bifurcation and Its Applications.* Russian translation of the book by Marsden J E and McCracken M. Mir, Moscow. In Russian.

Bazykin A D. 1974. Volterra system and Michaelis-Menten equation//*Problems of Mathematical Genetics.* Novosibirsk State University. Novosibirsk, 103–143. In Russian.

Bazykin A D. 1985. *Mathematical Biophysics of Interacting Populations.* Moscow: Nauka. In Russian (English translation: *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations.* River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 1998).

Bazykin A D & Khibnik A I. 1981. On sharp excitation of self-oscillations in a Volterra-type model. *Biophysika*, **26**: 851–853. In Russian.

Bazykin A D, Berezovskaya F S, Denisov G A & Kuznetsov Yu A. 1981. The influence of predator saturation effect and competition among predators on predator-prey system dynamics. *Ecol. Modelling*, **14**: 39–57.

Bazykin A D, Kuznetsov Yu A & Khibnik A I. 1985. Bifurcation diagrams of planar dynamical systems. Research Computing Centre. USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Bazykin A D, Kuznetsov Yu A & Khibnik A I. 1989. *Portraits of Bifurcations: Bifurcation Diagrams of Dynamical Systems on the Plane.* Moscow: Znanie. In Russian.

Belitskii G R. 1973. Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class. *Functional Anal. Appl.*, **7**: 268–277.

Belitskii G R. 1979. *Normal Forms, Ivariants, and Local Mappings.* Naukova Dumka, Kiev. In Russian.

Belitskii G R. 2002. $C^\infty$-normal forms of local vector fields. symmetry and perturbation theory. *Acta Appl. Math.*, **70**: 23–41.

Belyakov L A. 1974. A certain case of the generation of periodic motion with homoclinic curves. *Math. Notes*, **15**: 336–341.

Belyakov L A. 1980. The bifurcation set in a system with a homoclinic saddle curve. *Math. Notes*, **28**: 910–916.

Belyakov L A. 1984. Bifurcations of systems with a homoclinic curve of the saddlefocus with a zero saddle value. *Math. Notes*, **36**: 838–843.

Berezovskaya F S & Khibnik A I. 1979. On the problem of bifurcations of selfoscillations close to a 1:4 resonance (investigation of a model equation). Research Computing Centre. USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian (English translation: *Selecta Math.*, 1994, **13**: 197–215).

Berezovskaya F S & Khibnik A I. 1981. On the bifurcations of separatrices in the problem of stability loss of auto-oscillations neat 1:4 resonance. *J. Appl. Math. Mech.*, **44**: 938–942.

Berezovskaya F S & Khibnik A I. 1985. Bifurcations of a dynamical second-order system with two zero eigenvalues and additional degeneracy//*Methods of Qualitative Theory of Differential Eqiations.* Gorkii State University, Gorkii, 128–138. In Russian.

Beyn W -J 1990a. Global bifurcations and their numerical computation//Roose D, De Dier B & Spence A, eds. *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven, 1989). Vol. 313 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 169–181.

Beyn W -J. 1990b. The numerical computation of connecting orbits in dynamical systems. *IMA J. Numer. Anal.*, **9**: 379–405.

Beyn W -J. 1991. Numerical methods for dynamical systems//Light W, ed.. *Advances in Numerical Analysis*, Vol. I. *Nonlinear Partial Differential Equations and Dynamical Systems.* Oxford: Oxford University Press, 75–236.

Beyn W -J 1994. Numerical analysis of homoclinic orbits emanating from a Takens-Bogdanov point. *IMA J. Numer. Anal.*, **14**: 381–410.

Beyn W -J & Kleinkauf J -M. 1997. The numerical computation of homoclinic orbits for maps. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**: 1207–1236.

Beyn W -J, Champneys A, Doedel E, Govaerts W, Kuznetsov Yu A & Sandstede B. 2002. Numerical continuation, and computation of normal forms//Fiedler B, ed.. *Handbook of Dynamical Systems*, Vol. 2. Amsterdam: Elsevier Science, 149–219.

Birkhoff G. 1935. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi. Lincaei, Ser.*, **31**: 85–216.

Birkhoff G. 1966. *Dynamical Systems.* With an addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX. American Mathematical Society, Providence, RI.

Bogdanov R I. 1975. Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues. *Functional Anal. Appl.*, **9**: 144–145.

Bogdanov R I. 1976a. Bifurcations of a limit cycle of a certain family of vector fields on the plane//*Proceedings of Petrovskii Seminar*, Vol. 2. Moscow State University. Moscow, 23–35. In Russian (English translation: *Selecta Math. Soviet.*, 1981, **1**: 373–388).

Bogdanov R I. 1976b. The versal deformation of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues//*Proceedings of Petrovskii Seminar*, Vol. 2. Moscow State University, Moscow, 37–65. In Russian (English translation: *Selecta Math. Soviet.*, 1981, **1**: 389–421).

Borisyuk R M. 1981. Stationary solutions of a system of ordinary differential equations depending upon a parameter. *FORTRAN Software Series.* Vol. 6. Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Broer H & Vegter G. 1984. Subordinate Šil'nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **4**: 509–525.

Broer H, Osinga H & Vegter G. 1997. Algorithms for computing normally hyperbolic invariant manifolds. *Z. Angew. Math. Phys.*, **48**: 480–524.

Broer H, Roussarie R & Simó C. 1993. On the Bogdanov-Takens bifurcation for planar diffeomorphisms//*International Conference on Differential Equations*, Vol. 1, 2 (Barcelona, 1991). NJ: World Scientific, River Edge, 81–92.

Broer H, Roussarie R & Simó C. 1996. Invariant circles in the Bogdanov-Takens bifurcation for diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **16**: 1147–1172.

Broer H, Simó C & Tatjer J. 1998. Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms. *Nonlinearity*, **11**: 667–770.

Broyden C. 1965. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Math. Comp.*, **19**: 577–593.

Butenin N V, Neimark Ju I & Fufaev N A. 1976. *Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillations.* Nauka, Moscow. In Russian (Spanish translation: *Introducción a la Teoría de Oscilaciones No Lineales,* Mir, Moscow, 1990).

Bykov V V. 1977. On the birth of periodic motions from a separatrix contour of a three-dimensional system. *Uspekhi Mat. Nauk*, **32**: 213–214. In Russian.

Bykov V V. 1980. Bifurcations of dynamical systems close to systems with a seperatrix contour containing a saddle-focus//*Methods of Qualitative Theory of Differential Equations.* Gorkii State University, Gorkii. In Russian.

Bykov V V. 1993. The bifurcations of separatrix contours and chaos. *Physica D*, **62**: 290–299.

Bykov V V. 1999. On systems with separatrix contour containing two saddle-foci. *J. Math. Sci. (New York)*, **95**: 2513–2522.

Carr J. 1981. *Applications of Center Manifold Theory.* New York: Springer-Verlag.

Carr J, Chow S -N & Hale J. 1985. Abelian integrals and bifurcation theory. *J. Differential Equations*, **59**: 413–436.

Champneys A & Kuznetsov Yu A. 1994. Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **4**: 795–822.

Champneys A, Härterich J & Sandstede B. 1996. A non-transverse homoclinic orbit to a saddle-node equilibrium. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **16**: 431–450.

Champneys A, Kuznetsov Yu A & Sandstede B. 1995. HomCont: an AUTO86 driver for homoclinic bifurcation analysis. Version 2.0, Report AM-R9516. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Champneys A, Kuznetsov Yu A & Sandstede B. 1996. A numerical toolbox for homoclinic bifurcation analysis. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **6**: 867–887.

Char B, Geddes K, Gonnet G, Leong B, Monagan M & Watt S. 1991a. *Maple V Language Reference Manual.* New York: Springer-Verlag.

Char B, Geddes K, Gonnet G, Leong B, Monagan M & Watt S. 1991b. *Maple V Library*

*Reference Manual,* New York: Springer-Verlag.

Chenciner A. 1981. Courbes invariantes non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de $\mathbf{R}^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **292**: 507–510.

Chenciner A. 1982. Points homoclines au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de $\mathbf{R}^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **294**: 269–272.

Chenciner A. 1983a. Bifurcations de difféomorphismes de $\mathbf{R}^2$ au voisinage d'un point fixe elliptique//G. Iooss, R. Helleman & R. Stora, eds. Chaotic Behavior of Deterministic Systems (Les Houches, 1981). Amsterdam: North-Holland, 273–348.

Chenciner A. 1983b. Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de $\mathbf{R}^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **297**: 465–467.

Chenciner A. 1985a. Bifurcations de points fixes elliptiques. I. Courbes invariantes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61**: 67–127.

Chenciner A. 1985b. Bifurcations de points fixes elliptiques. II. Orbites periodiques et ensembles de Cantor invariants. *Invent. Math.*, **80**: 81–106.

Chenciner A. 1988. Bifurcations de points fixes elliptiques. III. Orbites périodiques de "petites" périodes et élimination résonnante des couples de courbes invariantes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **66**: 5-91.

Cheng C -Q. 1990. Hopf bifurcations in nonautonomous systems at points of resonance. *Sci. China Ser. A*, **33**: 206–219.

Cheng C -Q & Sun Y -S. 1992. Metamorphoses of phase portraits of vector fields in the case of symmetry of order 4. *J. Differential Equations*, **95**: 130–139.

Chow S -N & Hale J. 1982. *Methods of Bifurcation Theory.* New York: Springer-Verlag.

Chow S -N & Lin X -B. 1990. Bifurcation of a homoclinic orbit with a saddlenode equilibrium. *Differential Integral Equations*, **3**: 435–466.

Chow S -N, Deng B & Fiedler B. 1990. Homoclinic bifurcation at resonant eigenvalues. *J. Dynamics Differential Equations*, **2**: 177–244.

Chow S -N, Drachman B & Wang D. 1990. Computation of normal forms. *J. Comput. Appl. Math.*, **29**: 129–143.

Chow S -N, Li C & Wang D. 1989a. Erratum: "uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities". *J. Differential Equations*, **82**: 206.

Chow S -N, Li C & Wang D. 1989b. Uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities. *J. Differential Equations*, **77**: 231–253.

Chow S -N, Li C & Wang D. 1994. *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields.* Cambridge: Cambridge University Press.

Chu K, Govaerts W & Spence A. 1994. Matrices with rank deficiency two in eigenvalue problems and dynamical systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, **31**: 524–539.

Coddington E & Levinson N. 1955. *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: McGraw-Hill.

Coullet P & Eckmann J -P. 1980. *Iterated Maps on the Interval as a Dynamical System.* MA: Birkhauser, Boston.

Coullet P & Spiegel E. 1983. Amplitude equations for systems with competing instabilities. *SIAM J. Appl. Math.*, **43**: 776–821.

Cox D, Little J & O'Shea D. 1992. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* New York: Springer-Verlag.

Cushman R & Sanders J. 1985. A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation. *J. Differential Equations*, **59**: 243–256.

de Boor C & Swartz B. 1973. Collocation at Gaussian points. *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**: 582–606.

Demmel J, Dieci L & Friedman M. 2000. Computing connecting orbits via an improved algorithm for continuing invariant subspaces. *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**: 81–94.

Deng B. 1989. The Šil'nikov problem, exponential expansion, strong $\lambda$-lemma, $C^1$-linearization, and homoclinic bifurcation. *J. Differential Equations*, **79**: 189–231.

Deng B. 1990. Homoclinic bifurcations with nonhyperbolic equilibria. *SIAM J. Math. Anal.*, **21**: 693–720.

Deng B. 1993a. Homoclinic twisting bifurcations and cusp horseshoe maps. *J. Dynamics Differential Equations*, **5**: 417–467.

Deng B. 1993b. On Šhil'nikov's homoclinic-saddle-focus theorem. *J. Differential Equations*, **102**: 305–329.

Deng B. 1994. Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **4**: 823–841.

Deng B. 1995. Constructing Lorenz type attractors through singular perturbations. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **5**: 1633–1642.

Deng B & Sakamoto K. 1995. Šil'nikov-Hopf bifurcations. *J. Differential Equations*, **119**: 1–23.

Denjoy A. 1932. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math.*, **17(IV)**: 333–375.

Dennis J & Schnabel R. 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.* NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Deuflhard P, Fiedler B & Kunkel P. 1987. Efficient numerical pathfollowing beyond critical points. *SIAM J. Numer. Anal.*, **24**: 912–927.

Dhooge A, Govaerts W & Kuznetsov Yu A. 2003. MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Trans. Math. Software*, **29**: 141–164.

Dieci L & Friedman M. 2001. Continuation of invariant subspaces. *Numer. Linear Algebra Appl.*, **8**: 317–327.

Dieci L & Lorenz J. 1995. Computation of invariant tori by the method of characteristics. *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**: 1436–1474.

Dieci L & Lorenz J. 1997. Lyapunov-type numbers and torus breakdown: numerical aspects and a case study. *Numer. Algorithms*, **14**: 79–102.

Diekmann O & van Gils S. 1984. Invariant manifolds for Volterra integral equations of convolution type. *J. Differential Equations*, **54**: 139–180.

Diekmann O, van Gils, S Verduyn Lunel S & Walther H -O. 1995. *Delay Equations: Functional, Complex, and Nonlinear Analysis.* New York: Springer-Verlag.

Diener F. 1983. Quelques exemples de bifurcations et leurs canards//Proceedings of the eleventh annual Iranian mathematics conference (Mashhad, 1980). University of Mashhad, Mashhad, 59–73.

Doedel E. 1981. AUTO, a program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. *Congr. Numer.*, **30**: 265–384.

Doedel E & Friedman M. 1989. Numerical computation of heteroclinic orbits. *J. Comput. Appl. Math.*, **26**: 159–170.

Doedel E & Kernévez J -P. 1986. AUTO: software for continuation problems in ordinary differential equations with applications. *Applied Mathematics.* California Institute of Technology, Pasadena, CA.

Doedel E, Champneys A, Fairgrieve T, Kuznetsov Yu A, Sandstede B & Wang X -J. 1997. AUTO97: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont). *Computer Science.* Concordia University, Montreal.

Doedel E, Friedman M & Kunin B. 1997. Successive continuation for locating connecting orbits. *Numerical Algorithms*, **14**: 103–124.

Doedel E, Friedman M & Monteiro A. 1994. On locating connecting orbits. *Appl. Math. Comput.*, **65**: 231–239.

Doedel E, Govaerts W & Kuznetsov Yu A. 2003. Computation of periodic solution bifurcations in ODEs using bordered systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, **41**: 401–435.

Doedel E, Jepson A & Keller H. 1984. Numerical methods for Hopf bifurcation and continuation of periodic solution paths//Glowinski R & Lions J, eds. Computing Methods in Applied Science and Engineering VI. Amsterdam: North-Holland.

Doedel E, Keller H & Kernévez J -P. 1991a. Numerical analysis and control of bifurcation problems: (I) Bifurcation in finite dimensions. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **1**: 493–520.

Doedel E, Keller H & Kernévez J -P. 1991b. Numerical analysis and control of bifurcation problems: (II) Bifurcation in infinite dimensions. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **1**: 745–772.

Dulac M. 1923. Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France*, **51**: 45–188.

Dumortier F. 1978. *Singularities of Vector Fields, Mathematical Monographs* 32. IMPA,

Rio de Janeiro.

Dumortier F & Rousseau R. 1990. Cubic Liénard equations with linear damping. *Nonlinearity*, **3**: 1015–1039.

Dumortier F, Roussarie R & Sotomayor J. 1987. Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **7**: 375–413.

Dumortier F, Roussarie R, Sotomayor J & Żołądek H. 1991. *Bifurcations of Planar Vector Fields: Nilpotent Singularities and Abelian Integrals.* Vol. 1480 of *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag.

Edoh K & Lorenz J. 2001. Computation of Lyapunov-type numbers for invariant curves of planar maps. *SIAM J. Sci. Comput.*, **23**: 1113–1134.

Ermentrout B. 2002. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students.* Vol. 14 of *Software, Environments, and Tools.* PA: SIAM, Philadelphia.

Evans J, Fenichel N & Feroe J. 1982. Double impulse solutions in nerve axon equations. *SIAM J. Appl. Math.*, **42**: 219–234.

Fairgrieve T & Jepson A. 1991. O. K. Floquet multipliers. *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**: 1446–1462.

Feichtinger G. 1992. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *J. Econom. Behavior Organization*, **17**: 401–411.

Feigenbaum M. 1978. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**: 25–52.

Fenichel N. 1971. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.*, **21**: 193–226.

Feroe J. 1981. Travelling waves of infinitely many pulses in nerve equations. *Math. Biosci.*, **55**: 189–204.

Feudel U & Jansen W. 1992. CANDYS/QA-A Software system for qualitative analysis of nonlinear dynamical systems. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **2**: 773–794.

Fiedler B. 1988. *Global Bifurcations of Periodic Solutions with Symmetry.* Vol. 1309 of *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag.

FitzHugh R. 1961. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, **1**: 445–446.

Friedman M. 2001. Improved detection of bifurcations in large nonlinear systems via the continuation of invariant subspaces algorithm. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **11**: 2277–2285.

Friedman M & Doedel E. 1991. Numerical computation and continuation of invariant manifolds connecting fixed points. *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**: 789–808.

Friedman M & Doedel E. 1993. Computational methods for global analysis of homoclinic

and heteroclinic orbits: A case study. *J. Dynamics Differential Equations*, **5**: 37–57.

Frouzakis C, Adomaitis R & Kevrekidis I. 1991. Resonance phenomena in an adaptively-controlled system. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **1**: 83–106.

Fuller A. 1968. Condition for a matrix to have only characteristic roots with negative real parts. *J. Math. Anal. Appl.*, **23**: 71–98.

Gambaudo J. 1985. Perturbation of a Hopf bifurcation by an external timeperiodic forcing. *J. Differential Equations*, **57**: 172–199.

Gamero E, Freire E & Rodríguez-Luis A. 1993. Hopf-zero bifurcation: normal form calculation and application to an electronic oscillator//*International Conference on Differential Equations.* Vol. 1, 2 (Barcelona, 1991). World Scientific, River Edge, NJ, 517–524.

Gaspard P. 1983. Generation of a countable set of homoclinic flows through bifurcation. *Phys. Lett. A*, **97**: 1–4.

Gaspard P. 1993. Local birth of homoclinic chaos. *Physica D*, **62**: 94–122.

Gaspard P, Kapral R & Nicolis G. 1984. Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis. *J. Stat. Phys.*, **35**: 687–727.

Gatermann K & Hohmann A. 1991. Symbolic exploitation of symmetry in numerical path-following. *Impact Comput. Sci. Engrg.*, **3**: 330–365.

Gavrilov N K. 1978. Bifurcations of an equilibrium with one zero and a pair of pure imaginary roots//*Methods of Qualitative Theory of Differential Equations.* Gorkii State University, Gorkii. In Russian.

Gavrilov N K. 1980. Bifurcations of an equilibrium with two pairs of pure imaginary roots//*Methods of Qualitative Theory of Differential Equations.* Gorkii State University, Gorkii, 17–30. In Russian.

Gavrilov N K & Shil′nikov A L. 2000. Example of a blue sky catastrophe//Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics. Vol. 200 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 99–105.

Gavrilov N K & Shil′nikov L P. 1972. On three-dimensional systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve: I. *Math. USSR-Sb.*, **17**: 467–485.

Gavrilov N K & Shil′nikov L P. 1973. On three-dimensional systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve: II. *Math. USSR-Sb.*, **19**: 139–156.

Gheiner J. 1994. Codimension-two reflection and nonhyperbolic invariant lines. *Nonlinearity*, **7**: 109–184.

Ghezzi L & Kuznetsov Yu A. 1994. Strong resonances and chaos in a stock market model. *Internat. J. Systems Sci.*, **11**: 1941–1955.

Glendinning P. 1988. Global bifurcations in flows//Bedford T & Swift J, eds. *New Directions in Dynamical Systems.* Vol 127 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*. Cambridge: Cambridge University Press, 120–149.

Glendinning P & Sparrow C. 1984. Local and global behaviour near homoclinic orbits. *J.*

*Stat. Phys.*, **35**: 645–696.

Golden M & Ydstie B. 1988. Bifurcation in model reference adaptive control systems. *Systems Control Lett.*, **11**: 413–430.

Golubitsky M & Schaeffer D. 1985. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory I.* New York: Springer-Verlag.

Golubitsky M, Stewart I & Schaeffer D. 1988. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory II.* New York: Springer-Verlag.

Gonchenko S V & Gonchenko V S. 2000. On Andronov-Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. Preprint 556, WIAAS, Berlin.

Gonchenko S V, Gonchenko V S & Tatjer J. 2002. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with codimension two homoclinic tangencies and generalized Hénon maps// Lerman L & Shil′nikov L, eds. *Proceedings of the International Conference "Progress in Nonlinear Science" Dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov*, Vol. I (Nizhny Novgorod, Russia, July 2001). Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, 63–79.

Gonchenko S V, Turaev D V, Gaspard P & Nicolis G. 1997. Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus. *Nonlinearity*, **10**: 409–423.

Gonchenko V S, Kuznetsov Yu A & Meijer H G E. 2004. Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies. Preprint 1296, Department of Mathematics, Utrecht University.

Govaerts W. 2000. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria.* PA: SIAM, Philadelphia.

Govaerts W & Pryce J. 1993. Mixed block elimination for linear systems with wider borders. *IMA J. Numer. Anal.*, **13**: 161–180.

Govaerts W, Guckenheimer J & Khibnik A I. 1997. Defining functions for multiple Hopf bifurcations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**: 1269–1288.

Govaerts W, Kuznetsov Yu A & Sijnave B. 1999. Bifurcations of maps in the software package CONTENT//Ganzha V, Mayr E & Vorozhtsov E, eds. *Computer Algebra in Scientific Computing—CASC'99 (Munich)*. Berlin: Springer, 191–206.

Govaerts W, Kuznetsov Yu A & Sijnave B. 2000a. Continuation of codimension-2 equilibrium bifurcations in CONTENT//Doedel E & Tuckerman L, eds. *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems* (Minneapolis, 1997), Vol. 119 of *IMA Vol. Math. Appl.*. Springer, New York, 163–184.

Govaerts W, Kuznetsov Yu A & Sijnave B. 2000b. Numerical methods for the generalized Hopf bifurcation. *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**: 329–346.

Griewank A & Reddien G. 1984. Characterization and computation of generalized turning points. *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**: 176–184.

Grobman D. 1959. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad.*

*Nauk SSSR*, **128**: 880–881. In Russian.

Gruzdev V G & Neimark Ju I. 1975. A symbolic description of motion in the neighborhood of a not structurally stable homoclinic structure and of its change in transition to close systems//*System Dynamics*, Vol. 8. Gorkii State University, Gorkii, 13–33. In Russian.

Guckenheimer J. 1981. On a codimension two bifurcation//Rand D & Young L, eds. *Dynamical Systems and Turbulence*. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Guckenheimer J. 2002. Numerical analysis of dynamical systems//Fiedler B, ed.. *Handbook of Dynamical Systems*, Vol. 2. Amsterdam: Elsevier Science, 345–390.

Guckenheimer J & Holmes P. 1983. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag.

Guckenheimer J & Meloon B. 2000. Computing periodic orbits and their bifurcations wiht automatic differentiation. *SIAM J. Sci, Comput.*, **22**: 951–985.

Guckenheimer J & Myers M 1996. Computing Hopf bifurcations. II. Three examples from neurophysiology. *SIAM J. Sci. Comput.*, **17**: 1275–1301.

Guckenheimer J & Worfolk P 1993. Dynamical systems: some computational problems// Schlomiuk, ed.. *Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields* (Montreal, 1992). Vol. 408 of *NATO Adv. Sci, Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 241–278.

Guckenheimer J, Myers M & Sturmfels B. 1997. Computing Hopf bifurcations. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**: 1–21.

Hadamard J 1901. Sur l'itération et let solutions asymptotiques des équations diffiérentialles. *Proc. Soc. Math. France*, **29**: 224–228.

Hale J. 1971. *Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Hale J. 1977. *Theory of Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Hale J & Koçak H. 1991. *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.

Hale J & Verduyn Lunel S. 1993. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Hartman P. 1963. On the local linearization of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**: 568–573.

Hartman P. 1954. *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley.

Hassard B. 1980. Computation of invariant manifolds//Holmes P, ed.. *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*. SIAM, Philadelphia, PA, 27–42.

Hassard B, Kazarinoff N & Wan Y -H. 1981. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. London: Cambridge University Press.

Hasselblatt B & Katok A. 2003. *A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments*. New York: Cambridge University Press.

Hastings S. 1976. On the existence of homoclinic and periodic orbits for the FitzHugh-

Nagumo equations. *Quart. J. Math. (Oxford)*, **27**: 123–134.

Hearn A. 1993. *REDUCE User's Manual, Version 3.5.* Santa Monica: The RAND Corporation.

Hénon, M. 1976. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.*, **50**: 69–77.

Henry D. 1981. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Vol. 840 of *Lecture Notes in Mathematics.* New York: Springer-Verlag.

Hille E & Phillips R. 1957. *Functional Analysis and Semigroups.* RI: American Mathematical Society, Providence.

Hirsch M & Smale S. 1974. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* New York: Academic Press.

Hirsch M, Pugh C & Shub M. 1977. *Invariant Manifolds.* Vol. 583 of *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag.

Hirschberg P & Knobloch E. 1993. Šil'nikov-Hopf bifurcation. *Physica D*, **62**: 202–216.

Holling C. 1965. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *Mem. Entomol. Soc. Canada*, **45**: 5–60.

Holmes P & Rand D. 1978. Bifurcations of the forced van der Pol oscillator. *Quart. Appl. Math.*, **35**: 495–509.

Holmes P & Whitley D. 1984. Bifurcations of one-and two-dimensional maps. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **311**: 43–102.

Holodniok M & Kubiček M. 1984a. DERPER-An algorithm for the continuation of periodic solutions in ordinary differential equations. *J. Comput. Phys.*, **55**: 254–267.

Holodniok M & Kubiček M. 1984b. New algorithms for the evaluation of complex bifurcation points in ordinary differential equations. A comparative numerical study. *Appl. Math. Comput.*, **15**: 261–274.

Homburg A J. 1993. Some global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields, PhD thesis. Department of Mathematics, University of Groningen.

Homburg A J. 1996. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields. *Mem. Amer Math. Soc.*, **121** (578): 1–128.

Homburg A J, Kokubu H & Krupa M. 1994. The cusp horseshoe and its bifurcations in the unfolding of an inclination-flip homoclinic orbit. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **14**: 667–693.

Homburg A J, Osinga H & Vegter G. 1995. On the computation of invariant manifolds of fixed points. *Z. Angew. Math. Phys.*, **46**: 171–187.

Hopf E. 1942. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung eines Differetialsystems. *Ber. Math.-Phys. Kl. Sachs, Acad. Wiss. Leipzig*, **94**: 1–22.

Horozov E. 1979. Versal deformations of equivariant vector fields for the cases of symmetry of order 2 and 3//*Proceedings of Petrovskii Seminar*, Vol. 5. Moscow State University,

Moscow, 163–192. In Russian.

Ilyashenko Yu & Li Weigu. 1999. *Nonlocal Bifurcations.* RI: American Mathematical Society, Providence.

Iooss G. 1979. *Bifurcations of Maps and Applications.* Amsterdam: North-Holland.

Iooss G & Adelmeyer M. 1992. *Topics in Bifurcation Theory and Applications.* Singapore: World Scientific.

Iooss G & Joseph D. 1980. *Elementary Stability and Bifurcation Theory.* New York: Springer-Verlag.

Iooss G, Arneodo A, Coullet P & Tresser C. 1981. Simple computation of bifurcating invariant circles for mappings//Rand D & Young L -S, eds.. *Dynamical Systems and Turbulence*, Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics.* New York: Springer-Verlag, 92–211.

Irwin M. 1980. *Smooth Dynamical Systems.* New York: Academic Press.

Jury E & Gutman S. 1975. On the stability of the $A$ matrix inside the unit circle. *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-20**: 533–535.

Kaas-Petersen C. 1989. *PATH-User's Guide.* University of Leeds, Leeds.

Kantorovich L V & Akilov G P. 1964. *Functional Analysis in Normed Spaces.* Oxford: Pergamon Press.

Katok A & Hasselblatt B. 1995. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Vol. 54 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Keener J. 1981. Infinite period bifurcation and global bifurcation branches. *SIAM J. Appl. Math.*, **41**: 127–144.

Keller H. 1977. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems// Rabinowitz P, ed.. *Applications of Bifurcation Theory.* New York: Academic Press, 359–384.

Kelley A. 1967. The stable, center stable center, center unstable and unstable manifolds. *J. Differential Equations*, **3**: 546–570.

Khibnik A I. 1979. Periodic solutions of a system of differential equations//*FORTRAN Software Series*, Vol. 5. Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Khibnik A I. 1990. LINLBF: A program for continuation and bifurcation analysis of equilibria up to codimension three//Roose D, De Dier B & Spence A, eds.. *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven, 1989), Vol. 313 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 283–296.

Khibnik A I, Kuznetsov Yu A, Levitin V V & Nikolaev E V. 1993. Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps. *Physica*

*D*, **62**: 360–371.

Kielhöfer H. 2004. *Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs.* New York: Springer-Verlag.

Kirchgraber U & Palmer K. 1990. *Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization.* Vol. 233 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Harlow: Longman Scientific & Technical.

Kirk V. 1991. Breaking of symmetry in the saddle-node Hopf bifurcation. *Phys. Lett. A*, **154**: 243–248.

Kirk V. 1993. Merging of resonance tongues. *Physica D*, **66**: 267–281.

Kisaka M, Kokubu H & Oka H. 1993a. Bifurcation to $n$-homoclinic orbits and $n$-periodic orbits in vector fields. *J. Dynamics Differential Equations*, **5**: 305–358.

Kisaka M, Kokubu H & Oka H. 1993b. Supplement to homoclinic doubling bifurcation in vector fields//Bamon R, Labarca J, Lewowicz J & Palis J, eds.. *Dynamical Systems.* Longman, London, 92–116.

Kolmogorov A N. 1957. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique//*Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Amsterdam, 1954, Vol. 1. Erven P. Noordhoff N. V., Groningen, 315–333.

Krauskopf B. 1994a. Bifurcation sequences at 1:4 resonance: an inventory. *Nonlinearity*, **7**: 1073–1091.

Krauskopf B. 1994b. The bifurcation set for the 1:4 resonance problem. *Experimental Mathematics*, **3**: 107–128.

Krauskopf B. 1997. Bifurcations at $\infty$ in a model for 1:4 resonance. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **17**: 899–931.

Krauskopf B & Osinga H. 1998. Growing 1D and quasi-2D unstable manifolds of maps. *J. Comput. Phys.*, **146**: 404–419.

Krauskopf B & Osinga H. 1999. Two-dimensional global manifolds of vector fields. *Chaos*, **9**: 768–774.

Kubiček M. 1976. Algorithm 502. Dependence of solutions of nonlinear systems on a parameter. *ACM Trans. Math. Software*, **2**: 98–107.

Kurakin L G & Judovich V I. 1986. Semi-invariant form of equilibrium stability criteria in critical cases. *J. Appl. Math. Mech.*, **50**: 543–546.

Kuznetsov Yu A. 1983. One-dimensional invariant manifolds of saddles in ordinary differential equations depending upon parameters. *FORTRAN Software Series*, Vol. 8. Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Kuznetsov Yu A. 1984. Andronov-Hopf bifurcation in four-dimensional systems with circular symmetry. Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Kuznetsov Yu A. 1985. Auto-waves in reaction-diffusion systems with circular symmetry (center manifold approach). Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Kuznetsov Yu A. 1990. Computation of invariant manifold bifurcations//Roose D, De Dier B & Spence A, eds.. *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven, 1989). Vol. 313 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 183–195.

Kuznetsov Yu A. 1991. Numerical analysis of the orientability of homoclinic trajectories//Seydel R, Schneider F, Küpper T & Troger H, eds.. *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications* (Würzburg, 1990). Vol. 97 of *Internat. Ser. Numer. Math.*. Birkhäuser, Basel, 237–242.

Kuznetsov Yu A. 1999. Numerical normalization techniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ODEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, **36**: 1104–1124.

Kuznetsov Yu A & Meijer H G E. 2003. Numerical normal forms for codim 2 bifurcations of fixed points with at most two critical eigenvalues. Preprint 1290. Department of Mathematics, Utrecht University.

Kuznetsov Yu A & Panfilov A V. 1981. Stochastic waves in the FitzHugh-Nagumo system, Research Computing Centre, USSR Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region. In Russian.

Kuznetsov Yu A & Piccardi C. 1994a. Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models. *J. Math. Biol.*, **32**: 109–121.

Kuznetsov Yu A & Piccardi C. 1994b. Bifurcations and chaos in a periodically forced prototype adaptive control system. *Kybernetika*, **30**: 121–128.

Kuznetsov Yu A & Rinaldi S. 1991. Numerical analysis of the flip bifurcation of maps. *Appl. Math. Comput.*, **43**: 231–236.

Kuznetsov Yu A, De Feo O & Rinaldi S. 2001. Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model. *SIAM J. Appl. Math.*, **62**: 462–487.

Kuznetsov Yu A, Levitin V V & Skovoroda A R. 1996. Continuation of stationary solutions to evolution problems in CONTENT. *Report AM-R*9611, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Kuznetsov Yu A, Meijer H G E & van Veen L. 2004. The fold-flip bifurcation. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **14**. to appear.

Kuznetsov Yu A, Muratori S & Rinaldi S. 1992. Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **2**: 117–128.

Kuznetsov Yu A, Muratori S & Rinaldi S. 1995. Homoclinic bifurcations in slow-fast second order systems. *Nonlinear Anal.*, **25**: 747–762.

Lanford O. 1980. A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6**: 427–434.

Lanford O. 1984. A shorter proof of the existence of the Feigenbaum fixed point. *Comm. Math. Phys.*, **96**: 521-538.

Langford W. 1979. Periodic and steady mode interactions lead to tori. *SIAM J. Appl. Math.*, **37**: 22–48.

Lefever R & Prigogine I. 1968. Symmetry-breaking instabilities in dissipative systems (II). *J. Chem. Phys.*, **48**: 1695–1700.

Levitin V V. 1995. Computation of functions and their derivatives in CONTENT. *Report AM-R*9512. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Lin X -B. 1990. Using Melnikov's method to solve Silnikov's problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **116**: 295–325.

Lorenz E. 1963. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**: 130–141.

Lorenz E. 1984. Irregularity: A fundamental property of the atmosphere. *Tellus A*, **36**: 98–110.

Lou Z, Kostelich E & Yorke J. 1992. Erratum: "Calculating stable and unstable manifolds". *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **2**: 215.

Lukyanov V I. 1982. Bifurcations of dynamical systems with a saddle-point separatrix loop. *Differential Equations*, **18**: 1049–1059.

Lyapunov A. 1892. *General Problem of Stability of Motion.* Kharkov: Mathematics Society of Kharkov.

Lyubich M. 2000. The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos. *Notices Amer. Math. Soc.*, **47**: 1042–1052.

Marsden J & McCracken M. 1976. *Hopf Bifurcation and Its Applications.* New York: Springer-Verlag.

May R. 1974. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, **17**: 645–647.

Maynard Smith J. 1968. *Mathematical Ideas in Biology.* London: Cambridge University Press.

Medvedev V S. 1980. A new type of bifurcation on manifolds. *Mat. Sbornik*, **113**: 487–492. In Russian.

Mei Z. 1989. A numerical approximation for the simple bifurcation points. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, **10**: 383–400.

Melnikov V K. 1962. Qualitative description of resonance phenomena in nonlinear systems. P-1013, OIJaF, Dubna. In Russian.

Melnikov V K. 1963. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**: 1-57.

Mishchenko E F & Rozov N K. 1980. *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations.* New York: Plenum.

Miura R. 1982. Accurate computation of the stable solitary wave for the FitzHughNagumo

equations. *J. Math. Biol.*, **13**: 247–269.

Moon F & Rand R. 1985. Parametric stiffness control of flexible structures//*Proceedings of the Workshop on Identification and Control of Flexible Space Structures*, Vol. II. Jet Propulsion Laboratory Publication 85-29, Pasadena, CA, 329–342.

Moore G. 1980. The numerical treatment of non-trivial bifurcation points. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, **2**: 441–472.

Moore G & Spence A. 1980. The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **17**: 567–576.

Moore G, Garret T & Spence A. 1990. The numerical detection of Hopf bifurcation points//Roose D, De Dier B & Spence A, eds.. *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven, 1989). Vol. 313 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 227–246.

Moser J. 1968. Lectures on Hamiltonian systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **81**: 1–60.

Moser J. 1973. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Murdock J. 2003. *Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems.* New York: Springer-Verlag.

Myrberg P. 1962. Sur l'itération des polynomes réels quadratiques. *J. Math. Pures Appl.*, **41**: 339–351.

Nagumo J, Arimoto S & Yoshizawa S. 1962. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, **50**: 2061–2070.

Namachchivaya S & Ariaratnam S. 1987. Periodically perturbed Hopf bifurcation. *SIAM J. Appl. Math.*, **47**: 15–39.

Neimark Ju I. 1959. On some cases of periodic motions depending on parameters. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **129**: 736–739. In Russian.

Neimark Ju I. 1967. Motions close to doubly-asymptotic motion. *Soviet Math. Dokl.*, **8**: 228–231.

Neimark Ju I. 1972. *The Method of Point Transformations in the Theory of Nonlinear Oscillations.* Moscow: Nauka. In Russian.

Neimark Ju I & Shil'nikov L P. 1965. A case of generation of periodic motions. *Soviet Math. Dokl.*, **6**: 305–309.

Neishtadt A I. 1978. Bifurcations of the phase pattern of an equation system arising in the problem of stability loss of self-oscillations close to 1:4 resonance. *J. Appl. Math. Mech.*, **42**: 896–907.

Nemytskii V V & Stepanov V V. 1949. *Qualitative Theory of Differential Equations.* GITTL, Moscow-Leningrad. In Russian.

Newhouse S, Palis J & Takens F. 1983. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **57**: 5–71.

Nikolaev E. 1995. Bifurcations of limit cycles of differential equations that admit involutory symmetry. *Mat. Sb.*, **186**: 143–160.

Nikolaev E V. 1992. On bifurcations of closed orbits in the presence of involutory symmetry. Institute of Mathematical Problems of Biology. Russian Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region.

Nikolaev E V. 1994. Periodic motions in systems with a finite symmetry group. Institute of Mathematical Problems of Biology, Russian Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region.

Nikolaev E V & Shnol E E. 1998a. Bifurcations of cycles in systems of differential equations with a finite symmetry group. I. *J. Dynam. Control Systems*, **4**: 315–341.

Nikolaev E V & Shnol E E. 1998b. Bifurcations of cycles in systems of differential equations with a finite symmetry group. II. *J. Dynam. Control Systems*, **4**: 343–363.

Nitecki Z. 1971. *Differentiable Dynamics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Nozdrachova V P. 1982. Bifurcation of a noncoarse seperatrix loop. *Differential Equations*, **18**: 1098–1104.

Nusse H & Yorke J. 1998. *Dynamics: Numerical Explorations 2nd ed.*. New York: Springer-Verlag.

Osinga H. 2003. Nonorientable manifolds in threee-dimensional vector fields. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci, Engrg.*, **13**: 553–570.

Ovsyannikov I M & Shil′nikov L P. 1987. On systems with a saddle-focus homoclinic curve. *Math. USSR-Sb.*, **58**: 557–574.

Palis J & Pugh C. 1975. Fifty problems in dynamical systems//*Dynamical Systems* (Warwick, 1974). Vol. 468 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 345–353.

Palis J & Takens F. 1993. *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations: Fractal Dimensions and Infinitely Many Attractors*. Vol. 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Palmer K. 1984. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *J. Differential Equations*, **55**: 225–256.

Pavlou S & Kevrekidis I. 1992. Microbial predation in a periodically operated chemostat: A global study of the interaction between natural and externally imposed frequencies. *Math. Biosci.*, **108**: 1–55.

Peckham B & Kevrekidis I. 1991. Period doubling with higher-order degeneracies. *SIAM J. Math. Anal.*, **22**: 1552–1574.

Peixoto M. 1962. Structural stability on two dimensional manifolds. *Topology*, **1**: 101–120,

Perron O. 1930. Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungen. *Math. Z.*, **32**: 703–728.

Petrovich V Yu. 1990. Numerical spectral analysis of the differential of the doubling operator by K. I. Babenko's method. Preprint 90-81, Institute of Applied Mathematics,

USSR Academy of Sciences, Moscow. In Russian.

Pliss V A. 1964. A reduction principle in stability theory of motions. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **28**: 1297–1324.

Poincaré H. 1879. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Thèse.* Paris: Gauthier-Villars.

Poincaré H. 1892, 1893, 1899. *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste.* Paris: Gauthier-Villars.

Pontryagin L S. 1934. On dynamical systems close to Hamiltonian systems. *J. Exptl. Theoret. Phys.*, **4**: 234–238. In Russian.

Pontryagin L S. 1962. *Ordinary Differential Equations.* London: Pergamon Press.

Poston T & Stewart I. 1978. *Catastrophe Theory and Its Applications.* San Francisco: Pitman.

Rheinboldt W. 1982. Computation of critical boundaries on equilibrium manifolds. *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**: 653–669.

Rheinboldt W. 1986. *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations.* New York: Wiley.

Rheinboldt W & Burkardt J. 1983. Algorithm 596: A program for a locally-parametrized continuation process. *ACM Trans. Math. Software*, **9**: 236–241.

Richtmyer R. 1978. *Principles of Advanced Mathematical Physics I.* New York: Springer-Verlag.

Richtmyer R. 1981. *principles of Advanced Mathematical Physics II.* New York: Springer-Verlag.

Ricker W. 1954. Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Board Canada*, **11**: 559–663.

Robinson J. 2001. *Infinite-dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors.* Cambridge: Cambridge University Press.

Rodríguez-Luis A, Freire E & Ponce E. 1990. A method for homoclinic and heteroclinic continuation in two and three dimensions//Roose D, De Dier B & Spence A, eds.. *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven, 1989). Vol. 313 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 197–210.

Roose D & Hlavaček V. 1985. A direct method for the computation of Hopf bifurcation points. *SIAM J. Appl. Math.*, **45**: 897–894.

Roshchin N V. 1978. Unsafe stability boundaries of the Lorenz model. *J. Appl. Math. Mech.*, **42**: 1038–1041.

Rössler O. 1979. Continuous chaos—four prototype equations/Gurel O & Rossler O, eds.. *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines* (Papers, Conf., New York, 1977). New York Acad. Sci., 376–392.

Ruelle D. 1973. Bifurcation in the presence of a symmetry group. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**: 136–152.

Ruelle D & Takens F. 1971. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, **20**: 167–192.

Sacker R. 1964. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. *Report IMM-NYU* 333. New York University.

Sacker R. 1965. A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**: 717–732.

Salam F & Bai S. 1988. Complicated dynamics of a prototype continuous-time adaptive control system. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **35**: 842–849.

Sanders J. 1982. Melnikov's method and averaging. *Celestial Mech.*, **28**: 171–181.

Sanders J. 1994. Versal normal form computation and representation theory//Tournier E, ed.. *Computer Algebra and Differential Equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 185–210.

Sandstede B. 1993. Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen. PhD thesis. Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin.

Sandstede B. 1997a. Constructing dynamical systems having homoclinic bifurcation points of codimension two. *J. Dynamics Differential Equations*, **9**: 269–288.

Sandstede B. 1997b. Convergence estimates for the numerical approximation of homoclinic solutions. *IMA J. Numer. Anal.*, **17**: 437–462.

Sandstede B. 2000. Center manifolds for homoclinic solutions. *J. Dynam. Differential Equations*, **12**: 449–510.

Sandstede B, Scheel A & Wulff C. 1997. Dynamics of spiral waves on unbounded domains using center-manifold reductions. *J. Differential Equations*, **141**: 122–149.

Schecter S. 1993. Numerical computation of saddle-node homoclinic bifurcation points. *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**: 1155–1178.

Schuko S D. 1968. Derivation of the lyapunov coefficients on a digital computer. *Trudy Gorkii Inst. Inzh. Vodn. Transp.*, **94**: 97–109. In Russian.

Serebriakova N N. 1959. On the behavior of dynamical systems with one degree of freedom near that point of the stability boundary where soft bifurcation turns into sharp. *Izv. Akad. Nauk SSSR. -Mech. Mash.*, **2**: 1–10. In Russian.

Seydel R. 1988. *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis.* New York: Elsevier.

Seydel R. 1991. Tutorial on continuation. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **1**: 3–11.

Shapiro A P. 1974. Mathematical models of competition//Control and Information, Vol. 10. DVNC AN SSSR, Vladivostok, 5–75. In Russian.

Shashkov M V. 1992. On bifurcations of separatrix contours with two saddles. *Internat.*

*J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **2**: 911–915.

Shil′nikov A L, Nicolis G & Nicolis C. 1995. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **5**: 1701-1711.

Shil′nikov L P. 1963. Some cases of generation of periodic motions from singular trajectories. *Mat. Sbornik*, **61**: 443–466. In Russian.

Shil′nikov L P. 1965. A case of existence of a countable number of periodic motions. *Soviet Math. Dokl.*, **6**: 163–166.

Shil′nikov L P. 1966. On the generation of a periodic motion from a trajectory which leaves and re-enters a saddle-saddle state of equilibrium. *Soviet Math. Dokl.*, **7**: 1155–1158.

Shil′nikov L P. 1967a. The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle -focus. *Soviet Math. Dokl.*, **8**: 54–58.

Shil′nikov L P. 1967b. On a Poincaré-Birkhoff problem. *Math. USSR-Sb.*, **3**: 353–371.

Shil′nikov L P. 1968. On the generation of periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type. *Math. USSR-Sb.*, **6**: 427–437.

Shil′nikov L P. 1969. On a new type of bifurcation of multidimensional dynamical systems. *Sov. Math. Dokl.*, **10**: 1368–1371.

Shil′nikov L P. 1970. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type. *Math. USSR-Sb.*, **10**: 91–102.

Shil′nikov L P, Shil′nikov A L, Turaev D V & Chua L. 1998. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I.* Singapore: World Scientific.

Shil′nikov L P, Shil′nikov A L, Turaev D V & Chua L. 2001. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II.* Singapore: World Scientific.

Shoshitaishvili A N. 1972. Bifurcations of topological type of singular points of vector fields that depend on parameters. *Functional Anal. Appl.*, **6**: 169–170.

Shoshitaishvili A N. 1975. Bifurcations of topological type of a vector field near a singular point//*Proceedings of Petrovskii Seminar*, Vol. 1. Moscow State University, Moscow, 279–309. In Russian.

Smale S. 1961. On gradient dynamical systems. *Ann. of Math.*, **74**: 199–206.

Smale S. 1963. Diffeomorphisms with many periodic points//Carins S, ed.. *Differential and Combinatorial Topology.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 63–80.

Smale S. 1966. Structurally stable systems are not dense. *Amer. J. Math.*, **88**: 491–496.

Smale S. 1967. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**: 747–817.

Stéphanos C. 1900. Sur une extension du calcul des substitutions linéares. *J. Math. Pures Appl.*, **6**: 73–128.

Sternberg S. 1957. Local contractions and a theorem of Poincaré. *Amer. J. Math.*, **79**:

809–824.

Szmolyan P. 1991. Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbed problems. *J. Differential Equations*, **92**: 252–281.

Takens F. 1973. Unfoldings of certain singularities of vector fields: generalized Hopf bifurcations. *J. Differential Equations.*, **14**: 476–493.

Takens F. 1974a. Forced oscillations and bifurcations. *Comm. Math. Inst., Rijkuniversiteit Utrecht*, **2**: 1–111. Reprinted in *Global Analysis of Dynamical Systems*. Bristol: Instute of Physics, 2001, 1–61.

Takens F. 1974b. Singularities of vector fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43**: 47–100.

Taylor M & Kevrekidis I. 1990. Interactive AUTO:A graphical interface for AUTO86. Department of Chemical Engineering, Princeton University.

Taylor M & Kevrekidis I. 1991. Some common dynamic features of coupled reacting systems. *Physica D*, **51**: 274–292.

Taylor M & Kevrekidis I. 1993. Couple, double, toil and trouble: a computer assisted study of two coupled CSTRs. *Chem. Engng. Sci.*, **48**: 1–86.

Temam R. 1997. *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd edition.* New York: Springer-Verlag.

Thom R. 1972. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse.* New York: Benjamin.

Tournier E ed. 1994. *Computer Algebra and Differential Equations.* London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 193, Cambridge University Press, Cambridge.

Tresser C. 1984. About some theorems by Šil'nikov L P. *Ann. Inst. H. Poincaré Théor.*, **40**: 441–461.

Turaev D V. 1991. On bifurcations of dynamical systems with two homoclinic curves of the saddle. PhD thesis. Gorkii State University. In Russian.

Turaev D V & Shil'nikov L P. 1995. Blue sky catastrophes. *Dokl. Math.*, **51**: 404–407.

Vaĭnberg M M & Trenogin V A. 1974. *Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations.* Leyden: Noordhoff International Publishing.

van Gils S. 1982. On a formula for the direction of Hopf bifurcation Centre for Mathematics and Computer Science. Report TW/225.

van Gils S. 1985. A note on "Abelian integrals and bifurcation theory". *J. Differential Equations*, **59**: 437–441.

van Gils S & Mallet-Paret J. 1986. Hopf bifurcation and symmetry: Travelling and standing waves on the circle. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **104**: 279–307.

van Strien S. 1979. Center manifolds are not $C^\infty$. *Math. Z.*, **166**: 143–145.

van Strien S. 1991. Interval dynamics//van Groesen E & de Jager E, eds.. Structures in Dynamics. Vol. 2 of *Studies in Mathematical Physics.* Amsterdam: North-Holland, 111–160.

Vance W & Ross J. 1991. Bifurcation structures of periodically forced oscillators. *Chaos*, **1**: 445–453.

Vanderbauwhede A. 1989. Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations. *Dynamics Reported*, **2**: 89–169.

Volterra V. 1931. *Lecònse sur la Théorie Mathematique de la Lutte pur la Via.* Paris: Gauthier-Villars.

Wan Y -H. 1978a. Bifurcation into invariant tori at points of resonance. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **68**: 343–357.

Wan Y -H. 1978b. Computations of the stability condition for the Hopf bifurcation of diffeomorphisms on $\mathbf{R}^2$. *SIAM J. Appl. Math.*, **34**: 167–175.

Wang D. 1993. A recursive formula and its application to computations of normal forms and focal values//Liao S -T, Ding T -R & Ye Y -Q, eds. *Dynamical Systems* (Tianjin, 1990/1991). Vol. 4 of *Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys.*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 238–247.

Werner B. 1996. Computation of Hopf bifurcations with bordered matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, **33**: 435–455.

Whitley D. 1983. Discrete dynamical systems in dimensions one and two. *Bull. London Math. Soc.*, **15**: 177–217.

Wiggins S. 1988. *Global Bifurcations and Chaos.* New York: Springer-Verlag.

Wiggins S. 1990. *Introduction to Applied Non-linear Dynamical Systems and Chaos.* New York: Springer-Verlag.

Wolfram S. 1991. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer.* CA: Addison-Wesley, Redwood City.

Yanagida E. 1987. Branching of double pulse solutions from single pulse solutions in nerve axon equations. *J. Differential Equations*, **66**: 243–262.

You Z, Kostelich E J & Yorke J. 1991. Calculating stable and unstable manifolds. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **1**: 605–623.

Zegeling A. 1993. Equivariant unfoldings in the case of symmetry of order 4. *Serdica*, **19**: 71–79.

Żołądek H. 1984. On the versality of a family of symmetric vector-fields in the plane. *Math. USSR-Sb.*, **48**: 463–498.

Żołądek H. 1987. Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes. *J. Differential Equations*, **67**: 1–55.

# 索　　引

**C**



**D**



**E**



**F**

**G**



**H**

**J**



**K**

**L**



**M**



**N**



**P**



**Q**



**S**

**T**



**W**

**X**



**Y**

